

**ENSEÑANZA  
DE LAS  
MATEMÁTICAS**

**III COLOQUIO INTERNACIONAL**

**ACTAS 2008**

Editora: Cecilia Gaita

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS - IREM**



**PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DEL PERÚ**

III COLOQUIO INTERNACIONAL  
SOBRE ENSEÑANZA DE LAS  
MATEMÁTICAS

**ACTAS 2008**

Febrero de 2008

**Pontificia Universidad Católica del Perú**  
**Departamento de Ciencias**  
**IREM**

Editora: Cecilia Gaita

*Actas 2008*

Primera edición, noviembre del 2008

Tiraje: 100 ejemplares

Coordinadora: Cecilia Gaita Iparraguirre

Diseño de carátula: Elit León

Diagramación de interiores: Doris Moreno Alvarez

Impresión: PUCP

© Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias, 2008.

Avenida Universitaria 1801, Lima 32

626 2000-anexo 4151

E-mail: [irem@pucp.edu.pe](mailto:irem@pucp.edu.pe)

Dirección URL:

<http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/irem/index.html>

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN: **978-603-45391-0-5**

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú:

N° **2008-11908**

Impreso en el Perú – Printed in Perú

# Presentación

Durante tres días de intensa actividad asistimos a la celebración del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas desarrollado en la Pontificia Universidad Católica del Perú en el mes de febrero del 2008.

Este evento académico, dirigido fundamentalmente a profesores universitarios, de institutos superiores y de educación secundaria, tuvo como principal finalidad brindar a los participantes la oportunidad de ampliar sus conocimientos acerca de la Didáctica de las Matemáticas y de la evolución de esta disciplina.

Se trataron temas relacionados con Las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, Los Entornos Informáticos para el Aprendizaje de las Matemáticas, La Formación de Profesores, Las Actitudes hacia las Matemáticas y la Estadística, El Enfoque Ontosemiótico para la Cognición en Instrucción Matemática y La intuición y Rigor en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas.

En esta oportunidad se presentaron 5 Conferencias Plenarias, 2 Cursos, 8 Talleres, 12 Reportes de Investigación, 8 Socializaciones de Experiencias y una Mesa Redonda. Los Reportes de Investigación fueron sometidos a un proceso de evaluación a cargo del Comité Académico.

Este libro presenta un resumen de las actividades mencionadas y se ha organizado de la siguiente manera:

Presentación

Índice

Artículos en extenso correspondientes a:

- Conferencias Plenarias
- Cursos
- Talleres
- Reportes de Investigación
- Socialización de Experiencias

El Comité Organizador del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas quiere agradecer a todos los participantes que, con su presencia, mostraron su confianza en encontrar en este evento un espacio de calidad para la reflexión sobre su práctica docente; esperamos no haberlos defraudado.

Expresamos un agradecimiento especial para la Pontificia Universidad Católica del Perú que con su apoyo incondicional, a través de sus autoridades, nos brinda las mejores condiciones para poder seguir realizando eventos de esta naturaleza.

El Comité Organizador

## **Convocan:**

- ◀ Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) - Perú
- ◀ Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas – PUCP
- ◀ Grupo de Investigación para la Enseñanza de la Matemática Universitaria (GIEMU) -PUCP

## **Comité Organizador del III Coloquio:**

Presidente

Uldarico Malaspina Jurado

Coordinadora general

Cecilia Gaita Iparraguirre

Coordinadores Académicos

Jorge Bazán Guzmán y Francisco Ugarte Guerra

Coordinadora de Apoyo Logístico:

Norma Rubio Goycochea

Coordinadora de Relaciones Públicas:

Rosa Cardoso Paredes

Coordinador de Finanzas:

Mariano González Ulloa

Miembros:

Emilio Gonzaga Ramírez, Miguel Gonzaga Ramírez y Roy Sánchez Gutiérrez

# Índice General

## CONFERENCIAS PLENARIAS

CP 1	Actitudes hacia la Matemática- Estadística: Una revisión de trabajos <i>Jorge Luis Bazán Guzmán</i>	1
CP 2	Enseñanza de las Matemáticas. Tendencias y perspectivas. <i>Vicenç Font Moll</i>	21
CP 3	Entornos informáticos para el aprendizaje de las Matemáticas. Proyecto TeP-Perú <i>Bertrand Rousset</i>	63
CP 4	Las Matemáticas en el contexto de las Ciencias. <i>Patricia Camarena Gallardo</i>	83
CP 5	Intuición y rigor en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. <i>Uldarico Malaspina Jurado</i>	107

## CURSOS

C 1	Marcos de referencia para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. <i>Cecilia Gaita Iparraguirre</i>	127
C 2	Análisis de las prácticas discursivas del profesorado sobre la contextualización de las funciones. <i>Ana Beatriz Ramos Pereira</i>	141

## TALLERES

T 1	La Geometría vectorial como herramienta para formalizar la noción intuitiva de superficie. <i>Francisco Ugarte Guerra</i>	149
T 2	Geometría dinámica con Tracen Poche. <i>Bertrand Rousset</i>	155
T 3	Análisis didáctico, una mirada desde el enfoque Ontosemiótico. <i>Norma Rubio Goycochea, Vicenç Font Moll y Núria Planas Raig</i>	159
T 4	Visualización de la noción de límite empleando el Cabri II. <i>María del Carmen Bonilla Tumialán y Jacqueline Huanqui Astocóndor</i>	183
T 5	Edición y reutilización de simuladores digitales (Nippe Descartes) en la enseñanza de las Matemáticas. <i>Alberto Mejía Manrique</i>	195
T 6	Enfoque geométrico del análisis en varias variables. <i>Mariano González Ulloa y Roy Sánchez Gutiérrez</i>	233
T 7	La indagación en las clases de matemáticas. <i>Rosa Cardoso Paredes, María Elena González Romero y Alex Molina Sotomayor</i>	251
T 8	Análisis de posibilidades y probabilidad. <i>Augusta Osorio Gonzales</i>	267

## REPORTES DE INVESTIGACIÓN

RI 1	Un análisis didáctico del software Winplot para la enseñanza del concepto función. <i>Enrique Huapaya Gómez</i>	271
------	---	-----

RI 2	Análisis del conocimiento geométrico en estudiantes para profesores de matemáticas. Capacidades y destrezas que lo evidencian <i>Emma Carreño Peña</i>	283
RI 3	La identificación de las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje en los estudiantes para profesores de Matemáticas. <i>Marcos Augusto Zapata Esteves</i>	293
RI 4	Matemáticas realistas con alumnos del primer ciclo de la Universidad San Ignacio de Loyola. <i>Juan Carlos Sandoval Peña</i>	303
RI 5	Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE. <i>Cerapio Quintanilla Córdor</i>	311
RI 6	Funciones reales: una manera de explorar la conversión entre registros, trabajando en la modalidad de aprendizaje colaborativo. <i>José Chiroque Baldera.</i>	321
RI 7	Un acercamiento socioepistemológico a los problemas de optimización en el pre Cálculo. <i>David Esteban Espinoza</i>	327
RI 8	Noción de distribución Estadística en una muestra de estudiantes de secundaria en el marco de la estructura curricular. <i>Wilfredo Huayanca Ramos</i>	333
RI 9	Propuesta didáctica para las funciones sinusoidales en el contexto de los circuitos eléctricos. <i>Juan Accostupa Huamán</i>	339
RI 10	Manipulación simbólica de funciones Bsplines con Mathematica versión 6.0. <i>Andrés Iglesias Prieto, Robert Ipanaqué Chero y Yesenia Saavedra Navarro</i>	345

RI 11	Un estudio de los significados institucionales del objeto función en cuarto y quinto de secundaria de instituciones educativas estatales. <i>Jacqueline Huanqui Astocóndor</i>	353
RI 12	Influencia de la formación profesional y pedagógica de los docentes de matemática en el rendimiento académico de los alumnos de quinto grado de educación secundaria en los colegios públicos de Piura y Castilla. <i>Luis Alvarado Pintado</i>	367

## **SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS**

SE 1	El plano Traza-Determinante de un sistema dinámico lineal $X' = AX + B$ . <i>Armando Blanco Del Rosario, Fabiola Jabo Bereche y Luis Bustamente Donayre.</i>	377
SE 2	Aplicación de la función lineal. <i>Maritza Luna Valenzuela</i>	395
SE 3	Un aprendizaje razonado a partir de la gráfica de inecuaciones. <i>Olimpia Castro Mora</i>	401
SE 4	Elaboración de materiales de enseñanza usando LaTeX. <i>Rubén Agapito Ruiz</i>	409
SE 5	Desarrollo de la idea intuitiva del concepto de límite de una función real. <i>Luis Masgo Lara</i>	413
SE 6	El uso de taps hexagonales para el desarrollo del pensamiento lógico. <i>Iván Rojas Marticorena</i>	427
SE 7	El globo aerostático, un juego tradicional como una excelente estrategia para enseñar matemáticas. <i>Roberto Antonio Salvador</i>	431
SE 8	Entorno informático para la enseñanza de áreas de polígonos. <i>Marisel Beteta Salas</i>	437



# **CONFERENCIAS PLENARIAS**



# **Actitudes hacia la Matemática- Estadística: Una revisión de trabajos**

Jorge Luis Bazán Guzmán  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## **Resumen**

El estudio de las actitudes hacia la matemática ha sido un aspecto de mucha relevancia en la educación escolar y universitaria desde los años 50 del siglo pasado. Entre los Investigadores pioneros se pueden citar a Dutton (1951) y Aiken y Dreger (1961) quienes establecieron la importancia de evaluar las actitudes dada su relación directa con el rendimiento en Matemática. Posteriormente este tipo de preocupación se ha trasladado hacia la Estadística, conforme el interés creciente en la Educación estadística. Así se puede considerar como un trabajo inicial la elaboración de una escala para medir las actitudes hacia la estadística de Roberts y Bilderback (1980) sin embargo de manera excepcional y muy temprana se puede citar el trabajo de Bending y Hughes (1954).

Actualmente como observa Carmona (2004) para el caso de la actitud hacia la estadística, existen diversas escalas desarrolladas para medir las actitudes, las cuales presentan diferentes marcos conceptuales. No obstante, en la mayoría de los casos hay una cierta coincidencia de ubicar las actitudes hacia la matemática o estadística como parte del dominio afectivo de la Matemática (McLeod, 1992, 1994).

En este trabajo se revisan trabajos empíricos conducidos por el autor y colaboradores en los últimos años (Bazán, 1997; Aparicio y Bazán, 1997, Bazán y Sotero, 1998; Bazán, Espinosa y Farro, 2003; Aparicio y Bazán, 2004; Aparicio y Bazán, 2006, Bazán y Aparicio, 2007, Bazán y Malaspina,

2008), en diferentes poblaciones y con diferentes propósitos. El objetivo es mostrar el carácter evolutivo del desarrollo de esta línea de investigación acercándonos a partir de este conjunto de trabajos empírico a una definición de las actitudes hacia la matemática y estadística propuesta recientemente en Bazán y Aparicio, (2007).

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 1 se presentan algunas experiencias empíricas en el estudio de actitudes hacia la matemática y estadística desarrolladas por el autor y colaboradores. En la sección 2 se presenta una reflexión para la actitud hacia la matemática y estadística a partir de la revisión de la literatura acerca de las concepciones predominantes en la afectividad y la actitud. En la sección 3 se presenta una aproximación para el entendimiento de las actitudes dentro de un modelo de aprendizaje. El artículo concluye con comentarios finales.

## **1. Experiencias empíricas en el estudio de actitudes hacia la matemática y estadística**

En esta sección se presentan cuatro estudios empíricos sobre las actitudes hacia la matemática y la estadística hechos con ingresantes universitarios, profesores de escuela y escolares.

### **Una primera experiencia: Actitudes hacia la Matemática en ingresantes universitarios**

En 1995 desarrollamos un estudio de las actitudes hacia las matemáticas universitarias en ingresantes a una universidad. Para ello se elaboró una escala de actitudes hacia la matemática la cual fue aplicada a 256 ingresantes a profesiones agrarias de una universidad pública del Perú, en la primera semana de clases.

Los diferentes resultados del estudio aparecieron en Bazán (1997) Aparicio & Bazán (1997), Bazán y Sotero. (1998). En el primer estudio citado el énfasis fue metodológico, presentándose los principales fundamentos y detalles acerca de la elaboración de la Escala de Actitudes hacia la Matemática universitaria (EAHMU). En el segundo estudio el

énfasis fue psicológico dándose detalles de los principales hallazgos en la actitud y en las comparaciones según diferentes características, como sexo, especialidad y edad del ingresante. Finalmente en el tercer estudio se presentaron los principales resultados y las implicancias educacionales de los mismos.

Aquí la actitud hacia la matemática fue definida como el fenómeno que involucra sentimientos (componente afectivo), creencias (componente cognitivo) y las tendencias de los alumnos a actuar de manera particular, acercándose o alejándose del objeto matemáticas (componente comportamental). En dicha actitud se hallan contenidos varios aspectos que definen dimensiones tales como: dimensión afectividad, que refleja el agrado o desagrado hacia el curso de matemática, dimensión aplicabilidad, que refleja la valoración al curso de matemática, dimensión habilidad, que refleja la confianza en la propia habilidad matemática, dimensión ansiedad que refleja las reacciones comportamentales frente al curso.

Con esto se logró una escala para medir las actitudes hacia la matemática que presentaba una buena confiabilidad, que presentaba validez de constructo y de contenido

Un balance de esta experiencia es que se encontró que los ingresantes universitarios presentaban actitudes desfavorables hacia la matemática, que estas no diferían entre hombres y mujeres ni por especialidades excepto en la dimensión D2 (Aplicabilidad), y que se podrían conformar tres grupos de actitudes conforme la edad. Los muy jóvenes (16 años), con actitudes más negativas, los siguientes (17 a 19 años) con actitudes no negativas y finalmente los mayores (de 20 a más) con actitudes nuevamente negativas.

Aunque este estudio no incluyó una variable de rendimiento en el estudio, se pudo comprobar altas tasas de alumnos desaprobados en el curso de matemática al final del semestre.

### **Una segunda experiencia: Actitudes hacia la Matemática en escolares y su relación con el rendimiento (1998)**

En 1998 se desarrolló un estudio de las actitudes hacia las matemáticas escolares en escolares peruanos y su relación con el rendimiento académico. Para ello se elaboró una

encuesta de indicadores de actitudes. Esta encuesta fue aplicada a 64000 alumnos del sistema escolar peruano entre alumnos de 4to y 6to de primaria y de 4to y 5to de secundaria. Alumnos de escuelas urbanas y rurales, y escuelas públicas y privadas.

Los resultados de dicho estudio aparecen en Bazán, Espinosa y Farro (2002). Entre los indicadores considerados está el Temor-Seguridad, Gusto-desagrado, Nivel de comprensión, percepción de competencia. Estos indicadores llevaron a cuatro perfiles más o menos estables entre los diferentes grados.

En un primer perfil, que podemos denominar de actitud de rechazo o muy negativa por la matemática, se ubicaron los estudiantes que presentaban temor a la Matemática, en un segundo perfil, que podemos denominar de actitud de desagrado o negativa por la matemática, los que perciben a la matemática como difícil, les desagrada y manifiestan un nivel de comprensión medio a bajo), en el tercer perfil, que podemos denominar como de actitud de agrado o positiva por la matemática, se ubican los que se sienten seguros y muestran comprensión alta, y finalmente en un cuarto perfil, que podemos denominar como de actitud de aceptación o muy positiva por la matemática, los que se perciben competentes, les gusta la matemática y manifiestan una alta comprensión.

Sobre la base de dicho perfil claramente se encontraron diferencias en el rendimiento en Matemática para todos los grados. En cada perfil de actitud las diferencias en el rendimiento siempre fueron favorables a los alumnos de escuelas no estatales tanto en primaria como en secundaria pero no se encontraron diferencias de género.

Un resultado del estudio es que los indicadores de actitud no permanecían en los mismos niveles conforme los grados escolares. En general se encontró que las respuestas positivas en los indicadores de actitud como percepción de comprensión positiva, nivel de agrado, percepción de competencia, nivel de seguridad, decrecían del 4to al 6to de

primaria y de estos al 4to y 5to de secundaria en ese orden. Esto indicaría que conforme los grados las actitudes más positivas son menos frecuentes en el ámbito escolar.

Finalmente, un resultado bastante importante es el diferencial en el rendimiento en Matemática según respuestas favorables y respuestas desfavorables en los indicadores de actitud. Así se encuentran diferencias entre 3% y 8% en el puntaje de rendimiento entre quienes presentan una actitud más favorable respecto de aquellos que presentan una actitud desfavorable para los diferentes grados en los cuatro indicadores. Los porcentajes más altos ocurren entre los que tienen percepción de comprensión y competencia más favorable que sus pares con percepción de comprensión y competencia desfavorable (7 % y 6 % en promedio entre los diferentes grados).

### **Una tercera experiencia: Actitudes hacia la Estadística en profesores**

Entre el año 2003 y 2004 se realizó un estudio de la actitud hacia la estadística y su relación con el rendimiento al inicio y al final de un curso, entre profesores de escuelas públicas de Lima y provincias que recibían formación complementaria para optar el título de profesor.

En el estudio se adaptó dos escalas, de Estrada (2002) y Cazorla et al (1999) y participaron hasta 87 profesores que cursaban una asignatura de estadística, en un curso de complementación académica.

Los principales hallazgos de este estudio fueron presentados en Aparicio, Bazán y Abdounur (2004) y Aparicio y Bazán (2006). En general se encontró una mejora significativa de la actitud medida por las dos escalas usadas entre el inicio del curso y el final del mismo. También se encontró una mejor correlación entre la actitud inicial y la nota final del curso mostrando evidencias del carácter predictivo de la actitud. Llama la atención los cambios favorables observados en determinados ítems de actitud y la falta de cambios en otros ítems.

## **Una cuarta experiencia: Actitud hacia la matemática entre ingresantes universitarios**

En el 2007 fue realizado un estudio de las actitudes hacia las matemáticas escolares en ingresantes a una universidad. Para ello se elaboró una encuesta de indicadores de actitudes tomados del estudio de Bazán, Espinosa y Farro (2003) y Bazán (1997). Participaron 340 ingresantes a profesiones de humanidades, ciencias e ingeniería de una universidad privada.

Los resultados que aparecen en Malaspina y Bazán (2008) indican que se encuentran diferencias significativas en tres de los cuatro indicadores de actitud. Así más estudiantes de ciencias muestran indicadores de actitud positivos de percepción de competencia y de agrado hacia la matemática que sus pares de letras, aunque estos últimos son mayoritarios en su percepción de dificultad que sus pares de ciencias.

