CAP. 4

INTEGRALES IMPROPIAS

1 DEFINICION

Decimos que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es **impropia** si

(1) la función integrando tiene puntos de discontinuidad en el intervalo $[a,b]$,

o

(2) por lo menos uno de los límites de integración a o b es infinito.

A continuación vamos a dar una definición precisa de la integral impropia en tales casos. Si $\int_a^b f(x)dx$ resulta ser un número real, esto es, un valor finito determinado, entonces decimos que la integral es **convergente**. En caso contrario, decimos que es **divergente**.

2 Integral Impropia cuando la Función es Discontinua

Definición

1 Si $f(x)$ es continua en el intervalo $(a,b]$, entonces considerando valores de $\varepsilon > 0$, definimos

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx} \; .$$

2 Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b)$, entonces considerando valores de $\varepsilon > 0$, definimos.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx} \; .$$

3 Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ excepto en el punto $x = c$, donde $a < c < b$, entonces considerando valores de ε y $\varepsilon' > 0$, definimos

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx} \; .$$

Ejemplo 1 Calcular la integral impropia $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ o establecer su divergencia.

Solución La función $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ es continua en todo punto excepto en $x = 1$. Entonces aplicamos (3) de la definición 2.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{1+\varepsilon'}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon'}^3 \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \infty \; .
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral es divergente.

Ejemplo 2 Calcular la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ o establecer su divergencia.

Solución La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en el intervalo $(0,1]$, y tiene un punto de discontinuidad en $x = 0$. Aplicamos (1) de la definición 2.:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad \varepsilon > 0$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} 2[1 - \sqrt{\varepsilon}] = 2$$

$$\left(\text{pues } \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} = 0\right).$$

Luego la integral dada es convergente y su valor es 2.

3 Integral Impropia cuando los Límites de Integración son Infinitos

Definición

1 Si $f(x)$ es continua en $a \leq x < +\infty$, se define

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

2 Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x \leq b$, definimos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

3 Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x < +\infty$, definimos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx}$$

Ejemplo 1 Calcular $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ o establecer su divergencia.

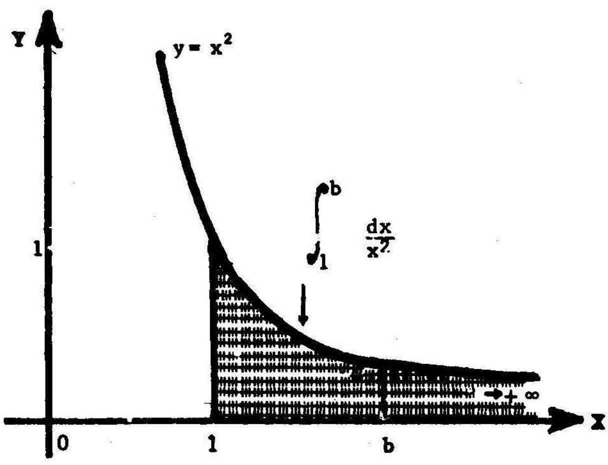
Solución

Tenemos $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2}$ (por (1), definición 3)

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1 .$$

Así, la integral es convergente y su valor es 1.

Interpretación Geométrica



$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ representa el área bajo la curva $\frac{1}{x^2}$ sobre la semirrecta $x > 1$.

Ejemplo 2

Evaluar la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ o establecer su divergencia.

Solución

Por (3) de la definición 3 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{(x+2)^2 + 5}$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) \Bigg|_a^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left[\operatorname{arc\,tan} \left(\frac{b+2}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{a+2}{\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi\sqrt{5}}{5} .$$

Así la integral es convergente y su valor es $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

4 ALGUNOS CRITERIOS PARA LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

4.1 Criterio de Comparación

Teorema

Sean $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y $\displaystyle\int_a^b F(x)dx$ dos integrales impropias tales que

(1) $|f(x)| \leq F(x)$ en $a < x < b$, y

(2) $\displaystyle\int_a^b F(x)dx$ es convergente,

entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es convergente.

Nota Omitimos la prueba del teorema.

4.2 Criterio de Convergencia para Funciones Discontinuas

Teorema Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ excepto en el punto c.

