SOBRE LA TEORIA DE LAS SOLUCIONES SINGULARES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

(Nota metodológica)

En mi memoria *Sobre las envolventes de una familia de curvas planas dependientes de un parámetro, y sobre las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden* (1), he expuesto desde un punto de vista nuevo la teoría de las soluciones singulares. En esta nota me propongo dar a conocer el modo cómo presento esta teoria, según mis ideas personales, en mi curso de la Universidad.

Cuando los alumnos abordan el estudio de la teoría de las soluciones singulares, ya saben lo que son estas soluciones, han estudiado la ecuación de Clairaut, y han visto algunos ejemplos relativos a ella. En consonancia con esta preparación, he aquí cómo desarrollo mi enseñanza:

1o.—Rememoro rápidamente las definiciones de solución general, solución particular, solución singular.

2o.—A propósito de la familia de curvas constituída por las infinitas soluciones particulares de la ecuación diferencial, recuerdo que, dada una familia de curvas

$$F(x,y,C) = 0,$$

hay regiones del plano por las cuales no pasa ninguna curva, mientras que existen otras por las cuales pasa una sola curva de la familia, o dos, o más; acerca de lo cual he insistido en una lección anterior sobre la teoría de las envolventes. Adoptando la nomenclatura que he introducido en mi memoria citada, llamo *región rica* del plano a aquella por cada uno de cuyos puntos pasa el mayor número posible de curvas de la familia; *región pobre* a aquella por cuyos puntos pasa un número de curvas inferior al máximo; *región estéril* a aquella por la cual no pasa ninguna curva de la familia. Estas diversas regiones están separadas entre sí por curvas a las que doy el nombre de *fronteras*, y distingo las *fronteras tangenciales* y las *fronteras cuspidales*, según que sean tangentes a las curvas de la familia, o que sean lugares geométricos de los puntos de retroceso de esas curvas. A las fronteras tangenciales las llamo, para conformarme con el uso general, *envolventes*.

3o.—Demuestro el siguiente

TEOREMA.—Cuando las curvas representadas por la integral general

$$F(x,y,C) = 0$$

(1) *Revista de Ciencias*, Año 40, p. 31-60. Núm. 423. Lima, marzo 1938.

de una ecuación diferencial

$$f(x,y,y') = 0$$

admiten una envolvente o frontera tangencial, esta envolvente es también una solución.

(Demostración análoga a la de Appell, *Éléments d'Analyse Mathématique*. 3e. éd., p. 569; 4e. éd., p. 559).

Advierto, en un Escolio, que la envolvente de las soluciones particulares constituye generalmente una solución singular: sólo excepcionalmente constituye, ella también, una solución particular.

4o.—Trato el fondo del asunto de la manera siguiente:

Según el teorema que se acaba de establecer (3o.), bastará hallar las envolventes de las soluciones particulares de una ecuación diferencial para tener sus soluciones singulares. Pero pueden hallarse las soluciones singulares sin integrar la ecuación diferencial, y sin conocer, por lo tanto, su integral general ni sus integrales particulares.

En efecto, la ecuación

$$f(x,y,y') = 0 \tag{1}$$

define una familia de curvas en el plano XOY, que serán las soluciones particulares de la ecuación diferencial. Si consideramos un punto cualquiera M del plano, de coordenadas x_0, y_0, por él pasarán una o más soluciones particulares: los coeficientes angulares de las tangentes en ese punto a las curvas que pasan por él, vendrán dados por las raíces *reales* de la ecuación en y'

$$f(x_0,y_0,y') = 0, \tag{2}$$

que se deduce de la (1) reemplazando en ella x e y por x_0 e y_0. Si la (2) da para y' uno, dos, tres, ... valores reales, por el punto considerado M pasarán una, dos, tres, ... soluciones particulares. Si las coordenadas x_0 e y_0 del punto M son tales que la (2) no admite ninguna raíz real, no pasará por ese punto ninguna solución particular.