Donde no se observan diferencias es en el porcentaje de estudiantes con niveles de inseguridad declarados en ambos grupos, que es de 34 % y 31 % para ingresantes a Letras y Ciencias respectivamente.

## **2. Una reflexión a partir de la revisión de la literatura**

Recientemente, en Bazán y Aparicio (2007) y en Aparicio y Bazán (2008) hemos iniciado una reflexión acerca de las actitudes hacia la matemática y estadística considerando que el estudio de las actitudes no solo tiene sentido en la medida en que contribuye a caracterizar mejor o con más amplitud el fenómeno educativo, sino también porque su estudio puede contribuir como un instrumento que caracterice la eficacia del proceso educativo en general. Por ello es necesario estudiar las actitudes dentro de un modelo de aprendizaje.

Parte de esa reflexión será presentada en la siguiente sección. Antes, revisemos las concepciones predominantes acerca de la Afectividad y las actitudes.

### **Concepciones predominantes de la Afectividad**

La afectividad, siempre aparece ligada a la educación y el papel del educador es considerado importante y tiene mucha

relación con cuestiones de la afectividad. Sin embargo no es una tarea fácil tratar de dar una definición y especialmente cuando se habla del aprendizaje de las matemáticas y de las asignaturas de ciencia en general.

Existe una gran divergencia en cuanto a la conceptualización de los fenómenos afectivos. En la literatura se encuentra eventualmente la utilización de los términos afecto, emoción y sentimiento, aparentemente como sinónimos. También, en la mayoría de las veces, el término emoción se encuentra relacionado con el componente biológico del comportamiento humano, refiriéndose a una agitación y/o una reacción de orden física.

Si miramos la psicología observamos que la afectividad ha cumplido diferentes roles en las diversas teorías psicológicas. Así por ejemplo Piaget (1977) considera el desarrollo intelectual como un proceso que comprende un aspecto cognitivo y un aspecto afectivo. Sin embargo se centra más en el aspecto cognitivo. Por otro lado, en la psicogenética de Wallon (1984) la dimensión afectiva ocupa un lugar central, tanto del punto de vista de la construcción de la persona cuanto del conocimiento. La afectividad, en esta perspectiva, no es apenas una de las dimensiones de la persona: ella es también una fase del desarrollo. Finalmente, Vygotsky (1991), propone que el pensamiento tiene su origen en la esfera de la motivación, la cual incluye inclinaciones, necesidades, intereses, impulsos, afecto y emoción. En esta esfera estaría la razón última del pensamiento y, así, una comprensión completa del pensamiento humano solo es posible cuando se comprende su base afectivo-volitiva.

Si nos acercamos a la literatura en Educación Matemática identificamos los sucesivos aportes de *McLeod* (1989, 1992, 1994) el cual define el afecto o dominio afectivo como: “un extenso conjunto de sentimientos y estados de ánimo, que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición”. El considera como descriptores específicos de este dominio, las creencias, las actitudes y las emociones. Donde las emociones están en un lado más afectivo y menos

estable y en el otro extremo se ubican las creencias que son más cognitivas y más estables. Entre ambos descriptores se ubica la actitud.

Aunque esta propuesta es muy importante en la educación matemática y ha sido usada en muchos trabajos, ha sufrido críticas. Por ello en el CERME4 (Congreso de la European Society for Research in Mathematics Education, 2005) el grupo de trabajo en Afecto adoptó el modelo de DeBellis & Goldin (1997) mejorado en DeBellis & Goldin (2006) reproducido abajo.

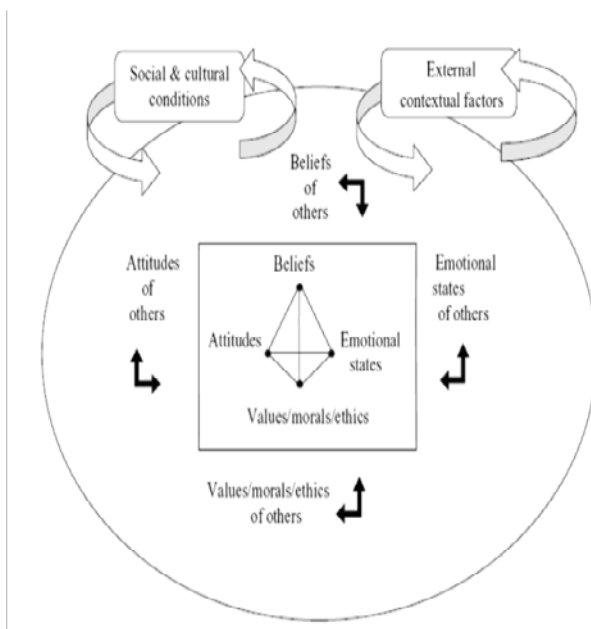


Figura 1. Un modelo tetraédrico para describir el dominio afectivo tomado de DeBellis & Goldin (2006)

Consideramos que la afectividad debe ser abordada con una significación más amplia, refiriéndose a las vivencias de los individuos y a las formas de expresión más compleja y

esencialmente humana y no de orden biológico-energético como se observa en las concepciones de Piaget y Wallon.

También consideramos que existe confusión al ubicar las actitudes como descriptor de la Afectividad como es dado en McLeod y DeBellis & Goldin. Además que estos planteamientos no cubren todo el campo atribuible a la afectividad, motivación, sentimientos, humor, concepciones, interés, ansiedad y opiniones

Nuestra propuesta está más relacionada a la de Vigotsky que reconoció que la afectividad se relaciona con otros sistemas además de la cognición, que es expresada en la sección 3.

### **Concepciones predominantes acerca de las Actitudes**

Como es reportado en la literatura la actitud es un aspecto importante de la educación. Un estudiante, por ejemplo, delante de una situación de aprendizaje tiene una reacción positiva o negativa, de acuerdo con sus creencias acerca de sí mismo y de la asignatura que está cursando. Si la situación se repite muchas veces, produciéndose el mismo tipo de reacción afectiva (frustración, satisfacción, etc), esta reacción puede convertirse en una actitud y esas actitudes generadas influyen en las creencias y contribuyen a su formación.

Algunas definiciones predominantes de la actitud son mostradas a continuación

Auzmendi (1992), considera que las actitudes son *aspectos no directamente observables, compuesto por las creencias, sentimientos y predisposiciones comportamentales en relación al objeto.*

Por otro lado Ruffel et al (1998), indica que las actitudes son *una disposición de responder de manera favorable o no en relación al objeto, persona, institución o acontecimiento.*

También McLeod (1992), indica que las actitudes *son respuestas positivas o negativas, producidas durante el proceso del aprendizaje.* Las actitudes son respuestas relativamente más estables, o sentimientos más intensos que se forman por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo.

Finalmente Gal y Garfield (1997), consideran que las actitudes a la matemática *son una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período del aprendizaje de esta asignatura*- la actitud representa una relación más amplia entre un objeto y un sujeto.

En nuestro caso, cuando nos referimos a la actitud a la Matemática-Estadística, ésta es el objeto. La persona que tiene la actitud es el sujeto.

De las anteriores concepciones podemos percibir algunas cosas en común en relación a las actitudes:

La actitud sería una cierta predisposición del sujeto, o no para algo; una aceptación o no; una cierta manifestación positiva o negativa; una aproximación o alejamiento; un sentimiento favorable o desfavorable. Esto no se ajusta a la definición dada por Gal et al (1997) que considera que las actitudes como “suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período del aprendizaje de la asignatura objeto de estudio” que enfatiza aspectos exclusivamente afectivos y emotivos.

Consideramos que las actitudes siempre se expresan positiva o negativamente y pueden representar sentimientos vinculados externamente a la asignatura (profesor, actividad, libro, etc) pero no se restringen a la afectividad sino que involucran pensamientos, evaluaciones, valoraciones y disposiciones a la acción que hacen parte de otros componentes de la personalidad como veremos después.

Consideramos que esta actitud envuelve diferentes planos o sistemas de la personalidad y no solamente dominios afectivos.

### **3. Una aproximación para el entendimiento de las actitudes dentro de un modelo de aprendizaje**

Para proponer un modelo de aprendizaje donde se ubique las actitudes debemos distinguir el *plano representacional* del *plano procedimental*.

En el *plano de las representaciones* nos referimos a los aspectos estructurales que son predominantemente de entrada así tenemos a las disposiciones afectivas, aptitudes cognitivas y las actitudes conativas y en el *plano procedimental* nos referimos a la actividad que es predominantemente de salida y en el están las emociones, lo productivo y lo volitivo.

Ambos planos según Ortiz (1994) forman los sistemas de la personalidad el sistema afectivo-emotivo, el sistema cognitivo- productivo y el sistema conativo-volitivo.

Según Ortiz (1994) en el **sistema afectivo-emotivo** las clases de información que codifica y procesa este sistema psíquico son los afectos y sentimientos. En el plano de las representaciones, a nivel subconsciente estas clases de información se estructuran en las disposiciones afectivas, y en el plano de los procedimientos se organizan en las emociones de la personalidad.

En el **sistema cognitivo-productivo** los tipos de información que se codifican y procesan son las imágenes y los conceptos, los cuales se estructuran en el plano de las representaciones subconscientes como las aptitudes cognitivas, y en el plano de los procedimientos como las habilidades productivas o creativas de la personalidad.

En el **sistema conativo-volitivo** se codifica y procesa las clases de información que llamamos motivos y valores, los que se estructuran en el plano de las representaciones de nivel subconsciente como las actitudes conativas, y en el plano de los procedimientos como los procesos volitivos de decisión de la personalidad.

El rol de los sistemas de personalidad desde el punto de vista del desarrollo aparece en la figura siguiente:

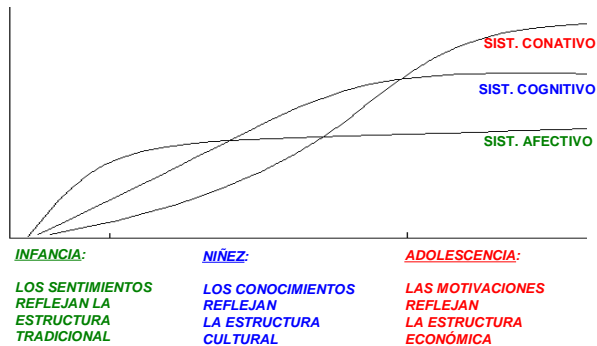


Figura 2. El desarrollo de la Conciencia y la Personalidad refleja la Historia de la Sociedad (Ortiz, 1994 y 1997)

Para entender las actitudes debemos enfatizar el plano representacional antes que el plano procedimental del modelo de Ortiz (1994), considerando que las actitudes son predominantemente disposiciones de evaluación “de entrada” antes que acciones o actividades de “salida” y otro aspecto que es importante diferenciar dentro de nuestra propuesta de un modelo de aprendizaje es la información social de la información psíquica.

En nuestra propuesta estamos más interesados en el entendimiento de los tipos de representaciones con el aprendizaje dentro de un contexto social y no solamente con el entendimiento de la personalidad humana. Para detalles de esta teoría y sus implicancias educativas.

Los aspectos enunciados nos permiten presentar un modelo de aprendizaje donde es posible ubicar las actitudes. Nuestra propuesta es sintetizada en la siguiente figura, presentada en Bazán y Aparicio (2007).

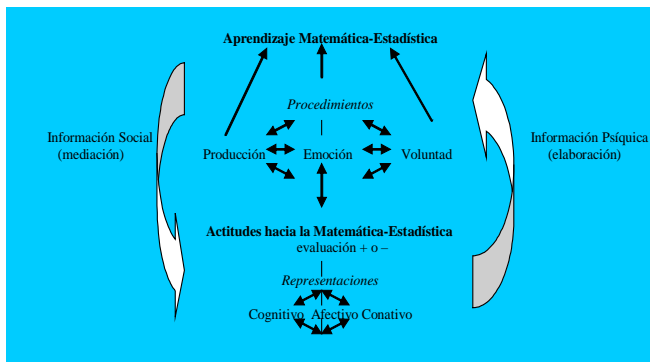


Figura 3. Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje tomado de Bazán y Aparicio (2007)

Desde el punto de vista del Aprendizaje de las Matemática-Estadística, estamos interesados en las expresiones de pensamiento dentro del componente cognitivo. Asimismo por las emociones y sentimientos dentro del componente afectivo y por las actuaciones dentro del componente volitivo.

Para nosotros, la afectividad se constituye en un proceso interno que está situado en el plano representacional y esta representado por las disposiciones afectivas y junto al plano procedimental representado por las emociones de la personalidad dará lugar a un sistema afectivo-emotivo el cual codifica y procesa afectos y sentimientos. Pero existe otro componente importante en la personalidad del individuo que es el componente conativo el cual codifica y procesa las clases de información que llamamos motivos y valores, aquí están situadas las actitudes conativas (Ortiz, 1994).

En este marco las actitudes aunque tienen una fuerte carga afectiva en su representación. Estas serán interiorizadas como positivas o negativas de acuerdo a lo que el sujeto *sienta* (considerando el componente afectivo), *piense*

(considerando el componente cognitivo) e *ideologic* (considerando el componente conativo) sobre el objeto, las cuales de la misma forma serán evaluadas como positivas o negativas.

Estas representaciones determinan los procedimientos del individuo que lo llevan a su accionar o aprendizaje. Así determinados aprendizajes de los individuos pueden ser más probables que otros dependiendo de si este considera procedimientos más productivos, emotivos o volitivos o ciertas “combinaciones” preferentes de estos.

Pero también, en relación a la asignatura de Matemática y Estadística, el alumno o el profesor puede tener manifestaciones o negativas o positivas de acuerdo con sus experiencias y aprendizajes (mediaciones de la información social) y las dificultades tanto en el aprendizaje como en la enseñanza pueden estar relacionadas con las actitudes que tienen (información psíquica).

### **Una definición de actitudes**

Una predisposición del individuo para responder de manera favorable o desfavorable a un determinado objeto (Matemática- Estadística). La actitud es entonces una disposición personal, idiosincrásica, presente en todos los individuos, dirigida a objetos, eventos o personas, que se organiza en el plano de las representaciones considerando los dominios cognitivo, afectivo y conativo. La actitud determina aprendizajes a través de procedimientos productivos, emotivos y volitivos elaborados a través de información psíquica y a su vez estos aprendizajes pueden mediar como información social futura para la estabilidad o no de esta actitud.

### **Comentarios finales**

En este estudio se intenta mostrar un recuento de diversos trabajos empíricos y una reciente reflexión acerca de una definición de las actitudes hacia la matemática y estadística.

Pensamos que a diferencia de la literatura revisada, la propuesta de definición presentada permite una definición integrada de las actitudes dentro de un modelo de aprendizaje que incluyera diferentes planos de la actividad humana.

Los trabajos empíricos han mostrado invariablemente que las actitudes tienen relación con el rendimiento en matemática convirtiéndose en un buen predictor de dicho rendimiento. A pesar de la presencia de otros predictores mucho más importantes en el rendimiento como el nivel socioeconómico consideramos que las actitudes son parte de la labor docente de los profesores. Así, está en las manos del sistema educativo, escolar y universitario la mejora de esas actitudes. Las actitudes hacia la matemática-estadística se muestran menos favorables conforme los grados y la especialización profesional. También notamos que maestros con actitudes difícilmente no positivas no pueden transmitir actitudes positivas a sus alumnos. Sin embargo, los estudios también indican que aún en maestros es posible observar una mejora de las actitudes.

En la definición propuesta arriba para la actitud se ha llevado a la misma más allá de la concepción predominante de la actitud como componente de la Afectividad. Nos preocupa cómo se evidencia cierto rechazo hacia la matemática pero debemos considerar que ese tipo de rechazo no evidencia una actitud. La actitud es más que un aspecto emocional.

Considerando el modelo presentado para la definición de actitudes, podemos afirmar que las manifestaciones psicológicas no están aisladas del contexto social ni de los componentes cognitivo, afectivo y conativo, hay cierta integración destacando más el afectivo, el cognitivo o el conativo según sea el contexto en que se desarrolle. Con ello se tiene un modelo no sólo explicativo acerca de cómo se forman las actitudes sino también de un modelo para el cambio de las actitudes negativas.

Considerando el modelo presentado, también se tiene que el aprendizaje de la Matemática-Estadística, puede verse afectada de manera positiva o negativa de acuerdo a como el alumno sienta (afectivo), piense (cognitivo) o ideologice

(conativo) en relación a la asignatura y a partir de ello forme sus actitudes frente a esta asignatura. Es por ello el rol fundamental del sistema educativo en esta formación de las actitudes.

La integración de los componentes cognitivo, afectivo y conativo respetando la intensidad de cada uno de ellos en las manifestaciones del comportamiento y en los diferentes aspectos de este hará que haya una mayor comprensión del aprendizaje de la Matemática-Estadística.

Tanto la afectividad como la inteligencia son mecanismos de adaptación, que permiten al individuo la construcción de nociones sobre las situaciones, los objetos y las personas, atribuyéndoles atributos, cualidades e valores, pero el afecto es sólo un regulador de la acción, que influencia en las actitudes del individuo siendo un aspecto importante de ella. Pero las actitudes, involucran otros sistemas de la personalidad como son el cognitivo-productivo y el conativo-volitivo y no puede identificarse sólo como un aspecto de la afectividad como erróneamente es presentado en la literatura.

Proponemos finalmente que el ámbito educativo, escolar, formación docente y formación universitaria debe trabajarse un sistema curricular que responda de manera adecuada a esta conceptualización y que la evaluación de los aprendizajes también siga modelos que reconocen los diversos sistemas de la personalidad presentados aquí muy someramente. El aprendizaje como la actitud serán beneficiadas de este reconocimiento.

## Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitaria*. Bilbao, España: Ediciones Mensajero.

Aparicio A. y Bazán J.L (1997) Actitudes hacia las matemáticas en ingresantes a la Universidad Nacional Agraria la Molina. *Más Luz, Revista de Psicología y Pedagogía*. 3(2), 351-380.

<http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/ArticuloMasLuz.pdf>

Aparicio, A. y Bazán, J.L. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 644-650. Clame 2005.  
<http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/ALME19.pdf>

Aparicio, A. y Bazán, J. L. (2008). Aspectos afectivos intervinientes en el aprendizaje de la estadística: las actitudes y sus formas de evaluación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 644-650. Clame 2005.

Aparicio, A., Bazán, J. L., Abdounur, O. (2004). Uma revisão de pesquisas sobre avaliação de atitudes e desempenho em relação à estatística no Peru.VII *Encontro Paulista de Educação Matemática*. Junho 9-12. Faculdade de Educação Universidade de São Paulo.  
[http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes\\_Orais/co0009.doc](http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais/co0009.doc)

Aiken, L. R. & Dreger, R. M. (1961). The effect of attitudes on performance in learning mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 52, 19-24.