Si (1) $f(x) \geq 0$,

y (2) $\lim_{x \to c} f(x) |x-c|^m = A$, donde $A \neq 0, +\infty$,

en cuyo caso escribimos $\mathbf{f(x) \sim \dfrac{A}{(x-c)^m}}$ **cuando** $\mathbf{x \to c}$,

entonces la integral impropia $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

(3) es convergente cuando $m < 1$,

y (4) es divergente cuando $m \geq 1$.

Nota La prueba del teorema se ofrece en el problema 1 de la sección 4.5 de problemas resueltos, pág. 145.

Ejemplo Determinar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

Solución

La función $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^4)^{1/3}}$ es continua en el intervalo $[0,1)$.

Además

(1) $f(x) \geq 0$,

y (2) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}\,(1+x)^{1/3}\,(1+x^2)^{1/3}}$, y cuando

$x \to 1$, $1+x \to 2$, $1+x^2 \to 2$, y por lo tanto

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1/3}\,(2)^{2/3}} = \frac{A}{(1-x)^m} \text{ , donde } m = \frac{1}{3} \text{ y } A = \frac{1}{(2)^{2/3}}$$

es $\neq 0$ y $\neq +\infty$. Puesto que $m = \frac{1}{3} < 1$ concluimos, por el teorema 4.2, que la integral es convergente.

4.3 Criterio de Convergencia cuando un Límite de Integración es Infinito

Teorema Sea $f(x)$ una función continua en $a \leq x < +\infty$. Si

(1) $f(x) \geq 0$,

y **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\, x^m = A$, donde $A \neq 0, +\infty$,

en cuyo caso escribimos $f(x) \sim \dfrac{A}{x^m}$ **cuando** $x \to +\infty$,

entonces la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

(3) es convergente si $m > 1$,

y **(4)** es divergente si $m \leq 1$.

Nota La prueba del teorema 4.3 se da en el problema 3 de la sección 4.5 de problemas resueltos, pág. 147.

Ejemplo Determinar si la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^5+2}}$ es convergente.

Solución Cuando $x \to +\infty$ tenemos

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^5+2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5\left(1+\frac{2}{x^5}\right)}} = \frac{1}{x\,\sqrt[5]{1+\frac{2}{x^5}}} \sim \frac{1}{x} = \frac{1}{x^m}$$

con $m = 1$.

Luego, por el teorema 4.3 la integral es divergente.

4.4 Algunos Ejemplos de Integrales Impropias

Ejemplo 1 LA FUNCION BETA

La **función beta** se define mediante la ecuación

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Probar que la integral es convergente cuando $p > 0$ y $q > 0$.

Solución La función integrando $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ es continua en $0 < x < 1$. Fijemos $0 < a < 1$ y escribamos

$$B(p,q) = \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx \qquad (1)$$

Vamos a probar que las dos integrales del segundo miembro son convergentes.

Paso 1

La integral $\int_0^a f(x)dx$ es convergente.

Cuando $x \to 0$, $1-x \to 1$ y $f(x) \sim x^{p-1} = \dfrac{1}{x^{1-p}} = \dfrac{1}{x^m}$

con $m = 1-p < 1$, puesto que $p > 0$. Luego, por el teorema 4.2, la integral es convergente.

Paso 2

La integral $\int_a^1 f(x)dx$ es convergente.

Cuando $x \to 1$ tenemos que $f(x) \sim (1-x)^{q-1} = \dfrac{1}{(1-x)^{1-q}} = \dfrac{1}{(1-x)^m}$

con $m = 1-q < 1$, ya que $q > 0$. Luego, por el teorema 4.2, la integral es convergente.

De la igualdad (1) y de los pasos 1 y 2 se sigue que $B(p,q)$ es convergente cuando $p > 0$ y $q > 0$.

Ejemplo 2 LA FUNCION GAMMA

La **función gamma** se define mediante la ecuación

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx .$$

Probar que la integral converge cuando $p > 0$.

Solución La función $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$ es continua en $0 < x < +\infty$.

Fijemos un entero $n > p$

Por la regla del L'Hôspital (aplicada n veces)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

vemos que existe un número $a > 0$ tal que $\frac{e^x}{x^n} \geqslant 1$ para todo $x \geqslant a$

ó $e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^n}$ cuando $x \geqslant a$ **(1)**

Escribamos ahora

$$\Gamma(p) = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

Vamos a probar que las dos integrales del segundo miembro son convergentes.