Por lo tanto, cabrá distinguir en el plano diversas regiones (ricas, pobres, estériles), según el número de soluciones particulares que pasen por cada uno de sus puntos. Estas diversas regiones del plano estarán separadas entre sí por fronteras que, o bien serán tangentes a las soluciones particulares *(fronteras tangenciales, envolventes)*, o serán los lugares geométricos de sus puntos de retroceso *(fronteras cuspidales)*. Por consiguiente, tan pronto como se haya reconocido la existencia de una frontera que limita en el plano la región ocupada por las soluciones particulares de la (1), la cual frontera tendrá una ecuación de la forma

$$y = \varphi(x),$$

habrá que ver si esta función $\varphi(x)$ satisface a la ecuación diferencial: en caso afirmativa, (x) es una solución (casi seguramente una solución singular) y la frontera, una envolvente.

(Aquí aduzco algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de primer orden y de segundo grado, con fronteras tangenciales o cuspidales. Allá van dos de los ejemplos que suelo presentar:

a) La ecuación diferencial

$$y'x - ky'^2 - y = 0, \tag{3}$$

que es una ecuación de Clairaut, en la que k es un parámetro, tiene por solución general

$$y = Cx + kC^2, \tag{4}$$

donde C es la constante de integración. Pero la ecuación (3) sólo da valores reales de y' cuando

$$x^2 - 4ky \geqslant 0.$$

Luego la frontera es

$$x^2 - 4ky = 0,$$

envolvente de las curvas de la familia (4) y por tanto (según el teorema del punto 3o.) solución, solución singular, de la (3).

b) La ecuación diferencial

$$4y'^2 = 9x \tag{5}$$

tiene por solución general

$$y = x^{3/2} + C,$$

ecuación de una familia de parábolas semicúbicas. Pero la (5) sólo da valores reales para y' cuando $x \geqslant 0$: luego la frontera es el eje YY', de ecuación $x = 0$. Pero este eje es una frontera cuspidal, lugar geométrico de los puntos de retroceso de las soluciones particulares: no siendo una envolvente, no es una solución; y la (5) no tiene integral singular).

5o.—En el caso de las ecuaciones diferenciales de tercer grado, no hay región estéril, porque siempre existe por lo menos un valor real de y' (Toda ecuación algebraica de tercer grado tiene por lo menos una raíz real). Pero las curvas de la familia, de las cuales hay tres por cada punto de la región rica, y una por cada punto de la región pobre, no atravesarán la frontera en cada punto común que tengan con ella: mientras que en unos puntos comunes entre la frontera y las curvas de la familia aquélla será atravesada, en otros no lo será; sino que las curvas que corren en la región rica, o bien tocarán tangencialmente a la frontera para seguir su curso en esa misma región (frontera tangencial), o bien retrocederán al tocarla (frantera cuspidal). Y como las fronteras tangenciales son soluciones de la ecuación diferencial, de aquí resulta que hay que investigar si las fronteras halladas lo son.

(Aquí aduzco, igualmente, ejemplos de ecuaciones de primer orden y tercer grado. El ejemplo siguiente, que figura en la conocida obra de Piaggio (2), es particularmente atractivo:

c) La ecuación diferencial de tercer grado

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0 \tag{6}$$

tiene por integral general

$$y = C(x - C)^2. \tag{7}$$

Pero la (6) es de la forma

$$y'^3 + py' + q = 0,$$

ecuación cúbica en y', y como se sabe por la teoría de las ecuaciones algebraicas de tercer grado, esta ecuación dará para y' un solo valor real, o tres valores reales, siendo por lo menos dos de ellos iguales, o tres valores reales y desiguales, según que se tenga

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \gtreqless 0,$$

o en nuestro caso, según que se tenga

$$\frac{64y^4}{4} - \frac{64x^3y^3}{27} \gtreqless 0.$$

La frontera tendrá por ecuación

$$y^3\left(y - \frac{4}{27}x^3\right) = 0,$$

(2) H. T. H. Piaggio: *Differential Equations*, p. 76. London, 1928.

lo que nos da dos curvas distintas:

1a. $y = 0$, el eje $X'X$, envolvente de las soluciones particulares, y por lo tanto solución de la (6), pero *solución particular,* que se obtiene haciendo en la (7), $C = 0$; y

2a. $27y - 4x^3 = 0$, otra envolvente de las soluciones particulares, y por lo tanto solución de la (6); pero *solución singular,* porque su valor no puede deducirse dando en (7) un valor adecuado a la constante C).

Universidad Católica del Perú,
Cátedra de Cálculo Infinitesimal.

Cristóbal de Losada y Puga.