Bazán, J.L (1997) *Metodología estadística de construcción de pruebas. Una aplicación al estudio de las actitudes hacia la matemática en la Unalm*. Tesis para optar el título de Ingeniero Estadístico. Universidad Nacional Agraria La Molina.

Bazán, J.L, Sotero, H. (1998) Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la Unalm". *Anales Científicos UNALM*. 36, 60-72.

[http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/1998\\_62.pdf](http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/1998_62.pdf)

Bazán, J. L. y Aparicio, A. (2007). Las actitudes frente a la matemática dentro de un modelo de aprendizaje. *Revista de Educación*. PUCP 15-(28), 7-20.

[http://pergamino.pucp.edu.pe/educacion/files/educacion/actitudes\\_hacia\\_matematica.pdf](http://pergamino.pucp.edu.pe/educacion/files/educacion/actitudes_hacia_matematica.pdf)

Bazán, J.L., Espinosa G. y Farro Ch. (2002) *Rendimiento y actitudes hacia la matemática en el sistema escolar peruano*.

En Rodríguez, J. Vargas, S. (eds.). Análisis de los Resultados y Metodología de las Pruebas Crecer 1998. Documento de trabajo 13. Lima: MECEP-Ministerio de Educación. Pp 55-70. <http://www.minedu.gob.pe/mediciondelocalidad/2003/>

Bending, A. W., y Hughes, J. B. (1954). Student attitude and achievement in a course in introductory statistics. *Journal of Educational Psychology*, 45, 268-276.

Carmona (2004) Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la Estadística. *Statistics Education Research Journal* 3(1), 5-28, <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj>

Cazorla, I., Silva, C., Vendramini, C. & Brito, M. (1999a). *Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Estatística*. Anais da Conferência Internacional: Experiências e perspectivas do ensino de Estatística, desafios para o século XXI, Florianópolis: ABE, versão preliminar.

DeBellis V. A. & Goldin G.A. (1997). The affective domain in mathematical problem solving. In E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21<sup>st</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2), (pp. 209-216). Finland: University of Helsinki, Lahti Research and Training Centre.

DeBellis, V. A., &Goldin, G. A. (2006), Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, to appear.

Dutton, W. A. (1951). Attitudes of prospective teachers toward mathematics. *Elementary School Journal*, 52, 84-90.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Gal, I y Garfield, J. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I.

Gal y J. B. Garfield, J. (Eds.), *The assessment challenge in statistics education*, (pp. 37-51).IOS Press, Voorburg.

Malaspina, U., Bazán J. L. (2008). Enseñanza de la matemática en la secundaria. Un análisis preliminar de las percepciones de ingresantes a la PUCP. *Revista de Educación* (Por aparecer).

McLeod, D.B. (1989). *Beliefs, attitudes and emotion: new views of affect in mathematics education*. En D.B McLeod y V.M Adams (eds) *affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). New York.

McLeod, D.B. (1992). *Research on affect in mathematics education: A reconceptualization*. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan y N.C.T.M

McLeod (1994). Research on affect and mathematics learning. In *JRME: 1970 to the present. Journal for Research in Mathematics Education*.

Ortiz, P. (1994). *El Sistema de la Personalidad*. Lima: ORION S.R.L.

Ortiz, P. (1997). *La formación de la personalidad*. Lima: Dimaso Editores.

Piaget (1977) *Psicología da inteligência*. Rio de Janeiro: Zahar.

Roberts, D. M., y Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.

Ruffell, M, Mason, J., & Allen, B. (1998). Studying attitude in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 35, 1-18.

Vygotsky, L.S. (1991). *A Formação Social da Mente*. 4ª edição. São Paulo: Martins Fontes.

Wallon, H. (1984). *La evolución psicológica del niño*. (Trad. M. Miranda Pacheco). 7ma. edición. Barcelona, Crítica, Grupo editorial Grijalbo.



# Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas<sup>1</sup>

Vicenç Font  
Universitat de Barcelona

## Resumen

En este trabajo se presentan unas breves consideraciones de cómo ve el autor algunas de las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas. Algunas de dichas tendencias son específicas de la enseñanza de las matemáticas, mientras que otras son aplicables también a la enseñanza de otras materias.

El texto está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presenta una tarea de un libro de texto que será utilizada como contexto de reflexión. En el capítulo 2 se reflexiona sobre cuáles son las tendencias en la incorporación de los nuevos contenidos matemáticos. En el capítulo 3 se reflexiona sobre la tendencia actual a la presentación de matemáticas contextualizadas. En el capítulo 4, la reflexión versa sobre la importancia que se da actualmente a la enseñanza de los procesos matemáticos, mientras que en el capítulo siguiente se comenta la tendencia, de tipo metodológico, hacia una enseñanza-aprendizaje de tipo constructivista. En el capítulo 6 la reflexión es sobre la tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs), mientras que en el siguiente se reflexiona sobre la superación de una cierta “ingenuidad” sobre la incorporación de dichas tecnologías a los procesos de instrucción. En el capítulo 8, la reflexión es sobre la tendencia a considerar que Saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extra-matemáticos. En el capítulo 9 se reflexiona sobre la tendencia

---

<sup>1</sup> Texto de la conferencia inaugural del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Lima. Febrero del 2008.

a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria. En el capítulo 10 la reflexión versa sobre las tendencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de los niveles no universitarios. Por último, en el capítulo 11 se finaliza con una reflexión sobre una posible agenda de investigación sobre algunas de las tendencias comentadas anteriormente.

## 1. Los diagramas de Voronoi como contexto de reflexión

Como contexto de reflexión utilizaremos la siguiente tarea del libro *Geometry with applications and proofs* (Goddijn, A., Kindt, M & Reuter, W., 2004, p. I-5) publicado por el Instituto Freudenthal.

### 1. *En el desierto.*

*En la figura de abajo, se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas esta mapa contigo.*

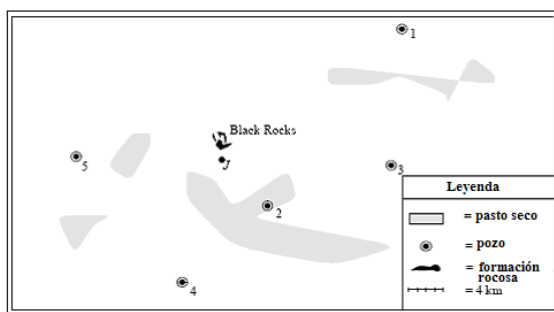


Figura 1. Mapa del desierto

a. *¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?*

*No es difícil responder, por supuesto irías al pozo más cercano.*

- b. *Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.*
  
- c. *Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos.*
  
- d. *¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios?*
  
- e. *¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0: trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos.*
  
- f. *En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)?*
  
- g. *La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras?*
  
- h. *¿Qué clase de líneas son las fronteras? ¿Rectas o curvas?*

*En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del vecino más próximo. Hoy en día, particiones similares son usadas en ciencias, por*

*ejemplo, en geología, forestal, control de comercialización, astronomía, robótica, lingüística, cristalografía, meteorología, por nombrar algunos. A continuación estudiaremos el simple caso de dos pozos, o realmente dos puntos, puesto que no trataremos con pozos en otras aplicaciones.*

## **2. Primera reflexión: ¿Cuál es la tendencia de los nuevos contenidos matemáticos?**

El objetivo de los autores del libro *Geometry with applications and proofs* es que, como resultado de la tarea anterior y de las siguientes, los alumnos construyan el objeto matemático “Diagrama de Voronoi”.

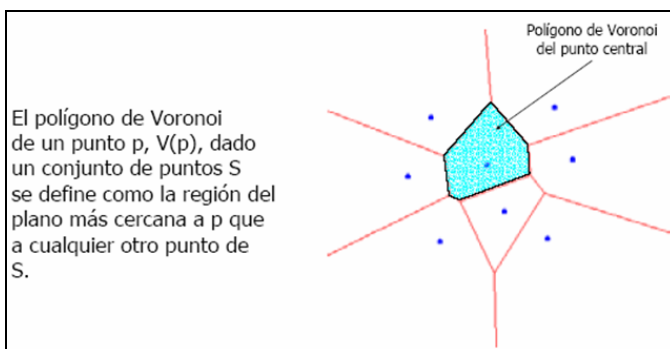


Figura 2. Polígono de Voronoi

## Diagrama de Voronoi

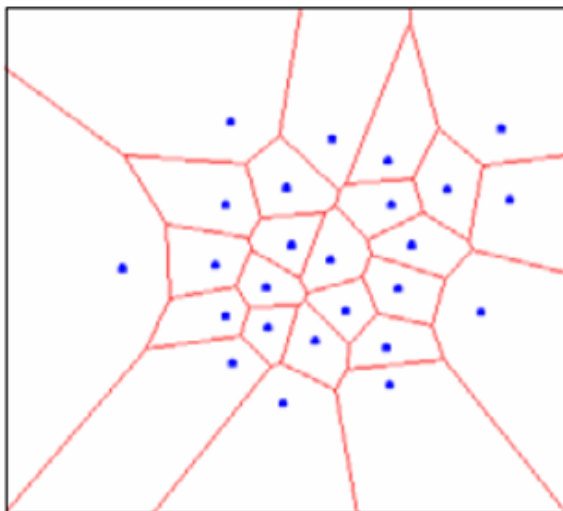


Figura 3. Diagrama de Voronoi

Los diagramas de Voronoi son contenidos correspondientes a la llamada Geometría Discreta. Los autores del libro que estamos comentando se propusieron como objetivo la introducción de contenidos de Matemática Discreta en el currículum de la enseñanza no universitaria.

Tal como se señala en Guzmán (2007), los algoritmos discretos usados en las ciencias de la computación y la modelización de diversos fenómenos mediante el ordenador, ha dado lugar a un traslado de énfasis en la matemática actual hacia la matemática discreta, lo cual ha tenido como consecuencia que se escuchen voces proponiendo su incorporación a los currículums de matemáticas. Incluso se considera que determinadas partes de la Matemática Discreta son lo suficientemente elementales como para poder formar parte con éxito de la enseñanza no universitaria. La combinatoria clásica, así como los aspectos modernos de ella,

tales como la teoría de grafos o la geometría combinatoria, junto a la teoría elemental de números se consideran los candidatos más adecuados.

Otra tendencia observable es la de dar más importancia a los contenidos de Geometría. La necesidad de una recuperación de los contenidos geométricos en la enseñanza matemática es algo en lo que todos los interesados en la enseñanza de las matemáticas parecen coincidir, sin embargo, aún no hay acuerdo sobre cómo se debe llevar a cabo.

También se observa la tendencia al aumento de los contenidos de estadística y probabilidad. Esta es una tendencia en la que todos los sistemas educativos parecen concordar y efectivamente son muchos los países que incluyen en sus programas de enseñanza secundaria estas materias, pero en pocos de ellos esta enseñanza se lleva a cabo con la eficacia deseada. Las causas de esta deficiente enseñanza de la Estadística y la Probabilidad parecen ser, por una parte, la dificultad misma de las materias en cuestión y, por otra parte, una falta de preparación adecuada de los profesores que han de impartir estas materias.

### **3. Segunda reflexión: Tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas**

La tarea del desierto que se presenta a los alumnos es una situación de tipo extra matemático cuya resolución permite la emergencia, entre otros, de un nuevo objeto matemático: la partición de un área de acuerdo al principio del vecino más próximo. Los autores pretenden presentar una situación de contexto extra matemático que sea entendida por el alumno como un caso particular de un objeto matemático. En este caso lo particular es extra matemático y lo general es un objeto matemático.

El libro que estamos comentado es un ejemplo de un tipo de libros que dan un papel preponderante a las situaciones problemas contextualizadas y están claramente enfocados a la emergencia de nuevos objetos matemáticos. Actualmente se observa una tendencia a la sustitución de las matemáticas

formalistas por unas matemáticas más empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.). Estas matemáticas empíricas (contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.) presuponen una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales.

¿Por qué hay esta tendencia a la introducción de matemáticas contextualizadas? Las razones que se pueden dar son muchas y muy variadas. Nos limitaremos a dar dos (Font, 2007). La primera tiene que ver con un interés de tipo teórico que va mucho más allá de la Didáctica de la Matemática, mientras que la segunda tiene que ver con las investigaciones realizadas en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas.

La primera razón está relacionada con la importancia que se le da al contexto en los intentos para relacionar lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden con lo que, por su parte, han aprendido los antropólogos sobre la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado. En palabras del antropólogo Geertz, este intento de relación “(...) supone el abandono de la idea de que el cerebro del *Homo sapiens* es capaz de funcionar autónomamente, que puede operar con efectividad, o que puede operar sin más, como un sistema conducido endógenamente y que funciona con independencia del contexto.” (Geertz, 2002, p. 194).

La segunda tiene que ver con el hecho de que la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha resaltado la importancia que se debe dar a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real.

Para las situaciones extra matemáticas que contextualizan un objeto matemático se han propuesto diferentes nombres y

clasificaciones. “Problemas contextualizados” (el nombre que vamos a utilizar en este trabajo), “problemas del mundo real” “problemas relacionados con el trabajo”, “problemas situados” son sólo algunos de los diferentes nombres que se da a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real.

La investigación sobre los problemas contextualizados extra matemáticos se ha realizado atendiendo a diferentes objetivos y metodologías (conocimiento situado, etnomatemáticas, teoría de la actividad, etc.). Por una parte, hay que destacar las investigaciones cuyo objetivo ha sido comprender mejor cómo las personas solucionan los problemas en su lugar de trabajo. Estas investigaciones, de tipo socio-cultural, no se han preocupado directamente por comparar la resolución de problemas en el lugar de trabajo con la resolución de problemas contextualizados en las instituciones escolares (Scribner, 1984 y 1986; Lave, 1988; Pozzi, Noss y Hoyles, 1998). En cambio, otras investigaciones se han interesado en comparar y contrastar el diferente uso que hacen las personas de las matemáticas en la escuela y en el trabajo (Reed y Lave, 1981; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Jurdak y Shahin, 1999 y 2001; Jurdak, 2006, Díez 2004).

Estas investigaciones muestran, con ejemplos concretos, que hay una brecha importante entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que las personas hacen servir en su vida cotidiana. Para Díez (2004) la existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las matemáticas (D’Amore y Fandiño Pinilla, 2001).

En general, los estudios citados anteriormente han puesto de manifiesto que las matemáticas informales e idiosincrásicas son las dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en el mundo laboral, mientras que las matemáticas más formales son las que predominan en la escuela. Algunos de estos estudios han puesto de manifiesto que las personas que fracasan en situaciones matemáticas escolares, pueden ser extraordinariamente competentes en actividades de la vida diaria que implican el uso del mismo

contenido matemático (Lave, 1988 y Scribner, 1984). En situaciones de la vida real en las que las personas se sienten implicadas se ha observado que éstas utilizan matemáticas "propias" que pueden ser muy diferentes a las que estudiaron en la escuela. En estas situaciones el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitivamente, emocional y socialmente.

Estos fenómenos ponen de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales. En la vida diaria los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver. También plantean un problema teórico para la investigación en Didáctica de las Matemáticas: la transferencia del conocimiento usado o generado en un contexto a otro contexto diferente y más en concreto, el problema de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a las situaciones prácticas de la vida cotidiana y viceversa (Civil, 1992; Evans, 1998; González, Andrade y Carson, 2001; Díez, 2004).

Las referencias citadas anteriormente no pretenden ser una revisión exhaustiva de la literatura sobre la contextualización. En este trabajo nos interesan, sobre todo, destacar algunas investigaciones, como por ejemplo, las que se han preocupado por la introducción de los problemas contextualizados en el currículum. Entre éstas destaca el proyecto desarrollado en el instituto Freudenthal "Realistic Mathematics Education" (Gravemeijer, 1994; De Lange, 1996). Este enfoque de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas concibe la actividad matemática como una actividad humana más, por lo cual se considera que "saber matemáticas" es "hacer matemáticas", lo cual comporta, entre otros aspectos, la resolución de problemas de la vida cotidiana. Uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983). Otros principios importantes son que hay que dar al estudiante la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos y que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe

ser muy interactivo. Según De Lange (1996), básicamente se dan cuatro razones para integrar los problemas contextualizados en el currículum: a) facilitan el aprendizaje de las matemáticas, b) desarrollan las competencias de los ciudadanos, c) desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas y d) permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana.

Para finalizar esta breve revisión, queremos destacar también las evaluaciones internacionales sobre la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana como el informe Pisa 2003 (OCDE, 2004).

#### **4. Tercera reflexión: Tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos**

Una de las tendencias actuales es la importancia que se da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática. Ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos. Actualmente se considera que las matemáticas son una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello, se concede una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en especial a los megaprosesos “Resolución de Problemas” y “Modelización”.

La tarea del desierto que estamos considerando es la primera actividad de una secuencia de actividades que pretende enseñar el proceso de modelización. Normalmente se considera que el proceso de modelización sigue las cinco fases siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

El proceso de modelización o de matematización también se puede entender como el resultado de otros dos procesos: la matematización *horizontal* y la matematización *vertical* (Treffer, 1978; citado en Freudenthal, 1991). La *matematización horizontal*, lleva del mundo real al mundo de los símbolos y hace posible el tratar matemáticamente un conjunto de problemas. En

este proceso se combinan, entre otros, los siguientes procesos: 1) *identificar* las matemáticas en situaciones problemas, 2) *esquematizar*, 3) *formular* y *visualizar* un problema de varias maneras. 4) *descubrir* relaciones y regularidades. 5) *reconocer* aspectos isomorfos en diferentes problemas. 6) *transferir* un problema real a un modelo matemático conocido.

La *matematización vertical*, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, y para ello son necesarios, entre otros, los siguientes procesos: 1) *representar* una relación mediante una fórmula, 2) *utilizar* diferentes modelos, 3) *refinar* y *ajustar* modelos, 4) *combinar* e *integrar* modelos, 5) *probar* regularidades, 6) *formular* un concepto matemático nuevo. 7) *generalizar*, etc.

En estos momentos se puede decir que la comunidad que se dedica a la educación matemática es consciente que los procesos matemáticos son densos en la actividad matemática y que el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene que tenerlos en cuenta. Basta fijarse en la tarea del desierto para observar la cantidad de procesos que son activados en su resolución.