Paso 1 La integral $\int_0^a f(x)dx$ es convergente.

En efecto, cuando $x \to 0$, $e^{-x} \to e^0 = 1$ y $f(x) \sim x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}} = \frac{1}{x^m}$,

con $m = 1 - p < 1$, ya que $p > 0$. Luego, la integral es convergente.

Paso 2 La integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente. En efecto $e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^n}$ (por (1))

$$x^{p-1} e^{-x} \leqslant \frac{x^{p-1}}{x^n} = \frac{1}{x^{n-p+1}} = \frac{1}{x^m} , \quad \text{con } m = n-p+1 > 1.$$

Puesto que $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^m}$ es convergente, se sigue por el criterio de comparación que $\int_a^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ es convergente. De (2) y de los pasos 1 y 2 se sigue que $\Gamma(p)$ es convergente para $p > 0$.

Ejemplo 3

Si $f(x)$ es una función continua en $0 \leqslant x < \infty$, se define la función $F(s)$, llamada **transformada de Laplace de f(x)**, mediante

$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ en aquellos valores de s para los cuales la integral converge.

Probar que si $|f(x)| \leqslant Ce^{ax}$ en $x \geqslant 0$, entonces $F(s)$ converge para todo $s > a$.

Solución

Puesto que $|e^{-sx} f(x)| = e^{-sx} |f(x)| \leqslant C e^{-(s-a)x}$, por el criterio de comparación basta probar que la integral $\int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx$ es convergente cuando $s > a$.

Ahora bien

$$\int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(- \frac{e^{-(s-a)x}}{s-a}\right) \Bigg|_0^b$$

$$= - \frac{1}{s-a} \left[\lim_{b \to \infty} \frac{1}{e^{(s-a)b}} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

(puesto que $s-a > 0$ implica $\lim_{b \to \infty} e^{(s-a)b} = \infty$).

4.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Sea $f(x)$ una función en el intervalo $[a,c)$ tal que

(1) $f(x) \geqslant 0$,

(2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)|c-x|^m = A$, donde $A \neq 0, +\infty$.

Probar que la integral $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ es convergente si $m < 1$. y es divergente si $m \geqslant 1$.

SOLUCION Puesto que $\lim\limits_{x \to c} f(x)|c-x|^m = A > 0$ (pues $f(x) \geqslant 0$), eligiendo $0 < B < A < C$ vemos que existe un número $a < d < c$ tal que $B \leqslant f(x)(c-x)^m \leqslant C$ en $d \leqslant x < c$.

Luego
$$B\int_d^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(c-x)^m} \leqslant \int_d^{c-\varepsilon} f(x)dx \leqslant C\int_d^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(c-x)^m} \qquad (1)$$
para todo $\varepsilon > 0$ tal que $d < c-\varepsilon$.

Por (1) y el criterio de comparación $\displaystyle\int_d^c f(x)dx$ es **convergente si y sólo si** $\displaystyle\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$ es **convergente.**

Así nos resta determinar la convergencia de $\displaystyle\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$.

Caso 1. $m < 1$ La integral $\displaystyle\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$ es convergente.

En efecto,
$$\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_d^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(c-x)^m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{(c-x)^{-m+1}}{-m+1} \right|_d^{c-\varepsilon}$$
$$= \frac{1}{1-m} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{1-m} - (c-d)^{1-m} \right] = -\frac{(c-d)^{1-m}}{1-m}$$
(pues $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-m} = 0$, ya que $1-m > 0$).

Caso 2. $m = 1$ La integral $\int_d^c \frac{dx}{c-x}$ es divergente.

En efecto, $$\int_d^c \frac{dx}{c-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_d^{c-\varepsilon} \frac{dx}{c-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\ln(c-x)\Big]\Big|_d^{c-\varepsilon}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\ln\varepsilon - \ln(c-d)\Big]$$

$$= \infty \qquad (\text{ pues } \lim_{\varepsilon \to 0} \ln\varepsilon = -\infty).$$

Caso 3. $m > 1$ La integral $\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m}$ es divergente.