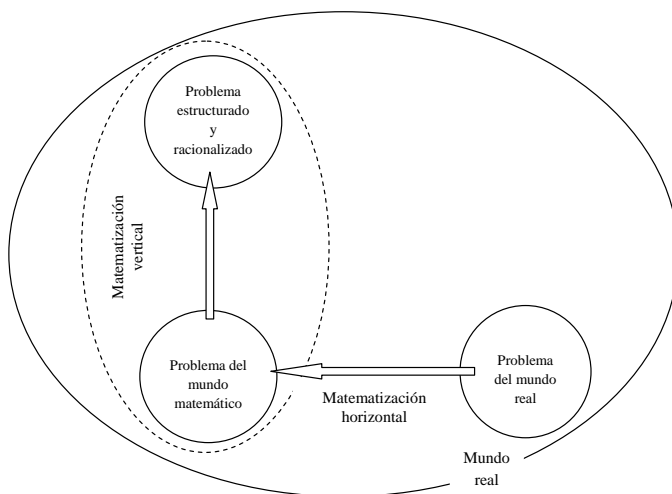


Figura 4. Proceso de Matemización

El análisis detallado de la actividad necesaria para resolver la tarea del desierto muestra que se ponen en juego muchos procesos que no detallaremos aquí por cuestiones de espacio. Nos limitaremos a hacer observar (Font y Contreras, 2008) que en el comentario final los autores primero generan un proceso encubierto de idealización (el desierto se convierte en un área) y después establecen la relación particular general entre la situación idealizada y el objeto matemático “*En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del vecino más próximo*”. La manera de presentar lo general al alumno es el resultado de una abstracción aditiva, puesto que consiste en la reunión en un mismo conjunto de diversos elementos “*Hoy en día, particiones similares son usadas en ciencias, por ejemplo, en geología, forestal, control de comercialización, astronomía, robótica, lingüística, cristalografía, meteorología, por nombrar algunos*”. A continuación se realiza un proceso de particularización cuando se anuncia que se va a tratar a continuación el caso de dos pozos “*A continuación estudiaremos el simple caso de dos pozos*” y uno de idealización explícito cuando los dos pozos se convierten en puntos “*(...) o realmente dos puntos, puesto que no trataremos con pozos en otras aplicaciones.*”

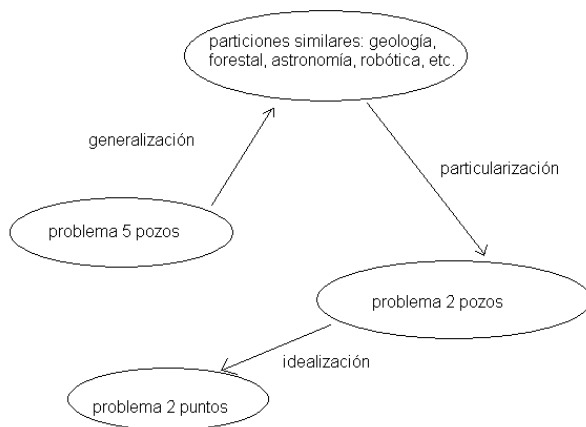


Figura 5. Procesos de generalización, particularización e idealización

## **5. Cuarta reflexión: Tendencia hacia una enseñanza-aprendizaje de tipo activo (constructivista).**

Actualmente podemos observar una tendencia hacia una enseñanza-aprendizaje de tipo activo (constructivista). Más en general, hay una tendencia a tener en cuenta ciertos aspectos psicopedagógicos. Si nos fijamos en el texto de la tarea que estamos analizando, vemos que éste está dividido, explícitamente, en dos partes: 1) El enunciado del problema y 2) el comentario que sigue a continuación. El enunciado del problema pretende generar un *proceso de personalización* (en el sentido de que el alumno construya, entre otros aspectos, el objeto matemático “partición de un área de acuerdo al principio del vecino más próximo”). En cambio, el comentario posterior pretende “*institucionalizar*” este objeto matemático, en el sentido de que sea algo conocido por toda la clase, es decir pasa a “existir” en el aula como objeto matemático (Font, Rubio y Contreras, 2008).

Actualmente hay una tendencia a aceptar que el aprendizaje no es una simple reproducción del contenido que se ha de aprender, sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que las aportaciones de los alumnos juegan un papel decisivo. Este punto de vista sobre el aprendizaje conlleva la tendencia hacia una enseñanza en la que el papel del profesor es más complejo, ya que, además de favorecer en sus alumnos la construcción de significados, tiene que orientarla en la dirección que marcan los contenidos del aprendizaje.

Aceptar que la enseñanza está mediatizada por la actividad constructiva de los alumnos obliga a sustituir la imagen clásica del profesor como transmisor de conocimientos por la imagen del profesor como orientador o guía. Pero, aceptar que los contenidos que han de construir los alumnos son el resultado de una elaboración social, obliga también a matizar la imagen del profesor-orientador y aceptar que también tiene como misión conectar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados.

Sin ánimo de ser exhaustivo se puede decir que, las ideas básicas de tipo psicopedagógico que se tiende a tener presente en los procesos de instrucción son las siguientes:

- 1) Tener en cuenta los niveles de desarrollo evolutivo de los alumnos,
- 2) Procurar un aprendizaje activo y significativo,
- 3) Ser consciente de la importancia que los conocimientos previos del alumno tienen con respecto al éxito de cualquier actividad de enseñanza/aprendizaje que vayamos a realizar.
- 4) Valorar la importancia que tienen los aspectos afectivos sobre el aprendizaje.
- 5) Tener en cuenta las diferentes explicaciones que dan las diferentes teorías psicopedagógicas a las dificultades que tienen los alumnos para aprender matemáticas.
- 6) Saber que lo que un alumno es capaz de aprender por sí mismo, viene determinado por su nivel de desarrollo evolutivo y por sus conocimientos previos, pero esta capacidad de aprendizaje hay que diferenciarla de la capacidad de aprender con la ayuda y el estímulo de otras personas (no sólo los profesores, también los amigos, padres, compañeros, etc.). La diferencia entre estos dos niveles de capacidad es lo que Vygostsky llama la zona de desarrollo próximo. Así pues, la enseñanza más eficaz es aquella que parte del desarrollo efectivo del alumno no para amoldarse a él, sino para hacerlo progresar a través de la zona de desarrollo próximo, y de esa manera generar nuevas zonas de desarrollo próximo.

#### **6. Quinta reflexión: Tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)**

El libro del cual estamos comentando la primera actividad incorpora también actividades con ordenador. Es un ejemplo más de una tendencia, que se observa a nivel general, a la

incorporación de las TICs en la enseñanza de las matemáticas. Ahora bien, la incorporación de herramientas tecnológicas afecta tanto a los nuevos contenidos matemáticos como a los que siempre han formado parte del currículum.

Un buen ejemplo de cómo la incorporación de las nuevas tecnologías ha modificado la enseñanza de los contenidos clásicos es el Cálculo Diferencial. La principal tendencia en los últimos años ha sido la de incluir simultáneamente en la enseñanza del Cálculo Diferencial tres dimensiones: gráfica, numérica y analítica. La dimensión predominante durante décadas fue la analítica, ahora se busca no dejar de lado las otras. Se pretende poner el acento en la comprensión e interpretación de lo que se está haciendo y dar menos importancia a las técnicas de cálculo que las nuevas tecnologías permiten realizar con mucha mayor rapidez y seguridad

Con la incorporación de los graficadores la representación gráfica de las funciones pasa a tener un papel más relevante y, en algunos casos, puede llegar a sustituir a la expresión simbólica. Un ejemplo ilustrativo es la tarea, diseñada para alumnos de Bachillerato que sigue a continuación. Su objetivo es utilizar las posibilidades de los programas de representación de funciones para llegar a una conjetura sobre cuál es la derivada de la función seno obviando el cálculo de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \text{ debido a su dificultad.}$$

*Actividad:* Con el graficador “Funcions i gràfics” representa la función  $\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$  y la función coseno. La pantalla tiene que quedar como la siguiente para el valor  $h = 5$ :

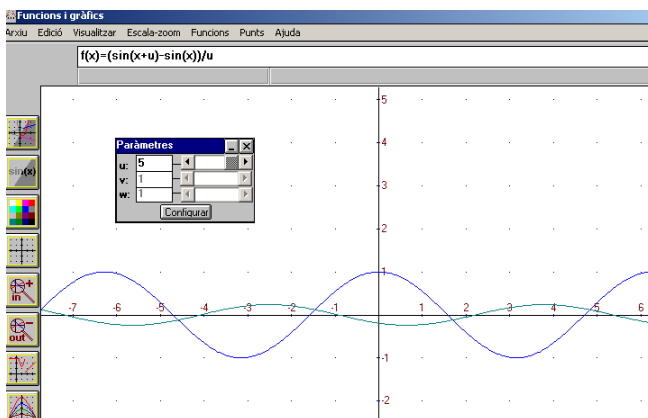


Figura 6. Grficador “Funcions i gràfics”

¿Qué puedes decir de la función  $\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$  cuando  $h$  se acerca a cero? ¿Qué puedes decir con relación al  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$ ? ¿Cuál es la derivada de la función seno?

En este caso, para calcular la derivada de la función seno se trataría de seguir el esquema siguiente (Font, 2005a):

Expresión simbólica de  $f(x) \pm$  Gráfica de  $f'(x)$   $\Psi$   
 Expresión simbólica de  $f'(x)$

Una manera de obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de  $f(x)$  consiste en utilizar un grficador para representar la función  $p f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  (función gradiente o función pendiente de la función  $f(x)$  según un incremento  $h$ ) con  $h$  suficientemente pequeño. Al ser  $h$  muy pequeño, la gráfica que dibuja el grficador se puede considerar que es la de la función derivada. El alumno ha de reconocer que la

gráfica que ha obtenido es la de la función coseno y recordar su fórmula. Este último paso supone que el alumno es capaz de reconocer la gráfica de la función coseno que tiene en la pantalla del ordenador.

El uso de esta técnica permite prescindir del siguiente cálculo de la derivada de la función seno y de la demostración previa de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{seno } h}{h} = 1 :$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \text{sen} \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x \end{aligned}$$

Además, tiene la ventaja de que permite reducir la unidad de trigonometría que se imparte antes de empezar la derivada, ya que no será necesario ampliarla para que incorpore las propiedades que permiten convertir la diferencia de senos en un producto.

## 7. Sexta reflexión: Superación de una cierta ingenuidad con relación a las bondades de la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

A continuación sigue un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada (Font, en prensa). Su objetivo es el cálculo de la derivada de la función exponencial  $f(x) = e^x$  sin usar la definición por límites. Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la

función  $f(x) = e^x$  en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes. En concreto, les permitió observar que, para la función exponencial de base  $e$ , la longitud de la subtangente siempre es 1.

El software puede ser diverso, desde un programa clásico como el “Calcula”, o bien un programa gratuito de muy fácil manejo que permite representar funciones con parámetros como “Funcions i gràfics” o bien applets específicamente diseñados.

### Programa “Funcions i gràfics”

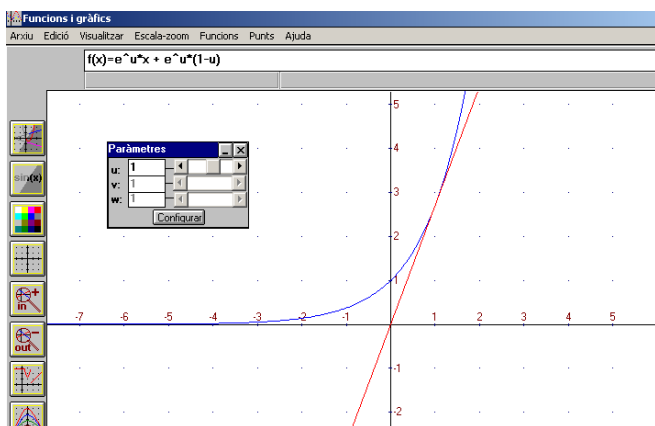


Figura 7. La función exponencial de base  $e$  en el graficador “Funcions i gràfics”

## Applets<sup>2</sup>

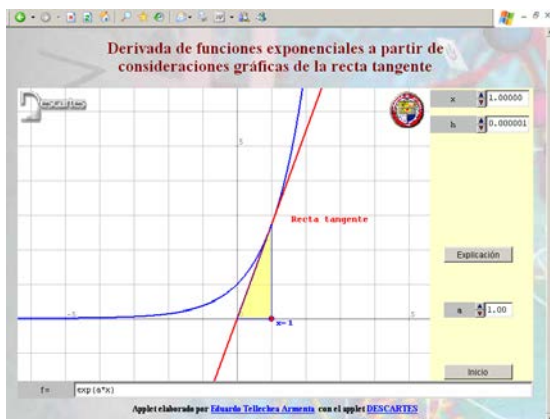


Figura 8. La función exponencial de base  $e$  en un applet “Descartes”

### Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función  $f(x) = e^x$  cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

- a) Calcula  $f'(0)$ ,  $f'(1)$  y  $f'(2)$

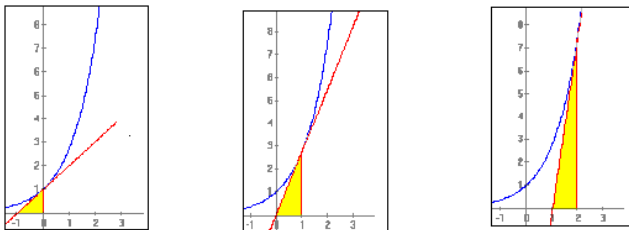


Figura 9. Tangentes a  $f(x) = e^x$  en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$

<sup>2</sup> Applet elaborado por [Eduardo Tellechea Armenta](http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Dcartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm) con el applet [DESCARTES](http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Dcartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm). Recuperable en:

<http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Dcartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm>

b) Calcula  $f'(a)$

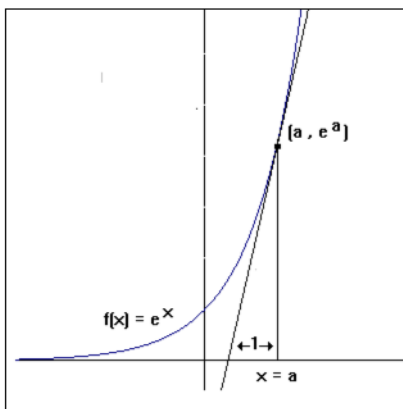


Figura 10. Tangentes a  $f(x) = e^x$  en  $x = a$

c) Demuestra que la función derivada de la función  $f(x) = e^x$  es la función  $f'(x) = e^x$ .

Para calcular la derivada de la función  $f(x) = e^x$  los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en  $x = a$ . Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

Esta técnica relaciona las siguientes representaciones:

Gráfica de  $f(x)$  y Expresión simbólica de  $f(x) \Rightarrow$   
Expresión simbólica de  $f'(x)$

El punto de partida para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de  $f(x)$ . La expresión simbólica de  $f(x)$  es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de  $f'(x)$ . Esta técnica sólo es posible si se introduce la representación gráfica y la simbólica conjuntamente de la función exponencial de base  $e$  ya que si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posibles.

El cálculo de la derivada de la función exponencial de base  $e$ , en el cuestionario que estamos considerando, está a mitad de camino entre lo que se conoce históricamente como el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función—. Este método fue sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow. Esta técnica tiene un campo de aplicación limitado, pero se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta y a las funciones exponenciales y logarítmicas.

Llegados a este punto podemos caer en la “ingenuidad” de que en esta tarea en la que se usan las TIC todo son ventajas. Por ejemplo, se puede argumentar que es una actividad que permite que los alumnos descubran propiedades (todas las subtangentes tienen una longitud igual a 1) y que la emergencia de esta propiedad es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción “reflexiva” (en términos de Piaget). En efecto, se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Ahora

bien, hay que ser conscientes de que el uso de este software dinámico, además de permitir la generalización que se pretende, produce otros efectos, uno de los más importantes es que estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003). Dicho de otra manera, al utilizar los graficadores dinámicos estamos conectados con esquemas muy básicos que se forman en las primeras edades de las personas, y esta conexión produce un determinado "tipo" de comprensión de las gráficas del cual muchas veces los profesores no son conscientes.

El uso de graficadores dinámicos que conllevan metáforas dinámicas tiene sus ventajas (por ejemplo, en este caso permite la abstracción reflexiva), pero también sus inconvenientes ya que, entre otros, pueden generar procesos metafóricos no controlados como se muestra en la investigación explicada en Font (1999). En dicha investigación se describe una situación de enseñanza-aprendizaje en la que alumnos de 17 años utilizan software dinámico con el objetivo de ayudarles a entender que la recta tangente es la recta a la cual se aproximan las rectas secantes.

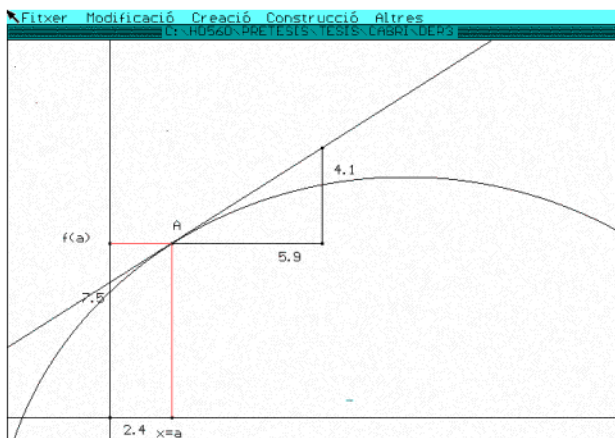


Figura 11. Aproximación de las secantes a la tangente con el programa Cabri

En este contexto, (Font, 1999, pág. 122) se observó que el hecho de que el profesor utilizara de manera inconsciente un discurso dinámico producía la siguiente dificultad en los alumnos:

*(...) observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación."*

Este fenómeno también está documentado en otras investigaciones, por ejemplo en Bolite Frant et altres (2004).

Las metáforas dinámicas se pueden rastrear en la historia de las matemáticas ya que fueron las dominantes en el período anterior a la aritmetización del análisis. Por ejemplo, Newton en el siguiente párrafo se posiciona a favor de las metáforas dinámicas y en contra de las estáticas (formadas por partes):

*No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por un flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué un*

*método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas.* (extraído de Lacasta y Pascual, 1998, pp. 28-29),

Hay que tener en cuenta que Leibnitz, a diferencia de Newton, consideraba la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve. Para Newton, las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton, en la cual podemos hallar constantes referencias a un punto que es mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. Además de considerar que la grafica se puede interpretar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica, considera que el punto que genera la gráfica viene determinado por dos segmentos (abscisa y ordenada), cada un de los cuales es generado por un punto que se mueve en función del tiempo.

El uso de determinados graficadores informáticos y de calculadoras gráficas facilita la recuperación, aunque sea de forma inconsciente, de las metáforas dinámicas del tipo “La gráfica es un camino”. Se trata de una metáfora de tipo grounding<sup>3</sup> cuyo dominio de partida es el esquema de imagen

---

<sup>3</sup> Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales: 1) “Conectadas a tierra” (grounding): Son las que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas. Por ejemplo: “Las clases son contenedores”, “los puntos son objetos”, “una función es una máquina”, etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las clases) a partir de lo que

“camino”. Este esquema de imagen, según Acevedo (2008) es subsidiario del esquema orientacional egocéntrico y se genera en las primeras edades:



Figura 12. Esquema de imagen “camino”

sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores) y 2) De enlace (linking): Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, “los números reales son los puntos de una recta”, las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas”, etc. Las metáforas de enlace proyectan un campo de conocimientos matemáticos sobre otro distinto.

La metáfora conceptual<sup>4</sup> “La gráfica es un camino” permite la proyección del esquema de imágenes “camino” sobre las gráficas. Dicha proyección se puede ilustrar por medio de la siguiente figura (Font, Acevedo, Castells y Bolite, 2008):

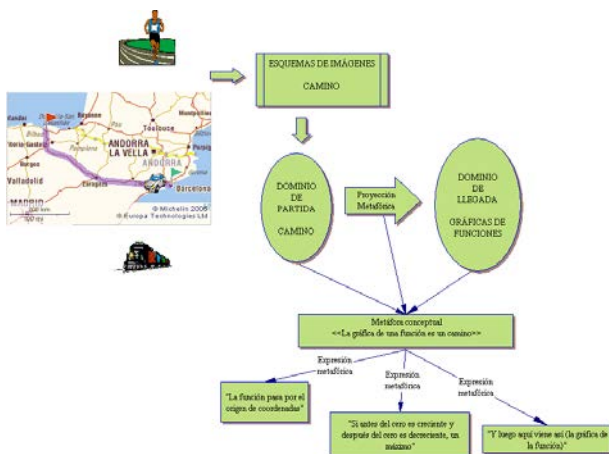


Figura 13. Proyección metafórica del esquema “camino”

<sup>4</sup> La distinción entre *expresiones metafóricas* y *metáforas conceptuales* sirve para establecer generalizaciones que de otro modo quedarían ocultas. Las *metáforas conceptuales* permiten agrupar expresiones metafóricas. Una *expresión metafórica*, en cambio, es un caso individual de una metáfora conceptual. Por ejemplo, la metáfora conceptual “La gráfica de una función es un camino” agrupa, entre otras, expresiones metafóricas como “la función pasa por el origen de coordenadas” o “Y luego aquí viene así (la gráfica de la función)”, etc.

*Metáfora dinámica: “La gráfica es un camino”*

Dominio de partida <b>Esquema del camino</b>	Dominio de llegada <b>Gráficas de funciones</b>
Camino	Gráfica
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla 1. Proyección metafórica del esquema camino

Una variante de esta metáfora conceptual es “La gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones”. La diferencia con la anterior es que, en este caso, el camino no está dado previamente, sino que es la traza que resulta del movimiento del punto. Esta última se pone en funcionamiento cuando se traza la gráfica de una función, mientras que en la primera la gráfica ya está dada previamente.

**8. Séptima reflexión: Tendencia a considerar que saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extra-matemáticos**

Actualmente hay una tendencia a considerar que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Esta tendencia también tiene que ver con la importancia que se da, en los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo, a la

competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real (p.e. el estudio Pisa 2003). En dicho informe se consideran las siguientes competencias:

- *Pensar y razonar.* Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas ... hay?”, “¿Cómo encontrar ...?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- *Argumentar.* Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
- *Comunicar.* Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
- *Modelar.* Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
- *Plantear y resolver problemas.* Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
- *Representar.* Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de

representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.

- *Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.* Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- *Utilizar ayudas y herramientas.* Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las imitaciones de estas ayudas y herramientas.

## **9. Octava reflexión: Tendencia a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria.**

Los diferentes países tienen tendencia a aumentar la edad en la que finaliza la enseñanza obligatoria (p. e. en España ahora es 16 años). Este aumento de la etapa de enseñanza obligatoria conlleva (1) que el sistema educativo tarda más a seleccionar al alumnado y (2) la diversidad propia de una etapa obligatoria está presente en edades en las que antes los grupos de alumnos eran más homogéneos. Por otra parte, el proceso de globalización en el que estamos inmersos produce, en muchos países, un aumento de la diversidad cultural. Hay, pues, una tendencia a aumentar tanto la diversidad en el ritmo de aprendizaje como la diversidad cultural. Esta *diversidad* es la causa de un cierto desconcierto en los profesores de la enseñanza obligatoria ante los problemas que tienen para explicar matemáticas en esta etapa

Ante esta diversidad, hay una tendencia a buscar la equidad en la educación matemática. Hay cierto acuerdo en que los programas de instrucción matemática deben alcanzar a todos

los estudiantes cualquiera que sea el género, lengua, grupo étnico o sus diversas capacidades. Se considera que cada estudiante tiene derecho al acceso a ideas matemáticas relevantes, a pensar de manera efectiva con estas ideas, y a aplicar sus conocimientos matemáticos más allá de los muros de la clase. Para ello es necesario que los estudiantes vean la relevancia y utilidad de las matemáticas relacionando su estudio en la escuela con el mundo exterior y empleando estrategias de enseñanza que comprometan a los estudiantes, les planteen desafíos matemáticos y mostrándoles aprecio a sus propias ideas matemáticas.

De acuerdo con este principio de equidad hay un interés en conocer las dificultades que tienen las personas que aprenden matemáticas en situaciones de conflicto cultural, es decir, en las situaciones donde la cultura propia difiere marcadamente de la cultura de la escuela. Por ejemplo, poblaciones indígenas que se hallan en situación minoritaria o bien, como es el caso de los inmigrantes recientes en sociedades occidentales europeas.

Para conseguir esta equidad hay que presentar a los alumnos tareas matemáticas que, por una parte, permitan una actividad matemática rica y, por otra parte, permitan la inclusión de todos los alumnos. Se trata de conseguir la inclusión y no la exclusión de los alumnos con más dificultades sin renunciar por ello a presentar tareas que sean relevantes desde el punto de vista matemático. El objetivo no es fácil, pero no imposible como muestra las siguientes secuencias de actividades para alumnos de 12 años (Font, 2005b).

**ACTIVIDAD 1:** Los hexaminos son figuras formadas por seis cuadrados. A continuación tienes dibujados todos los hexaminos posibles. Entre los 35 hexaminos has de encontrar los 11 que permiten construir un cubo. Puedes dibujar el hexamino en papel cuadriculado para poderlo recortar con unas tijeras.

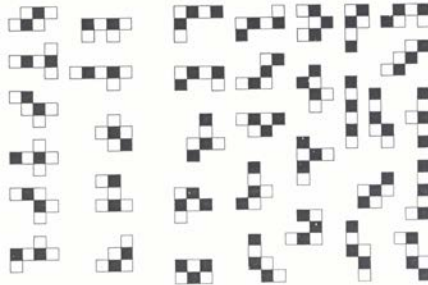


Figura 14. Hexaminos

En la actividad 1, se propone que investiguen cuáles de los 35 hexaminos son desarrollos planos de un cubo. Para contestar a esta pregunta, se les facilitó plantillas en las que pudiesen dibujar los hexaminos y, si lo consideraban conveniente, los pudiesen recortar para ver si era posible construir el cubo a partir de ellos.

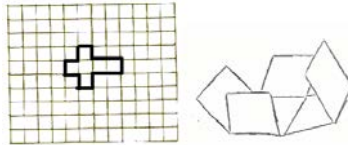


Figura 15. Construcción de un cubo a partir de un hexamino

Esta actividad resulta muy atractiva para los alumnos y casi todos terminaron integrándose en ella. En las experiencias realizadas, todos los grupos llegaron a descubrir todos los hexaminos que son desarrollos planos del cubo.

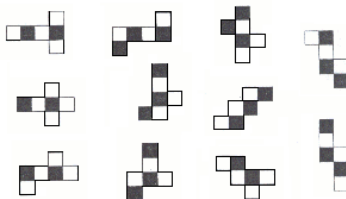


Figura 16. Los 11 hexaminos que son desarrollos planos de un cubo

**Actividad 2:** Un cubo tiene caras, aristas y vértices:a)

Dibuja un cubo y señala un vértice, una cara y una arista.

- b) ¿Cuántas caras tiene un cubo? ¿Cuántas son laterales?  
¿Y cuántas son bases?c) ¿Cuántas aristas tiene un cubo?  
d) ¿Cuántas caras concurren en un vértice?

En la actividad 2 se recuerdan los conceptos de “cara”, “vértice” y “arista”. También se distingue entre cara lateral y base. Los alumnos han de contar el número de aristas y de caras, el número de caras laterales y el número de bases. También tienen que observar que en un vértice concurren sólo tres caras.

**Actividad 3:** Fíjate en los hexaminos que no son “recortables” de un cubo:

- a) Teniendo en cuenta el número de caras que concurren en un vértice, ¿cuáles de los hexaminos quedan descartados como “recortables”?
- b) ¿Has observado alguna otra característica?

En la actividad 3 se pretende que los alumnos formulen argumentaciones explicando la causa por la que determinados hexaminos no son desarrollos del cubo. Como resultado de los comentarios, normalmente se acuerdan las siguientes causas:

- 1) Cuando en un hexamino hay un vértice en el que concurren cuatro cuadrados, no es el recortable de un cubo. Por ejemplo:

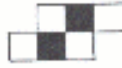


Figura 17. Ejemplo de hexamino que no es desarrollo plano de un cubo

2) Cuando en un hexamino hay una tira de más de 4 cuadrados seguidos, no es recortable del cubo. Por ejemplo:



Figura 18. Ejemplo de hexamino que no es desarrollo plano de un cubo

3) Cuando en un hexamino tenemos una tira de 4 y los otros dos cuadrados están en el mismo lado, no es recortable del cubo. Por ejemplo:



Figura 19. Ejemplo de hexamino que no es desarrollo plano de un cubo

Esta secuencia de tareas es una propuesta de trabajo colaborativo en la que todos los alumnos pueden participar. En ella se presenta una situación que implica una actividad manipulativa con material muy simple (tijeras y plantillas cuadrículadas). Se trata de una tarea que permite que los alumnos realicen por una parte una actividad matemática “rica” y, por otra parte, son actividades *inclusivas* y no *exclusivas*.

## **10. Novena reflexión: Tendencias en la formación inicial de profesores de enseñanza no universitaria**

Hay un cierto consenso en que las competencias profesionales que la formación inicial de profesores de enseñanza no universitaria tendría que intentar desarrollar son las siguientes (Font, 2005c):

- a) Competencia en el dominio de los contenidos matemáticos correspondientes al currículum de la enseñanza no universitaria.

Para ello, las matemáticas que debe saber el futuro profesor no se pueden limitar a recibir la transmisión de contenidos formales y descontextualizados organizados de manera deductiva. El futuro profesor necesita saber también cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, cuáles fueron los problemas que originaron los objetos matemáticos que tendrá que enseñar, etc.

Los conocimientos matemáticos que ha de recibir en su formación inicial el futuro profesor no pueden ser exactamente los mismos que reciben los estudiantes que se van a dedicar, por ejemplo, a la industria, a la empresa o a la investigación básica.

- b) Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas.

Con relación a esta competencia en la formación inicial sólo se pueden dar algunas indicaciones, ya que aprender a diseñar unidades didácticas es un objetivo muy ambicioso que sólo se puede alcanzar a partir de la experiencia que se obtiene al impartir clases reales.

El diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas.

Parece evidente que el diseño de las unidades didácticas se ha de basar, como mínimo, en los seis aspectos que se describen a continuación.

- La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo y del proyecto de centro correspondiente.
- Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.
- El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).
- Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.
- El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado
- Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.

Las consideraciones anteriores se refieren a la fase de la planificación de la unidad didáctica. Pero en el diseño de una unidad didáctica, hay que contemplar una primera fase de planificación y una segunda fase propiamente de diseño. Una vez se ha recogido información sobre los aspectos anteriores, se pueden empezar a tomar decisiones que permiten el diseño efectivo de la unidad. Esto es, concretar en actividades de aula las tomas de posición sobre los aspectos anteriores.

Con relación a las actividades diseñadas hay que tener presente que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su

enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende y lo que queda en los alumnos. Por lo tanto, hay que procurar incorporar en la unidad actividades "ricas" en el sentido de que permitan superar el aprendizaje pasivo, gracias a la incorporación al proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros, de algunos de los siguientes aspectos: la actividad del alumno, el uso de materiales y recursos informáticos, problemas contextualizados, grupos de trabajo, uso de diferentes representaciones, etc. En la fase de diseño, también se han de contemplar actividades de evaluación inicial, formativa y sumativa.

- c) La capacidad de gestión de las secuencias didácticas en el aula.

En el diseño de una unidad se ha previsto, muchas veces de manera implícita, una determinada gestión de aula. Por ejemplo, si la unidad incorpora una actividad en la que los alumnos han de descubrir una fórmula para hallar el número de diagonales de un polígono, el profesor en la situación de acción de los alumnos tendrá una actuación muy diferente que en la situación de validación o en la de institucionalización de los resultados obtenidos.

La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad "pobre", mientras que una actividad mal diseñada, bien gestionada, se puede llegar a convertir en una actividad "rica".

A pesar de que en la planificación y el diseño de la unidad ya se ha previsto a priori una determinada gestión de aula y un determinado tratamiento de la diversidad, el profesor ha de ser competente para analizar la gestión efectiva de aula que permite la unidad diseñada. Hay que tener en cuenta que esta unidad se va a utilizar con unos

alumnos determinados sobre los cuales seguramente se tendrá mucha información de los cursos anteriores. Esta información, junto con la evaluación inicial de los alumnos y la evaluación formativa permiten adaptar la unidad a la diversidad de los alumnos. Esto es, la unidad didáctica se ha de adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.

En la fase de gestión de la unidad, el profesor ha de ser competente en el análisis de las características de las situaciones que pueden ser modificadas por él (variables didácticas), así como los fenómenos del contrato didáctico. Por otra parte, hay que ser conscientes de que el profesor se va a encontrar con determinados alumnos que necesitarán una adaptación curricular individual.

Para ser competente en la planificación, diseño y gestión de secuencias didácticas tal como se ha formulado en los párrafos anteriores es necesario que el futuro profesor sea competente en:

- d) El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas.

Estas cuatro competencias profesionales de los profesores de matemáticas de enseñanza no universitaria tienen implicaciones importantes para su formación inicial. Las más importantes son:

- Hay que incorporar un itinerario educativo en la formación inicial de profesores de matemáticas. Este itinerario se debe articular en torno a la Didáctica de la Matemática.
- Hay que asegurar una formación adecuada en matemáticas. Ahora bien, una formación matemática que tenga en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real, su historia, etc.
- La práctica docente debe formar parte esencial de la formación inicial de los profesores. La reflexión sobre

la propia práctica es necesaria para comprender la complejidad del proceso educativo. Ahora bien, es necesario articular el análisis de la propia práctica con las aportaciones de la investigación y la innovación desde la didáctica de la matemática y, en este sentido, es necesaria la coordinación entre el futuro profesor, el profesor de didáctica de la matemática y el profesor tutor de matemáticas en el centro escolar.

### **11. Décima reflexión: Una agenda de investigación**

Las tendencias que se han comentado anteriormente dan pie a una sugerente agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas. Algunas de las cuestiones relevantes de dicha agenda que merecen ser investigadas son, entre otras, las siguientes: 1) ¿Cómo se puede conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos extra-matemáticos? 2) ¿Qué características han de cumplir los problemas contextualizados? ¿Cómo se pueden clasificar? 3) ¿Es posible en las instituciones de secundaria implementar matemáticas contextualizadas que permitan una actividad de modelización “rica”? 4) ¿Cómo conseguir que los alumnos sean competentes en la aplicación de las matemáticas a contextos no matemáticos? 5) ¿Cómo podemos evaluar la medida en que los estudiantes tienen acceso a las ideas matemáticas relevantes y sus capacidades para hacer un uso efectivo de dichas ideas? 6) ¿Qué competencias necesitan los profesores para diseñar e implementar cursos de matemáticas que tengan en cuenta algunas de las tendencias comentadas? Etc.

### **Referencias**

Acevedo, J. I. (2008). Fenómenos relacionados con el con el uso de metáforas en el discurso del Profesor. El caso de las gráficas de funciones. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Bolite Frant, J. et al. (2004). Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking. TSG 28, ICME 10, Denmark [<http://www.icme-organisers.dk/tsg28/>]

Civil, M. (1992), Entering Students Households: Bridging the gap between out-of-school and in-school mathematics, en A. Weinzweigh y A. Cirulis (eds.), *Proceedings of the 44th International Meeting of ICSIMT*, Chicago, ICSIMT, pp. 90-109.

D'Amore B. y Fandiño Pinilla M. I. (2001). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma*, XXII, 1, 59-72.

Díez, J. (2004), *L'ensenyament de les matemàtiques en l'educació de persones adultes. Un model dialògic*, tesis doctoral no publicada, Barcelona, Universitat de Barcelona.

Evans, J. (1998), Problems of transfer of classroom mathematical knowledge to practical situations, en F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom*, New York, Cambridge University Press, pp. 269-289.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2005a) Funciones y derivadas. Actas del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotá. Colombia, tomo II, pp. 5-54.

Font, V. (2005b). Reflexión en la clase de Didáctica de las Matemáticas sobre una “situación rica”, en Badillo, E. Couso, D., Perafrán, G., Adúriz-Bravo, A. (eds) *Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas* (pp. 59-91). Magisterio: Bogotá.

Font, V. (2005c) Matemáticas y su Didáctica en la Formación Inicial. Actas del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotá. Colombia, tomo I, pp. 9-58.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 10(2), 419–434.

Font, V. (en prensa). Representaciones activadas en el cálculo de  $f'(x)$ . Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Granada 2007. Granada: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Font, V.; Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21,3, 405-418.

Font, V., Acevedo, J. I., Castells, M. y Bolite, J. (2008). Metáforas y ontosemiótica. El caso de la representación gráfica de funciones en el discurso escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21 (en prensa).

Font, V. y Contreras A. (2008) The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (en prensa)

Font, V., Rubio, N. y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21 (en prensa).

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Riedel-Kluwer A.P.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. *Mathematics Education Library*, 9, 41-42.

Geertz C. (2002), *Reflexiones antropológicas sobre temas filosóficos*, Barcelona, Paidós Studio.

Goddijn, A., Kindt, M & Reuter, W. (2004), *Geometry with applications and proofs*. Freudenthal Institute, Utrecht: The Netherlands.