En efecto, como en el caso 1 se tiene

$$\int_d^c \frac{dx}{(c-x)^m} = \frac{1}{1-m} \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\varepsilon^{1-m} - (c-d)^{1-m}\Big] = -\infty$$

$$(\text{ pues de } m > 1 \text{ se tiene } \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} = +\infty)$$

PROBLEMA 2 Calcular $A = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

SOLUCION

$$A = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \text{arc tan } x \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\text{arc tan } b - \text{arc tan } 0) = \frac{\pi}{2} .$$

PROBLEMA 3 Sea $f(x)$ una función continua en $a \leqslant x < +\infty$ tal que

(1) $f(x) \geqslant 0$,

(2) $\lim_{x \to +\infty} f(x)x^m = A$, donde $A \neq 0$, $+\infty$.

Probar que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente si $m > 1$ y es divergente si $m \leqslant 1$.

SOLUCION Fijemos un número $b > 0$ tal que $a < b$. Puesto que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

y la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente, es suficiente analizar la convergencia de la integral $\int_b^\infty f(x)\,dx$.

Ahora bien $\int_b^\infty f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b}}^0 f(\frac{1}{y})(-\frac{dy}{y^2})$ (cambiando de variable $x = \frac{1}{y}$)

$$= \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{f(\frac{1}{y})}{y^2}\,dy = \int_0^{\frac{1}{b}} g(y)\,dy,$$

donde $g(y) = \dfrac{f(\frac{1}{y})}{y^2} \geqslant 0$,

y para la última integral podemos aplicar el criterio de convergencia 4.2 ya que la función $g(y)$ es continua en $(0, 1/b]$, y es discontinua en 0.

Tenemos $A = \lim_{x\to\infty} f(x)x^m = \lim_{y\to 0} f(\frac{1}{y})y^{-m} = \lim_{y\to 0} \dfrac{f(\frac{1}{y})}{y^2} y^{-m+2}$

$$= \lim_{y\to 0} g(y)\, y^{-m+2}.$$

Entonces, por el criterio (4.2), la integral $\int_0^{\frac{1}{b}} g(y)\,dy$

es convergente si $-m+2 < 1$, esto es, cuando $m > 1$,

es divergente si $-m+2 \geqslant 1$, esto es, cuando $m \leqslant 1$.

Resumiendo $\int_b^\infty f(x)\,dx$ es convergente si $m > 1$, y es divergente si $m \leqslant 1$.

PROBLEMA 4 Determinar si la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ es convergente o divergente.

SOLUCION

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}\ (1+x)^{1/2}\ (1+x^2)^{1/2}}$ es discontinua en $x=1$, y cuando $x \to 1$, $1+x \to 2$, $1+x^2 \to 2$,

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}\ (2)} = \frac{A}{(1-x)^m}, \quad \text{donde } A=\frac{1}{2}, \quad m=\frac{1}{2}.$$

Entonces por el criterio 4.2, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 5 Evaluar la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ o establecer su divergencia.

SOLUCION Podemos usar el criterio 4.2 para determinar la convergencia de la integral dada. No obstante preferimos efectuar un cálculo directo.

Si $p=1$, la integral es divergente.

En efecto, $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln\varepsilon - \ln 1) = -\infty$.

Cuando $p \neq 1$, se tiene $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon^{1-p})$.

Entonces, si $p<1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ (ya que $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-p} = 0$)

y si $p>1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$.

PROBLEMA 6 Hallar $\int_0^\infty \frac{\text{arc tan } x}{x^2+1}\,dx$.

SOLUCION

$$\int_0^\infty \frac{\text{arc tan } x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}(\text{arc tan } x)^2 \Big|_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}$$

PROBLEMA 7

Evaluar la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

SOLUCION Si $p = 1$, la integral es divergente. En efecto,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty .$$

Cuando $p \neq 1$, se tiene

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{b \to +\infty} [b^{1-p} - 1].$$

Entonces, si $p < 1$, $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} b^{1-p} = +\infty$ (pues $1 - p > 0$)

y la integral es divergente;

y si $p > 1$, $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} b^{1-p} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = 0$, y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

Así, para $p > 1$, la integral es convergente y su valor es $\dfrac{1}{p-1}$.