González, N., Andrade, R. y Carson, C. (2001), Creating links between home and school mathematics practices, en E. McIntyre, A. Rosebery y N. González (eds.), *Classroom diversity: Connecting curriculum to students' lives*, Portsmouth, NH: Heinemann, pp. 100-114.

Gravemeijer, K.P.E. (1994), *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β. Press / Freudenthal Institute.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58.

Jurdak, M. (2006). Real World, Situated, and School Contexts, *Educational Studies in Mathematics*, 63 (3), 283-301.

Jurdak, M. y Shahin I. (1999), An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut, *Educational Studies in Mathematics Education*, 40, 2, 155-172.

Jurdak, M. y Shahin I. (2001), Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids, *Educational Studies in Mathematics Education*, 47, 3, 297-315.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lange, J. de: (1996), Using and applying mathematics in education, en Bishop et al, *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, Kluwer A.P., pp. 49-97.

Lave, J. (1988), *Cognition in practice*. New York, Cambridge University.

Nunes, T., Schliemann, A.D., y Carraher, D.W. (1993), *Street mathematics and school mathematics*, New York, Cambridge University Press.

OCDE (2004), *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003*, París, OCDE.

Pozzi, S., Noss, R., y Hoyles, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use, *Educational Studies in Mathematics Education*, 36, 2, 105-122.

Reed, H. J. y Lave, J. (1981), Arithmetic as a tool for investigating between culture and Cognition, in R. Casson (eds.), *Language, Culture and Cognition: Anthropological perspectives*, New York, macmillan, pp.437-455.

Scribner, S. (1984), “Studing working intelligence”, en J. Lave y B. Rogoff (eds.), *Evereday cognition: its development in social context*. Cambridge MA, Harvard University Press, pp. 9-40.

Scribner, S. (1986), “Thinking in action: Some characteristics of practical thought”, en R. Sternberg y R.Wagner (eds.), *Practical intelligence nature and origins of competence in the everyday world*, New York, Cambridge University Press, pp.13- 30.

# Entornos informáticos para el aprendizaje de las matemáticas

## Proyecto TeP-Perú

Bertrand Rousset  
Colegio Franco Peruano

### Resumen

El objetivo de este artículo es de reflexionar sobre la manera de mejorar la enseñanza de la geometría en el Perú usando TracenPoche. En la primera parte, se presentará la interfaz de TeP, la sintaxis de los objetos creados, los modos de utilizar TeP y las novedades de este software. En la segunda parte, se presentará la geometría dinámica desde el punto de la didáctica. En esta parte se analizará cómo TeP permite mejorar la manera de enseñar la geometría. Finalmente, se hablará del trabajo en colaboración en el proyecto TeP-Perú y sus objetivos.

TracenPoche<sup>1</sup> (TeP) es un software libre y gratuito de geometría dinámica desarrollado por miembros de Sésamath<sup>2</sup>. Sésamath es una asociación francesa constituida por profesores de Matemáticas. El proyecto TeP-Perú nació gracias al deseo de traducir TeP en español y está desarrollado con el apoyo de la Embajada de Francia en el Perú. La primera etapa de este proyecto es la traducción de la interfaz de TeP. La segunda es promover a nivel nacional la utilización de TeP en las instituciones educativas. La tercera es desarrollar una red de trabajo entre los profesores de las distintas instituciones educativas del país dando ayuda técnica y proponiendo actividades para desarrollarlas con sus alumnos. Todas estas etapas conducen al objetivo fundamental que consiste en mejorar la enseñanza de las

---

<sup>1</sup> [www.tracenpoche.sesamath.net](http://www.tracenpoche.sesamath.net)

<sup>2</sup> [www.sesamath.net](http://www.sesamath.net)

Matemáticas en el Perú. La traducción de la interfaz empezó en el mes de septiembre 2007 y se terminó en febrero del 2008. El Mag Mariano González Ulloa (PUCP) dió su apoyo para realizar esta primera etapa.

En el artículo se utilizará el término EIAH que significa Entorno Informático para el Aprendizaje Humano.

## **1. Presentación de TeP**

### **1.1. La interfaz**

La figura 2 presenta la interfaz de TeP con diferentes zonas.

#### **1.1.1. La zona figura**

Es la zona donde está dibujada la figura, los objetos pueden desplazarse con el mouse (cuando es posible) o ser escogidos para responder a las acciones de los botones seleccionados.

#### **1.1.2. La zona de los botones**

Esta zona contiene una serie de botones. Se puede crear por ejemplo un punto o una recta pasando por dos puntos. Se puede definir una transformación, por ejemplo una simetría central. Los botones están diseñados con el mismo modelo. La figura 1 es la imagen del botón que permite trazar la paralela a una recta pasando por un punto. De color negro aparece lo que es el contexto necesario para construir el objeto deseado. Para trazar la paralela a una recta (d) pasando por un punto A, se necesita una recta (d) y un punto A. En negro se puede visualizar un punto y una recta que representan en este caso el punto A y la recta (d). Cada botón contiene de esta manera las informaciones necesarias para saber que objeto se puede crear y cuales son los objetos necesarios para conseguirlo. En rojo aparece el resultado que ofrece el botón.



Figura 1. Botón que permite trazar la paralela a una recta pasando por un punto



Figura 2. Interfaz de TeP

### 1.1.3. La zona del Script

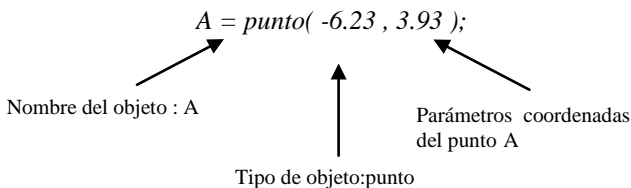
El script de la figura se presenta en esta zona en tiempo real y se puede modificar. El botón de la figura 3 permite visualizar el dibujo correspondiente al script modificado.



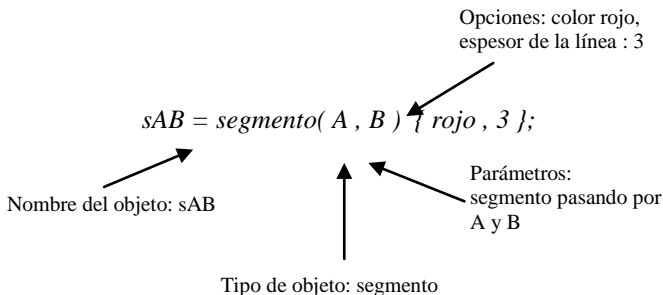
Figura 3. Botón que permite actualizar el script modificado  
La zona script tiene una sintaxis para describir los objetos :

*Nombre\_objeto=tipo\_objeto(parámetros){opciones}*

Para un punto se escribe por ejemplo:



Para un segmento [AB] se escribe por ejemplo:



Esta sintaxis es fácil de entender y permite describir de manera formal los objetos de la geometría.

#### 1.1.4. La zona Análisis

En esta zona se pueden hacer cálculos o pedir informaciones sobre la figura. Se puede medir por ejemplo la longitud de un segmento.

#### 1.1.5. La zona Transformaciones

En esta zona se puede seleccionar una transformación después de haber definido la transformación.

#### 1.1.6. La zona Informaciones

En esta zona se pueden conseguir los datos respecto al número de la versión utilizada. En el caso de la figura 2, el número de la versión es 2.32s.

### 1.2. Usuarios de TeP

[LER 06] indica que cuando un EIAH está creado, es importante que la utilización de estos entornos no perturbe el

aprendizaje de los alumnos. [PAQ 91] llama “ruidos informáticos” las perturbaciones generadas por el EIAH. Estos ruidos dependen de la competencia del estudiante. El comportamiento no es el mismo para un estudiante acostumbrado a usar un software que para un alumno principiante. Por esta razón, es importante definir el tipo de usuario. De esta elección dependen las funcionalidades del software y el tipo de actividades que se puedan realizar. TeP fue pensado para ser utilizado en los colegios. Por esta razón, los botones, las informaciones de pantallas, y funcionalidades de TeP fueron adaptadas a los alumnos.

### 1.2.1. Los botones

Los botones fueron pensados para que sea fácil utilizarlos, tienen un tamaño adecuado, no contienen textos, y las informaciones contextuales (objetos de color negro) permiten entender el uso de cada botón.

### 1.2.2. Las informaciones de pantallas

Cuando un usuario desea trazar la perpendicular a una recta, las informaciones de pantallas indican los requisitos para obtener una circunferencia definida por su centro y un punto. La figura 4 muestra las diferentes etapas para trazar esta circunferencia.

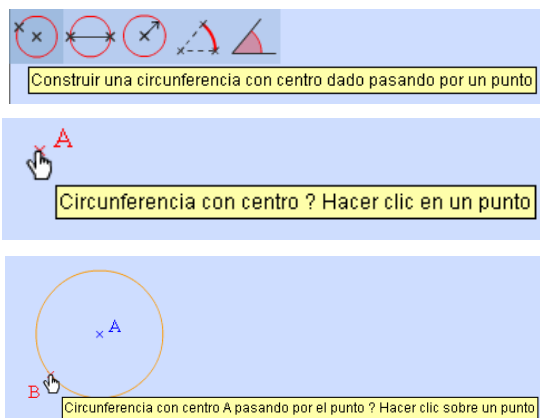


Figura 4. Diferentes etapas de las informaciones de pantallas

Gracias a las informaciones de pantallas, un alumno es más autónomo para crear objetos con TeP. Estas informaciones permiten un aprendizaje rápido de las funciones de TeP. El vocabulario empleado por las informaciones de pantallas es el vocabulario que usan los alumnos en los colegios, de esta manera se acostumbran a usar el vocabulario.

### **1.2.3. Transformaciones geométricas**

TeP permite definir las transformaciones geométricas que los alumnos descubren en el colegio. La manera de definir las es formal para que los alumnos se acostumbren a declarar una transformación de manera precisa.

### **1.2.4. Cálculos**

La zona Análisis permite dar el resultado de los cálculos tal como la longitud de un segmento o la medida de un ángulo. Estas herramientas están adaptadas a los alumnos de los colegios para realizar sus actividades.

## **1.3. Modos de usos**

TeP puede ser utilizado desde Internet. El usuario se conecta en el sitio de Tracenpoche<sup>3</sup> en español. La tecnología empleada para TeP es Flash (c) Adobe. Esta tecnología permite tener un software fácil de descargar y de instalar. [LER 06] indica que la instalación del EIAH debe ser fácil para que los alumnos puedan concentrarse en su actividad de aprendizaje. TeP puede ser usado también de un modo local sin conectarse a Internet. Para utilizarlo en modo local, el usuario puede descargarlo en el sitio de TeP<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> [www.tracenpoche.sesamath.net](http://www.tracenpoche.sesamath.net) , y hacer clic en la bandera española

<sup>4</sup> [www.tracenpoche.sesamath.net](http://www.tracenpoche.sesamath.net) , y hacer clic en la bandera española ,hacer clic en “TeP en otro idioma” y descargar el archivo.

## **1.4. Novedades de TeP**

### **1.4.1. Zona Script**

La zona Script de TeP se sitúa al lado de la zona Figura. Esta novedad permite ver el script de manera dinámica. Cada vez que un objeto es modificado, el script se modifica. El script permite tener una descripción formal de la figura. Cuando un alumno es principiante se fija solamente en los botones y la figura, después de tener más experiencia los alumnos pueden modificar una figura con el script sin usar los botones. Por ejemplo, para colorear un segmento en rojo se escribe {rojo} al final de la declaración del segmento antes de « ; ». Cuando un alumno se acostumbra a leer el script, aprende a tener una descripción formal de la figura porque la sintaxis de los objetos es muy precisa. Esta competencia permite a los alumnos mejorar su capacidad de razonamiento.

### **1.4.2. Zona Análisis**

La zona Análisis está en la misma ventana que la figura. Esta zona permite hacer cálculos o tener unas informaciones. Por ejemplo, se puede saber si un punto pertenece a una recta. La ventaja de esta zona es que los cálculos no aparecen en la misma zona que la figura. Esto permite al alumno tener una figura menos cargada en informaciones.

### **1.4.3. Organización de las zonas**

La ventana está dividada en varias zonas : figura, script, análisis. El proyecto Andes<sup>5</sup> [VANLEHN 2005], ofrece una organización de la ventana en varias zonas. Los creadores de este proyecto anuncian que esta separación permite a los alumnos organizar de manera más formal su razonamiento. Se puede hacer de esta manera una distinción entre la figura geométrica, la descripción de la figura y los cálculos.

---

<sup>5</sup> <http://www.andes.pitt.edu> . Andes es un software desarrollado para estudiar la física.

## **1.5. Software gratis y libre**

TracenPoche es un software libre (open source) y gratuito. De esta manera, los profesores y los alumnos pueden utilizarlo sin pagar. Para la asociación Sésamath el aspecto gratuito de las herramientas pedagógicas es muy importante, eso promueve la igualdad en la educación.

## **2. Ventajas de la geometría dinámica en la enseñanza de la geometría**

### **2.1. Software de geometría dinámica**

#### **2.1.1. Micromundo**

[CAP 95] recuerda la definición de un micromundo « Un micromundo es una creación de un mundo de realidades artificiales que ofrece un modelo de una teoría. Este mundo está compuesto de objetos con los cuales se pueden realizar acciones, también se pueden crear nuevos objetos. Los objetos creados están bajo el control de la teoría subyacente al modelo».

De este modo, TeP es considerado como un micromundo. Con TeP se pueden crear objetos y realizar acciones tales como, desplazar o construir la imagen de un punto por una transformación. Cuando se desplazan objetos, las propiedades geométricas son conservadas.

[LER 06] indica que un micromundo permite al estudiante construir su conocimiento gracias a la exploración. El concepto de micromundo pertenece a la corriente constructivista. En esta corriente, el aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento que procede de la interacción entre un sujeto y el entorno.

En el transcurso de una actividad con TeP el alumno realiza interacciones con su entorno informático, lo que permite al alumno según la teoría constructivista entrar en el proceso de aprendizaje de la geometría.

### **2.1.2. Noción de figura geométrica**

[ABR 98] indica que un software de geometría dinámica favorece «el aprendizaje de la noción de una figura geométrica a saber el establecimiento de relaciones entre un objeto geométrico y los dibujos que están asociados». Para los alumnos es difícil darse cuenta de la diferencia entre un dibujo y una figura geométrica. A continuación estudiaremos cómo TeP favorece el aprendizaje de la noción de una figura geométrica.

## **2.2. Algunas diferencias entre la técnica “papel-lápiz” y TeP**

### **2.2.1. Los tipos de desplazamientos**

[TAP 06] presenta en su tesis los tres tipos de desplazamientos posibles con un software de geometría dinámica.

Desplazamiento 1: desplazar para validar o invalidar

Este tipo de desplazamiento permite validar o invalidar una construcción geométrica. Por ejemplo, se puede pedir a un alumno construir un cuadrado ABCD a partir de dos puntos A y B. Para verificar que la construcción sea realmente un cuadrado, se puede arrastrar el punto A o B y ver si el cuadrilátero es un cuadrado. Algunos alumnos pueden intentar colocar los puntos C y D de tal manera que el cuadrilátero ABCD se parezca a un cuadrado. Lo hacen solamente usando el botón « crear un punto », con este botón no existen relaciones con los puntos A y B. Usando el botón « crear un punto », se puede conseguir un caso particular de cuadrado ABCD, pero si desplazamos el punto A, el dibujo que se consigue no está relacionado con el concepto de cuadrado porque los puntos C y D no han sido definidos relativamente a A y B para que sea un cuadrado. Con un hoja de papel no es posible realizar esta experiencia.

Desplazamiento 2: desplazar para conjeturar

Este tipo de desplazamiento permite hacer conjeturas en el caso por ejemplo, de una figura sin indicaciones y donde no aparece la zona Script. Se puede pedir que tipo de punto es el

punto en rojo de la figura 5. Para poder responder a la pregunta, los alumnos pueden desplazar los puntos A, B, C y observar cómo reacciona el punto rojo. Pueden ver lo que pasa si ABC es un triángulo rectángulo, isósceles...

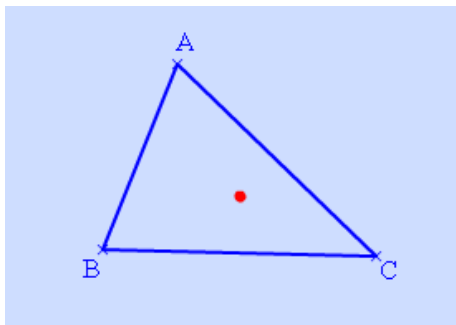


Figura 5: Conjeturar qué tipo de punto es.

Con un una hoja de papel no es posible tener una actividad de investigación que permita al alumno realizar un trabajo de conjetura.

Desplazamiento 3: desplazar para constatar

Este tipo de desplazamiento permite constatar propiedades geométricas de objetos que son invariables cuando por ejemplo se desplaza un punto.

Se usa este tipo de desplazamiento cuando un alumno realiza una actividad de descubrimiento de una propiedad geométrica. Por ejemplo, para descubrir una propiedad de la mediatriz de un segmento  $[AB]$ , un alumno crea un punto M sobre la mediatriz y mide la longitud del segmento  $[AM]$  y la del segmento  $[BM]$ . Cuando se desplaza el punto M, el alumno puede observar que AM y BM son iguales (aproximadamente).

Muchas actividades usan este tipo de desplazamiento. En el caso del papel se pueden realizar algunas construcciones pero con TeP, el alumno puede observar muchos más casos de dibujos que permiten constatar este resultado.

## **2.2.2. Dependencias entre los objetos**

[TAP 06] analiza las distintas dependencias entre los objetos.

Construcción/dependencia 1: dependencia de los objetos construidos en relación con los puntos de base. Por ejemplo, cuando se construye un cuadrado ABCD a partir de dos puntos libres A y B, los puntos C y D dependen de los puntos A y B, esto impide mover el punto C si hacemos clic sobre este punto.

Construcción/dependencia 2: dependencia entre los objetos cuando se elimina un objeto. En el caso del cuadrado ABCD, si se elimina el punto A entonces los puntos C y D van a desaparecer porque dependen de los puntos A y B.

Construcción/dependencia 3: propiedades geométricas dadas a una figura en su construcción. En el caso del cuadrado ABCD, las diagonales tienen la misma longitud, son perpendiculares y secantes en el punto medio de las diagonales. Estas propiedades no fueron definidas en la construcción de los puntos C y D (si trazaron perpendiculares y circunferencias).