PROBLEMA 8 Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ o probar que es divergente.

SOLUCION

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} \operatorname{sen} x \, dx = - \lim_{b \to +\infty} (\cos b - \cos 0)$$

$$= 1 - \lim_{b \to +\infty} \cos b.$$

Pero no existe $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \cos b$, ya que, por ejemplo, cuando $b = 2n\pi$, $\cos b = 0$;

y cuando $b = (2n+1)\pi$, $\cos b = -1$.

Por lo tanto la integral es divergente.

PROBLEMA 9 Determinar si la integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx$ es convergente.

SOLUCION Puesto que $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ y la integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es convergente, se sigue por el criterio de comparación que la integral dada es convergente.

PROBLEMA 10

Hallar $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION

La función $f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ es discontinua en $x = 1$.

Tenemos $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [\,\text{arc sen}\,(1-\varepsilon) - \text{arc sen}\,0]$$

$$= \frac{\pi}{2} \,.$$

PROBLEMA 11 Hallar $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$.

SOLUCION Tenemos

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\;\ln x} = \int_{-\infty}^{\ln 1/2} \frac{dy}{y} \qquad (\text{ haciendo } y = \ln x)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^{\ln 1/2} \frac{dy}{y} = \lim_{a \to -\infty} (\ln |y|)\Big|_a^{\ln 1/2}$$

$$= \ln \left|\ln \frac{1}{2}\right| - \lim_{a \to -\infty} \ln |a| = -\infty.$$

Por lo tanto la integral es divergente.

PROBLEMA 12 Hallar $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\;\ln^2 x}$.

SOLUCION Haciendo $y = \ln x$, $x = e^y$, $dx = e^y\,dy$, tenemos

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\;\ln^2 x} = \int_{-\infty}^{\ln 1/2} \frac{dy}{y^2} \quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^{\ln 1/2} \frac{dy}{y^2} = \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_a^{\ln 1/2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} + \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{a} = \frac{1}{\ln 2} \,.$$

PROBLEMA 13

Analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}$, $b>0$.

SOLUCION

La función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3} = \frac{1}{x^{1/4}\,(x^{1/12} + 2 + x^{11/4})}$$ es discontinua en $x=0$, y cuando $x \to 0$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{1/4}(2)} = \dfrac{A}{x^m}$, donde $A = \dfrac{1}{2}$, $m = \dfrac{1}{4} < 1$.

Aplicando el criterio 4.2, concluimos que la integral dada es convergente.

PROBLÈMA 14 Decidir la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 4}.$$

SOLUCION Tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 4} = \frac{\dfrac{1}{x^{2/3}}}{\dfrac{2}{x^{1/3}} + \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{1/3} + \dfrac{4}{x^{2/3}}}$$

y cuando $x \to +\infty$, el denominador $\to 1$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2/3}} = \dfrac{A}{x^m}$,

donde $A = 1$, $m = \dfrac{2}{3}$.

Por el criterio de convergencia 4.3 concluimos que la integral dada es divergente.

PROBLEMA 15 Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3(x^2-x+1)^{1/2}}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

SOLUCION $$f(x) = \frac{x^3\,(x^2-x+1)^{1/2}}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x^3(x^2-x+1)^{1/2}}{(1-x)^{3/2}\,(1+x)^{3/2}}$$

y cuando $x \to 1$, $f(x) \sim \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}\,(2)^{3/2}} = \dfrac{A}{(1-x)^m}$,

donde $A = \dfrac{1}{2^{3/2}}$, $m = \dfrac{3}{2} > 1$. Entonces por el criterio de comparación 4.2, concluimos que la integral dada es divergente.

PROBLEMA 16 Probar que la integral $A = \int_1^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ es convergente

SOLUCION

$$A = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\text{sen } x \, dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \left[- \frac{\cos x}{x} \bigg|_1^b + \int_1^b \frac{\cos x \, dx}{x^2} \right]$$

$$= \left(\cos 1 - \lim_{b \to +\infty} \frac{\cos b}{b} \right) + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$= \cos 1 + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx .$$

La integral $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ es convergente por el criterio de comparación ya que $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ y $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es convergente. Por lo tanto, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 17 Determinar si la integral $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x} dx$ es convergente.

SOLUCION La función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x}$ es continua y ≥ 0 en $(0,1]$.

Además cuando $x \to 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\text{sen } x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{\text{sen } x}{x}} = \frac{x^{-1/2}}{\frac{\text{sen } x}{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{A}{x^m}$,

donde $A = 1$, $m = \frac{1}{2} < 1$, pues $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

Luego, por el criterio 4.2, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 18. Hallar el valor de c para el cual la integral

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$$ es convergente. Hallar el valor de la integral.

SOLUCION.

Para $b > 0$ se tiene $\displaystyle\int_0^{b} \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$

$$= \frac{c}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\Big|_0^b = \frac{c}{2}\ln(b^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2b+1)$$

$$= \frac{c}{2}\ln b^2\cdot\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{2}\ln b\cdot\left(2+\frac{1}{b}\right)$$

$$= \ln b^{c-1/2} + \left[\frac{c}{2}\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(2+\frac{1}{b}\right)\right]$$

cuando $b \to +\infty$ el término $[\ ]$ tiende al valor $-\frac{1}{2}\ln 2$. Luego, la integral I es convergente si y sólo si $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{c-1/2} = L$ cumple $0 < L < +\infty$.

Pero cuando $c < \frac{1}{2}$, $L = 0$

$c = \frac{1}{2}$, $L = 1$

$c > \frac{1}{2}$, $L = +\infty$.

De donde resulta que I converge solamente cuando $c = \frac{1}{2}$ y su valor es

$$I = \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

PROBLEMA 19 Sea $a > 0$. Hallar el valor de la integral

$$I = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(1+ax^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{x+1}\right)dx.$$

SOLUCION Para $b > 0$ se tiene

$$\int_0^{b}\left(\frac{1}{(1+ax^2)^{1/2}} - \frac{\alpha}{x+1}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\sqrt{\frac{1}{a}+x^2}\right) - \alpha\ln(x+1)\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(b+\sqrt{\frac{1}{a}+b^2}\right) - \alpha\ln(b+1) - \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln b\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{ab^2}}\right) - \alpha\ln b\left(1+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\sqrt{a}$$

$$= \ln b^{\frac{1}{\sqrt{a}}-\alpha} + \left[\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{ab^2}}\right) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\sqrt{a}\right]$$

cuando $b \to +\infty$ la expresión [ ] tiende a $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln 2\sqrt{a}$. Luego, la integral I es convergente si y sólo si $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{\frac{1}{\sqrt{a}}-\alpha} = L$ cumple $0 < L < +\infty$.

Ahora bien, tenemos

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{a}},\ L = +\infty$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}},\ L = 1$$

$$\alpha > \frac{1}{\sqrt{a}},\ L = 0,$$

de donde resulta que el único valor de α para el cual I es convergente es $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$, y en este caso

$$I = \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\ln 2\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln 2\sqrt{a}.$$

PROBLEMA 20 Hallar los valores de p y q para los cuales la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(1+x)^q} \quad \text{es convergente.}$$

SOLUCION La función $f(x) = \dfrac{1}{x^p(1+x)^p}$ es continua en $0 < x < +\infty$.

Se tiene $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Paso 1 Convergencia de la integral $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Cuando $x \to 0$, $1+x \to 1$ y $f(x) \sim \dfrac{1}{x^p\, 2^q} = \dfrac{A}{x^m}$,

donde $A = \dfrac{1}{2^q}$, $m = p$.

Luego, por el criterio 4.2, la integral I_1 **es convergente si y sólo si** $\mathbf{p < 1}$.

Paso 2 Convergencia de la integral $I_2 = \displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Cuando $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{x^p(1+x)^q} = \dfrac{1}{x^{p+q}(1+\frac{1}{x})^q} \sim \dfrac{1}{x^{p+q}} = \dfrac{A}{x^m}$,

donde $A = 1$, $m = p+q$.

Luego, por el criterio 4.3, I_2 **es convergente si y sólo si** $\mathbf{m = p+q > 1}$ o $\mathbf{1 - q < p}$.

Así, la integral dada es convergente si y sólo si $1-q < p < 1$.