## **2.2.3. Configuraciones de herramientas**

### **2.2.3.1. Escoger los botones**

TeP permite escoger los botones visibles en la interfaz. Por ejemplo, para construir la paralela a una recta (BC) pasando por un punto A, se puede esconder el botón que permite trazar directamente la paralela a una recta pasando por un punto. Esta configuración es interesante porque los alumnos tienen que reflexionar para utilizar propiedades matemáticas en la construcción de la figura deseada. En este caso, los alumnos pueden trazar dos perpendiculares o utilizar la propiedad de los puntos medios de los lados de un triángulo. Para realizar esta construcción, el alumno tiene que utilizar propiedades que utiliza normalmente para hacer demostraciones y no construcciones.

### 2.3.3.2. Esconder la zona Script

TeP permite esconder la zona Script. Esta herramienta puede ser interesante para que los alumnos puedan hacer conjeturas sobre una figura. El hecho de no ver el script de una figura, no permite conocer las características de los objetos. Los alumnos tienen que realizar una serie de experimentaciones para tratar de descubrir las propiedades de la figura estudiada.

### 2.3.3.3. Modo paso a paso

El modo paso a paso es interesante para visualizar las etapas de la construcción de una figura. La figura 6 muestra el módulo de control que permite utilizar el modo paso a paso.



Figura 6: Módulo de control del modo paso a paso

Con este módulo se puede ver entre otro las diferentes etapas de construcción de la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC. En una pizarra con una tiza un profesor puede volver a hacer la construcción de una figura pero no es tan fácil, sin embargo con el módulo se puede repetir sin límites estas etapas. Una figura que aparece en varias etapas permite al alumno entender el proceso de construcción de la figura, además se puede ver una etapa anterior si no se entendió una etapa. Este módulo permite tener interactividad en la visualización de la construcción de una figura.

## 2.3. Interés de la Geometría Dinámica

### 2.3.1. Teoría van HIELE [VAN 86]

La teoría van HIELE fue desarrollada por los holandeses Dina y Pierre van HIELE. Esta teoría propone niveles de comprensión de los conceptos geométricos. Los van HIELE pudieron constatar que los alumnos podían progresar en el razonamiento geométrico en 5 etapas consecutivas. En su

artículo, [BUR 99] presenta los diferentes niveles de esta teoría.

Nivel 1. La visualización:

El alumno percibe los objetos geométricos a partir de su apariencia. Puede hacer razonamientos usando una descripción visual de los objetos.

Nivel 2. El análisis :

El alumno empieza a analizar las figuras y es capaz de relacionar un objeto geométrico con sus propiedades. Para describir un objeto utiliza propiedades necesarias.

Nivel 3. La abstracción:

El alumno es capaz de ordenar las propiedades de los objetos geométricos, de distinguir las propiedades necesarias y suficientes para determinar un concepto. Sin embargo, no entiende el interés de la demostración.

Nivel 4. La deducción formal :

El alumno es capaz de entender y realizar los diferentes elementos de una demostración. Las demostraciones son consideradas como necesarias y se da cuenta que pueden existir varios caminos diferentes.

Nivel 5. El razonamiento preciso :

El alumno es capaz de trabajar con sistemas axiomáticos diferentes y estudiar geometrías variadas, sin modelo concreto.

### **2.3.3.1. Teoría van HIELE y los softwares de geometría dinámica**

El artículo [BUR 99] presenta también los resultados de un estudio sobre el nivel, según la teoría van HIELE, de un grupo de alumnos. Los autores recomiendan que para ayudar a un alumno a pasar del primer al segundo nivel, es importante que pueda manipular los objetos, hacer experimentaciones, que no los vea siempre en la misma configuración. De esta manera, se puede favorecer el uso de las propiedades.

En el primer nivel, TeP podría ayudar a los alumnos a ver los objetos en diferentes configuraciones y realizar experimentaciones. En el segundo nivel, desplazando los vértices de un cuadrado se puede hacer medidas respectivamente a los ángulos y a los lados. El alumno puede explorar por él mismo las propiedades del cuadrado con muchas variedades de dibujos. En el tercer nivel, un alumno puede desplazar los vértices de un cuadrado y de un rectángulo para establecer una relación de inclusión. TeP permite medir y desplazar los vértices de un rectángulo para intentar tener un cuadrado, con una hoja de papel es difícil lograr este tipo de experimentación de manera dinámica.

El autor del artículo [PUR 00] hizo un estudio sobre la influencia del uso del software Cabri [CAB 08], en Brasil, respecto a los niveles de la teoría van HIELE. El análisis de la experimentación muestra que el uso exclusivo de Cabri no permite a un alumno pasar del nivel 1 al nivel 2. Para pasar del nivel 1 al 2, se necesita saber manejar el vocabulario que permite describir una figura. El autor recomienda a los profesores ofrecer actividades fuera del uso de Cabri para que el alumno pueda mejorar su vocabulario. Este comentario es importante porque señala la necesidad de usar un software de geometría dinámica con otros tipos de actividades para mejorar la enseñanza de la geometría. Sin embargo, el autor piensa que cuando el alumno sabe expresarse para describir una propiedad matemática, el uso de Cabri lo puede ayudar para pasar del nivel 2 al 3, pero hay que respetar la estructura recomendada por la teoría van HIELE. Este comentario muestra el interés de usar TeP para pasar del nivel 2 al 3, pero eso va depender de la manera de organizar las actividades. Esto deja ver la importancia de la formación de los profesores.

### **2.3.2. Construcción vs dibujo**

En una hoja de papel se puede trazar un cuadrado ABCD a partir de dos puntos A y B, usando una escuadra sin utilizar propiedades geométricas. En este caso se habla de dibujo. Un

alumno lo puede hacer solamente a partir de la apariencia que tiene un cuadrado.

Con TeP no se puede usar una escuadrada. Para conseguir un cuadrado ABCD a partir de dos puntos A y B, se puede trazar una perpendicular al segmento [AB] pasando por A y una circunferencia de centro A pasando por B. Para tener la idea de usar estos botones, el alumno tiene que poder describir las propiedades de un cuadrado. Esta construcción es un buen ejercicio para ayudarlo a aplicar las propiedades de los cuadriláteros particulares.

### **2.3.3. Lugar de experimentaciones**

El autor del artículo [LAB 03] indica a propósito de Cabri : « Los usuarios pueden realizar experiencias reales que corresponden a las experiencias mentales que pueden efectuar sobre los objetos abstractos que no son frecuentemente disponibles para los alumnos ». Cabri y TeP permiten a los alumnos realizar este tipo de experimentaciones, este aspecto es interesante para los que tienen dificultades de visualización.

#### **2.3.3.1. Nuevas áreas de experimentaciones**

Las oportunidades de experimentación que ofrece TeP permiten a los profesores inventar una nueva manera de descubrir la geometría. Cuando un profesor empieza a utilizar TeP con sus alumnos, es difícil realizar actividades que sean diferentes de lo que se hace con una hoja de papel. Por esta razón, antes de empezar una actividad con los alumnos, una reflexión sobre las diferencias entre TeP y la técnica “papel-lápiz” puede permitir a los alumnos aprovechar de estas nuevas áreas de experimentaciones. Para que los profesores puedan aplicar estas nuevas áreas de experimentaciones, una formación en las universidades o institutos pedagógicos puede ser interesante. El objetivo de estas formaciones es ofrecer a los profesores unas herramientas de reflexión sobre la manera de construir una actividad tomando en cuenta lo que ofrece TeP. El autor de la tesis [TAP 06] indica que estas

nuevas áreas de experimentaciones permiten establecer nuevas estrategias de resolución para los alumnos. Estas nuevas estrategias necesitan una nueva manera de concebir las actividades de los alumnos. Esta reflexión, se podría hacer entre profesores o en el transcurso de la formación pedagógica de los profesores. Para que los alumnos puedan realizar estas nuevas actividades, los profesores pueden enseñarles una metodología para resolver estos nuevos tipos de problemas. ¿Qué tipos de nuevas estrategias se pueden definir? ¿Cómo enseñar estas estrategias a los alumnos?

Estas nuevas actividades permiten a los alumnos trabajar en grupo para intentar conseguir una solución al problema. Con el trabajo en grupo los alumnos acceden a un intercambio de ideas con el objetivo de ayudarse mutuamente en el aprendizaje.

### **3. Trabajo en colaboración en el proyecto TeP-Perú**

En Francia, Sésamath logró constituir varios grupos de trabajo en colaboración. Gracias a este trabajo, se pudieron desarrollar varios softwares gratuitos dedicados a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, dar una ayuda técnica para los usuarios de los softwares y proponer fichas de actividades para los alumnos. El trabajo en colaboración significa que profesores pueden trabajar juntos sobre un mismo proyecto. La comunicación se establece gracias a mensajes enviados por mail a una lista predefinida de usuarios.

En octubre del 2007 Sésamath estuvo en el tercer lugar del premio UNESCO sobre el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación para la Enseñanza (entre 68 proyectos de 51 países). La asociación fue premiada por la calidad de sus soportes pedagógicos y por su capacidad en alcanzar un público numeroso de alumnos y profesores. Este premio demuestra el interés de un trabajo en colaboración.

La tercera etapa del proyecto TeP-Perú consiste en constituir un grupo de profesores para trabajar en colaboración con el fin de cumplir los siguientes objetivos.

### **3.1. Promover la utilización de TeP**

Este primer aspecto se refiere a la divulgación de TeP en los colegios. Para lograrlo una buena meta sería organizar talleres dirigidos a los profesores de matemáticas con el fin de enseñarles a utilizar el software y a realizar actividades. El trabajo en colaboración consiste en intercambiar ideas para preparar estos talleres. ¿Qué tipo de actividades realizar para los profesores? ¿Dónde realizarlas?

### **3.2. Ayuda técnica para los usuarios**

Cuando un profesor desea utilizar TeP pueden surgir preguntas sobre el uso. La experiencia realizada en Francia demuestra que cuando un profesor hace una pregunta en la lista, generalmente consigue una respuesta gracias a los expertos de TeP y los otros profesores de la lista pueden aprovechar de las dudas aclaradas.

TeP sigue siendo desarrollado y todavía existen algunos errores. Un interés de la lista de trabajo en colaboración es señalar los errores para que puedan ser corregidos.

En este proyecto es necesario constituir un grupo de expertos que puedan contestar a las preguntas que aparecerán en la lista.

### **3.3. Proponer actividades para los alumnos**

Este aspecto del trabajo en colaboración pretende preparar fichas de actividades para los alumnos de manera que los profesores puedan utilizarlas en el salón de clase. Estas fichas podrían ser descargadas desde la página web de TracenPoche con el fin de ofrecerlas a todos los profesores de matemáticas. Estas fichas pueden ser utilizadas directamente o servir como una referencia a los profesores. El objetivo de este trabajo en colaboración es de alimentar una reflexión sobre el tipo de actividades que pueden proponerse a los alumnos, sobre las ayudas que se pueden ofrecer ¿Qué actividades proponer para tomar en cuenta las ventajas de geometría dinámica? ¿Cómo aplicar nuevas estrategias de resolución? ¿Qué tipos de preguntas hacer? ¿Preguntas

abiertas o cerradas? ¿Qué tipo de respuestas esperar de parte de los alumnos?

Otro aspecto de este trabajo es meter en línea figuras geométricas para una visualización de las propiedades matemáticas o para promover una actividad de investigación. Los alumnos podrían explorar las figuras con el fin de descubrir sus propiedades.

#### **4. Conclusión**

En este artículo se describió TeP y las novedades de este software. Los tipos de desplazamientos, la dependencia de los objetos, la configuración de las herramientas son elementos que establecen unas diferencias entre la técnica “papel-lápiz” y TeP. La teoría de van HIELE fue introducida para ver cómo el uso de TeP puede mejorar el aprendizaje de la geometría. Se habló de nuevas estrategias de resolución ofrecidas por los softwares de geometría dinámica ¿Qué tipos de nuevas estrategias se pueden definir? ¿Cómo enseñar estas estrategias a los alumnos? La última parte fue una presentación del trabajo en colaboración, cuyos objetivos son: promover la utilización de TeP, ofrecer una ayuda técnica para los usuarios y proponer actividades para los alumnos.

El autor del artículo [ART 95] señala que «para poder utilizar un EIAO (Entorno Interactivo para el Aprendizaje con Computadora), es importante que los profesores, en el transcurso de su formación se acostumbren a manejarlo personalmente».

La formación de los profesores es una condición necesaria para permitir un buen uso de TeP.

¿Qué tipo de formación ofrecer a los profesores?

En el artículo [LER 06] se destaca que lo difícil con los EIAH no es solamente realizar actividades pero que el alumno pueda aprender. El aprendizaje no depende solamente del uso de un software pero de un conjunto de elementos (situación de aprendizaje humano, cultural, psicológico, ...).

Para poder construir actividades es importante pensarlas de tal manera que puedan favorecer el aprendizaje. La experimentación realizada por los alumnos es una buena manera de favorecer el aprendizaje.

En [LER 06] se plantea la problemática de saber quién es dominante entre la informática y la didáctica. Puede parecer más fácil preparar una actividad pensando solamente en los aspectos informáticos pero puede ser que el alumno no logre mejorar su conocimiento de la geometría.

Sería interesante hacer un estudio sobre la utilización de TeP en colegios peruanos. ¿Qué actividades fueron realizadas? ¿Qué actividades fuera de TeP permitieron acompañar el uso de TeP con el objetivo de favorecer el aprendizaje? ¿Qué tipos de adelantos permitió TeP? ¿Cuáles fueron las dificultades encontradas por los profesores y los alumnos?

## Referencias

[ABR 98] ABROUGUI-HATTAB H., “La démonstration en géométrie dans l’enseignement mathématique secondaire tunisien”, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia, 1998.

[ART 95] ARTIGUE M., “Une approche didactique de l’intégration des EIAO à l’enseignement”, *In Environnements informatiques d’apprentissage avec ordinateur*, Guin D., Nicaud J.F. & Py D. (eds), pp17-28, Eyrolles, Paris, Francia, 1995.

[BUR 99] BURTON R. y DETHEUX-JEHIN M., “Les élèves du premier degré secondaire, sont-ils prêts à démontrer en géométrie?”, Synthèse de la recherche en pédagogie n°02/97, Service de Pédagogie expérimentale, Université de Liège, Liège, Belgica, 1999.

[CAB 08] <http://www-cabri.imag.fr/>, última visita realizada el 10 de febrero 2008

[CAP 95] CAPPONI B., LABORDE C., “Cabri-classe, apprendre la géométrie avec un logiciel”, Editions Archimède, Grenoble, 1995.

[LAB 03] LABORDE C., “The design of curriculum with technology: lessons from projects based on dynamic geometry environments”, *CAME Symposium*, Reims, France, 2003.

[LER 06] LEROUX P., “Micromondes et robotique pédagogique”, In *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain*, Grandbastien M., Labat J.M., Hermès, p.311-332, Francia, 2006.

[PAQ 91] PAQUETTE G., “Métaconnaissances dans les environnements d'apprentissage”, Thèse de doctorat en Informatique, Université du Maine, Le Mans, Francia, 1991.

[PUR 00] DA PURIFICAÇÃO I., “Cabri-géomètre et théorie van Hiele: possibilités et progrès dans la construction du concept de quadrilatère”, *Actes du Colloque EM 2000*, Grenoble, Francia, 2000.

[TAP 06] TAPAN M., “Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique”, Thèse de doctorat en Mathématiques, Sciences et Technologie de l'Information, Informatique,

Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia, 2006.

[VAN 86] VAN HIELE P., “Structure and Insight”, Academic Press, Orlando, Florida, EE UU, 1986.

[VAN 05] VANLEHN K. et al., “The Andes Physics Tutoring System : Lesson Learned”, *International Journal of Artificial in Education*, vol 15 n°3, p.147-204, 2005.

[VER 01] VERGNAUD G., “Constructivisme et apprentissage des mathématiques”, In *Constructivisme: usages et perspectives en éducation*, Service de la Recherche en éducation, Genève, Suiza, 2001.

# La Matemática en el Contexto de las Ciencias

Patricia Camarena Gallardo  
Instituto Politécnico Nacional, México

## Resumen

A nivel mundial, es conocido el hecho del alto índice de reprobación en las asignaturas de matemáticas en áreas de ingeniería, la reprobación es sólo un síntoma de toda la problemática. En este conflicto inciden muchos factores de tipo social, económico, de orden curricular, asociados a la didáctica, que inciden en el aprendizaje y en la enseñanza de la matemática, inherentes a la formación de los docentes, inferidos al propio tema de estudio, por causas de la infraestructura cognoscitiva de los alumnos, etc. (Camarena, 1984). Los estudiantes no tienen en claro por qué estudiar matemáticas y esto demerita la motivación hacia esta ciencia, por otro lado, en los objetivos de los estudios de ingeniería se menciona que el futuro ingeniero deberá poseer una formación integral y en ninguna parte de los currículos de ingeniería se especifica cómo lograrlo. Desde esta perspectiva, la desarticulación que existe entre los cursos de la matemática y las demás asignaturas que cursa el estudiante se convierte en un conflicto cotidiano para los alumnos; tratando de enfrentar estas problemáticas nace la teoría de *la Matemática en el Contexto de las Ciencias*.

En el presente trabajo se muestran los resultados de varias investigaciones educativas relacionadas con el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en áreas de ingeniería, en donde la matemática no es una meta por sí misma. Esta serie de investigaciones convergen en la constitución de la teoría educativa denominada: *La matemática en el Contexto de las Ciencias*, la cual nace en el nivel universitario y se está llevando hacia los niveles educativos anteriores.

La teoría que aquí se resume se ha desarrollado a lo largo de más de 20 años en el Instituto Politécnico Nacional de México. Se inició con investigaciones sobre el currículo tratando de abordar la problemática del por qué de los cursos de matemáticas en las áreas de ingeniería y tratando de buscar respuestas a la problemática que todo docente de matemáticas vive con los estudiantes, quienes parece que odian a la matemática, en donde se repite la situación de que en apariencia nunca han visto los conocimientos de sus cursos anteriores que les exige el profesor.

### **La Matemática en el Contexto de las Ciencias**

"*La Matemática en Contexto de las Ciencias*" es una teoría que nace desde 1982, la cual reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren (Camarena, 1984, 1987, 1995, 2001<sub>a</sub>, 2005<sub>a</sub>, 2007), y se fundamenta en los siguientes paradigmas:

- La matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel universitario.
- Los conocimientos nacen integrados.

El supuesto filosófico educativo de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas.

La teoría contempla cinco fases:

- La Curricular, desarrollada desde 1984.
- La Didáctica, iniciada desde 1987.
- La epistemológica, abordada en 1988.
- La de formación docente, definida en 1990.
- La cognitiva, estudiada desde 1992.

Es claro que en el salón de clases están presentes los contenidos de cada una de las cinco fases y éstas interactúan entre sí en un ambiente social, económico y político; es decir, los cinco elementos no están aislados unos de los otros y tampoco son ajenos a las condiciones sociológicas de los actores del proceso educativo, para una exposición con formalidad de la teoría se hace necesario fragmentarla en las cinco fases, véase la figura 1.

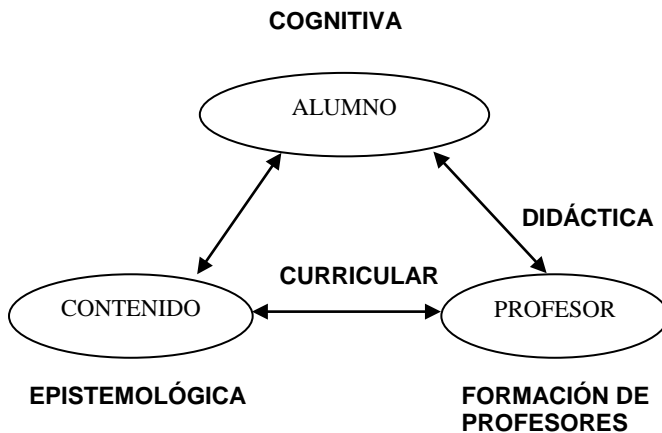


Figura 1. Una terna dorada en educación.

A continuación se exponen los elementos más relevantes de cada fase.

### **Fase curricular.**

La fase curricular posee una metodología denominada DIPCING para el diseño de programas de estudio de matemáticas en carreras de ingeniería (Camarena, 1984).

La metodología se fundamenta en el siguiente paradigma educativo: *Con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas de matemáticas no son una meta por sí mismas; sin dejar a*

*un lado el hecho de que la matemática debe ser "formativa" para el alumno.*

Asimismo, la premisa alrededor de la cual gira la metodología es que: *El currículo de matemáticas debe ser objetivo, es decir, debe ser un currículo fundado sobre bases objetivas.*

Para poder cumplir con la premisa dentro del marco del paradigma educativo planteado, se propone una estrategia de investigación dada en tres etapas: la central, la precedente y la consecuente.

#### *ETAPA CENTRAL*

*Hacer un análisis de los contenidos matemáticos, tanto explícitos como implícitos, en los cursos específicos de la ingeniería.*

#### *ETAPA PRECEDENTE*

*Detectar el nivel de conocimientos matemáticos que tienen los alumnos a su ingreso a la carrera.*

#### *ETAPA CONSECUENTE*

*Efectuar una encuesta a los ingenieros en ejercicio, sobre el uso que tienen de la matemática en su labor profesional.*

Con la metodología se obtiene vinculación curricular interna (entre la matemática y las asignaturas de las ciencias básicas, la matemática y las ciencias básicas de la ingeniería, así como entre la matemática y las especialidades de la ingeniería). También se logra la vinculación curricular externa [entre el nivel medio superior y el nivel superior (universitario), el nivel superior con el nivel postgrado, así como entre la escuela y la industria, tomando como eje rector a la matemática].

Algunos de los constructos teóricos sobresalientes son los diferentes tipos de contenidos que se presentan, unos apoyan a las partes teóricas de la ingeniería, mientras que los otros a

los temas y conceptos de aplicación de la ingeniería, dando evidencia de en qué temas de la matemática se deberán desarrollar habilidades y destrezas matemáticas y en cuáles no es necesario desarrollarlas (Camarena, 2002<sub>a</sub>).

### **Fase de formación de profesores.**

La fase de formación de profesores o formación docente ha detectado las deficiencias de profesores que dan cursos de matemáticas y que su formación no es de matemáticos, constituyendo esto una de las grandes causas de las deficiencias de los estudiantes en matemáticas (Camarena, 2002<sub>b</sub>). Desde 1990 a través de una investigación se diseñó una *especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*, en donde las asignaturas de matemáticas se muestran vinculadas con otras disciplinas propias de la electrónica y sus ramas afines (Camarena, 1990). Como se muestra en el siguiente cuadro.

<b>Matemáticas en el contexto de la ingeniería electrónica</b>	
<b>Matemáticas</b>	<b>Ingeniería electrónica</b>
Introducción al Análisis Matemático de una variable real	Electrónica Básica
Cálculo Vectorial	Electromagnetismo
Álgebra Lineal	Control Electrónico
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Circuitos Eléctricos
Análisis de Fourier	Análisis de Señales Electromagnéticas
Probabilidad	Análisis de Señales Aleatorias
Procesos Estocásticos	Telefonía

Cuadro. Áreas vinculadas.

De hecho, la investigación arrojó cuatro categorías cognitivas que deberían incluirse en un programa de formación docente en matemáticas para el nivel universitario: Conocimiento sobre los estudios de ingeniería en donde laboran, Conocimiento de los contenidos a enseñar, Conocimiento sobre el uso de tecnología electrónica para apoyar el aprendizaje del estudiante y Conocimiento acerca del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Dentro de la última categoría se incluyen cursos sobre conocimiento científico y técnico, historia y fundamentos de la matemática, procesos de aprendizaje, la evaluación del aprendizaje, entre otros.

### **Fase epistemológica.**

En la fase epistemológica se han llevado a cabo investigaciones que han verificado cómo gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento y a través del tiempo pierden su contexto para ofrecer una matemática "pura" que es llevada a las aulas de clases sin que tenga sentido para los estudiantes que no van a ser matemáticos, como lo describe Chevallard (1991).

Con la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* se muestra que así como los contextos de otras ciencias le dan sentido y significado a la matemática, ésta, la matemática, le da sentido y significado a los temas y conceptos de las ciencias del contexto, reconceptualizándolos (Muro, 2002; Camarena, 1987).

Hay situaciones en donde el ingeniero emplea procesos o métodos sin conocer su origen, la fase epistemológica de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* pone a la luz estas génesis (Camarena, 1987), como el caso de las impedancias complejas en circuitos eléctricos.

También se ha determinado un constructo teórico denominado transposición contextualizada; en donde la matemática que han aprendido los estudiantes en la escuela

sufre transformaciones para adaptarse a la forma de trabajar de otras ciencias (Camarena, 2001<sub>a</sub>), como el caso de la delta de Dirac para modelar una señal eléctrica impulsiva.

Conocimiento erudito	Transposición ➔	Conocimiento a ser enseñado	Transposición ➔	Conocimiento a ser aplicado
Transposición Didáctica (Chevallard) contextualizada			Transposición	

Figura 2. Transposiciones

Como parte de esta etapa se cuenta con una serie de situaciones de matemática contextualizada para ser usadas en clase, como los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el contexto de los Circuitos Eléctricos (Camarena, 1987), Cálculo Vectorial en el contexto de la Teoría Electromagnética (Ongay, 1994), el Análisis de Fourier en el contexto del Análisis de Señales Electromagnéticas (Camarena, 1993), las Ecuaciones Diferenciales Parciales en el contexto de la cuerda vibrante (Camarena, 2004<sub>a</sub>), la Transformada de Laplace en el contexto de los Circuitos Eléctricos (Suárez, 2000), la Serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa (Muro, 2002), etc.

Los obstáculos epistemológicos, como han sido definidos por Brousseau (1983), se identifican en esta fase para ser usados en la planeación didáctica de los cursos, a través del diseño de actividades de aprendizaje que ayuden a enfrentar estos obstáculos.

**Fase didáctica.**

La fase didáctica contempla un proceso metodológico para el desarrollo de las competencias profesionales referidas a la resolución de eventos contextualizados, con la cual se fomenta el desarrollo de las habilidades para la transferencia del conocimiento, éste incluye tres etapas (Camarena, 2005<sub>a</sub>).

1. Presentar la estrategia didáctica de la *Matemática en Contexto* en el ambiente de aprendizaje.
2. Implantar cursos extracurriculares en donde se lleven a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, habilidades metacognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver problemas, así como actividades para bloquear creencias negativas.
3. Instrumentar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, en donde se resuelvan eventos reales de la industria.

En la primera etapa se presenta la estrategia didáctica denominada la *Matemáticas en Contexto* (Camarena, 1995), en donde se le presenta al estudiante una matemática contextualizada en las áreas del conocimiento de su futura profesión en estudio, en actividades de la vida cotidiana y en actividades profesionales y laborales, todo ello a través de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas o proyectos. En general el hablar de la *Matemática en Contexto* es desarrollar la teoría matemática a las necesidades y ritmos que dictan los cursos de la ingeniería.

La *Matemática en Contexto* contempla 9 etapas que se desarrollan en el ambiente de aprendizaje en equipos de tres estudiantes: Líder académico, líder emocional, líder de trabajo.

- 1.- Identificar los eventos contextualizados.
- 2.- Plantear el evento contextualizado.
- 3.- Determinar las variables y las constantes del evento.
- 4.- Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y solución del evento.
- 5.- Determinar el modelo matemático.
- 6.- Dar la solución matemática del evento.

- 7.- Determinar la solución requerida por el evento.
- 8.- Interpretar la solución en términos del evento y disciplinas del contexto.
- 9.- Presentar una matemática descontextualizada.

De las etapas mencionadas se tiene dos observaciones, una referida a la planeación didáctica y otra a la modelación matemática.

#### *Observación 1.*

Es importante hacer notar que los puntos 4 y 9 requieren de una planeación didáctica específica, en donde el docente diseñe actividades didácticas guiadas por los siguientes elementos (Camarena, 2004<sub>b</sub>):

- Tránsito entre los diferentes registros de representación. En la matemática se cuenta con los registros numérico, algebraico, analítico, contextual y visual, éste último incluye gráficas, diagramas, esquemas y dibujos, los cuales deben ser usados por el profesor para poder llegar a los diferentes estilos de aprendizaje de la matemática.
- Tránsito del lenguaje natural al matemático y viceversa. Se cuenta con una categorización de las representaciones en este tránsito: problemas con enunciado literal, problemas con enunciado evocador y problemas con enunciado complejo (Olazábal, 2003).
- Construcción de modelos matemáticos. Si el alumno no puede construir un modelo matemático de un evento a abordar, significa que no puede hacer la transferencia del conocimiento matemático a otras ciencias, por lo que es importante que este elemento forme parte de los hilos conductores de la enseñanza y del aprendizaje.
- Resolución de problemas contextualizados. Es necesario ayudar al estudiante a desarrollar las habilidades para abordar la resolución de problemas. De hecho, la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* toma como herramienta a la resolución de problemas y el aprendizaje a

través de proyectos, así como a sus elementos de formación: heurísticas, metacognición, creencias, etc.

- Argumentación, habilidad de conjeturar y partir de supuestos. Uno de los elementos formativos que ofrece la matemática es poder argumentar, conjeturar y saber seguir un proceso a partir de supuestos, sin que se desee formar como matemáticos a los futuros ingenieros, pero sí es deseable que desarrollen las habilidades formativas que otorga la matemática para un mejor desempeño profesional.
- Búsqueda de analogías. Las analogías que pueda usar el docente en clase ayudará a que el estudiante establezca los amarres a las estructuras cognitivas establecidas.
- Identificación de nociones previas. Si se conocen las nociones previas con que cuenta el estudiante, el docente podrá diseñar sus actividades a partir de éstas y apoyar la construcción de conocimientos significativos en el sentido de Ausubel (1990).
- Identificación de obstáculos. Los obstáculos se pueden clasificar en epistemológicos en el sentido que los maneja Brousseau, didácticos, los que provoca el profesor, cognitivos los que están inferidos a los conocimientos anteriores del estudiante y ontogénicos, aquellos que son inherentes a las características físicas y hereditarias del estudiante.
- El conocimiento se presenta en espiral. Es importante que el docente tome en cuenta este hecho, porque ello le abre el camino a estar repasando continuamente conocimientos que ya han sido tratados dentro del mismo curso o en estudios anteriores, lo cual apoya la construcción y reconstrucción del conocimiento.
- Uso de la tecnología electrónica. En el siglo en que vivimos la tecnología no puede estar fuera de nuestra actividad profesional, para el caso de la docencia es necesario que se incorpore como una herramienta tecnológica de apoyo al aprendizaje. En general no hay

tiempo en los espacios didácticos para incursionar en actividades didácticas que consuman los tiempos programáticos, se debe incursionar en la tecnología, usar plataformas tecnológicas educativas, foros de discusión, comunidades virtuales, etc., los cuales ayudan a extender los tiempos del aula.

El uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) permiten que el estudiante vaya a sus ritmos vitales, porque los tiempos cognitivos son diferentes a los tiempos didácticos. Además, le permiten retroceder o avanzar cuando quiera, repasando y reforzando los conocimientos.

#### *Observación 2.*

Una de las etapas centrales de la estrategia didáctica de la *Matemática en Contexto* es la elaboración del modelo matemático, situación que llevó a realizar investigaciones (Camarena, 2001<sub>b</sub>) que abordaran las siguientes interrogantes: ¿Qué es un modelo matemático?, ¿Qué es modelación matemática?, ¿Qué elementos cognitivos intervienen? y ¿Qué habilidades del pensamiento son indispensables para la modelación?

Para iniciar, se tiene que la matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en la ingeniería se puede representar a través de simbología matemática.

Es más, el que se represente a través de la terminología matemática y se haga uso de la matemática en la ingeniería, le ayuda a la ingeniería a tener carácter de ciencia por un lado y por el otro, le facilita su comunicación con la comunidad científica de ingenieros.

Dentro del conocimiento de la ingeniería, se tienen problemas de la ingeniería, asimismo, se tienen objetos de la ingeniería que para su mejor manejo o referencia se les representa matemáticamente y también se tienen situaciones que se pueden describir a través de la simbología matemática. Estos casos permitirán caracterizar a los modelos matemáticos.

A continuación se muestran ejemplos de cada caso.

### **a) Problemas**

Se quiere conocer el fenómeno de carga de un condensador (capacitor), cuya capacitancia es  $C$ , el cual está conectado en serie con un resistor de resistencia  $R$ , a las terminales de una batería que suministra una tensión constante  $V$ , este planteamiento se puede representar a través de la ecuación diferencial lineal siguiente:

$$R \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = V$$

Es de mencionar que bajo el término problema se están incluyendo los fenómenos que se presentan en la ingeniería, como la carga de un condensador, la caída libre de un cuerpo, el movimiento de un péndulo, etc.

### **b) Objetos**

Considérese una señal eléctrica del tipo alterno sinusoidal, la señal es el objeto de la ingeniería el cual se representa a través de la función:  $f(t) = A \sin(t + \phi)$

### **c) Situaciones**

El condensador de carga  $q=q(t)$  está totalmente descargado al inicio del problema. Esta situación se puede representar matemáticamente, tomando en cuenta que al inicio del problema  $t=0$  y que la carga es una función del tiempo, como:  $q(0)=0$ .

De los tres casos mencionados los que caracterizan a los modelos que se trabajan en esta investigación, son los objetos y los problemas, así la definición es: *Un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o problemas de la ingeniería.*

El análisis de problemas reales, de problemas trabajados en investigaciones de la ingeniería y problemas abordados en los textos de ingeniería, se clasifica a los modelos matemáticos según se muestra en la figura 3.

CARACTERIZACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS					
Modelaje de objetos de la ingeniería		Modelaje de problemas de la ingeniería			
La clasificación está en función del uso que le da la ingeniería		La clasificación está en función de las áreas cognitivas de la ingeniería			
Modelos estáticos	Modelos Dinámicos	Modelos de primera generación	Modelos de segunda generación	Modelos de tercera generación	Modelos de cuarta generación

Figura 3. Clasificación de los modelos matemáticos según su

De las etapas de la *Matemática en Contexto* y lo detectado en el análisis de los problemas estudiados para la investigación se construye la definición del término “modelación matemática”.

*La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto.*

Este proceso cognitivo consta de tres momentos, los que constituyen los indicadores de la modelación matemática:

1. Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante, que generalmente se encuentra implícito.
2. Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.
3. Validar la “relación matemática” que modela al problema, para lo cual hay que regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema. Dependiendo del problema, algunas veces se puede validar el modelo matemático a través de ver si la expresión

matemática predice la información otorgada o la información experimental. En otros casos, para validar el modelo, es necesario dar la solución matemática para ver que se predican los elementos involucrados.

Un punto importante de mencionar es que el modelo matemático no es único, hay varias representaciones matemáticas que describen el mismo problema, razón por la cual se hace necesaria la validación del mismo (tercer momento).

La forma de abordar (o resolver) matemáticamente el modelo matemático tampoco es única, elemento que permite verificar la versatilidad de la matemática, así como su consistencia.

*Elementos cognitivos* (Camarena, 2005<sub>b</sub>).

Para llevar a cabo la modelación matemática se hace necesario poseer los siguientes elementos cognitivos:

- Los enfoques de los temas y conceptos matemáticos del área del contexto. Cada tema y concepto matemático posee varios enfoques, por ejemplo, la derivada es un cociente de diferenciales, es un límite muy particular, es la operación inversa a integrar, es una razón de cambio, es la pendiente de la recta tangente a la curva, etc. Conocer estos enfoques es necesario para modelar.
- La transposición contextualizada. Es conocido el hecho de que el saber científico sufre una transformación para convertirse en un saber a enseñar, denominado transposición didáctica. El conocimiento que se lleva al aula sufre otra transformación para convertirse en un saber de aplicación, a lo que se denomina *transposición contextualizada*.
- El manejo conceptual de la matemática descontextualizada. Es importante que sea del conocimiento del alumno que la matemática es universal en el sentido de que es aplicable a varios contextos. Dentro de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* se concibe como matemática conceptual a aquella matemática si se tiene el concepto es porque se

puede transferir ese conocimiento, porque se conocen los diferentes enfoques de concepto, porque se conocen los puntos de control de error del concepto, porque se conocen los patrones de comportamiento del concepto cuando se mueven los parámetros que lo componen, porque se puede transitar entre los diferentes registros de representación del concepto, etc.

*Habilidades del pensamiento* (Camarena, 2005<sub>b</sub>).

Al igual que en los elementos cognitivos, a través del análisis de la instrumentación de problemas de cada área cognitiva de la ingeniería en electrónica se detectan las habilidades del pensamiento que entran en acción en la construcción del modelo matemático. Así, para llevar a cabo la modelación matemática es necesario desarrollar en el estudiante las siguientes habilidades del pensamiento:

- Habilidad para identificar los puntos de control de error, como elemento metacognitivo. Esta habilidad forma parte de tener una matemática conceptual, como se ha mencionado.
- Habilidad para transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Para este punto se puede ver la referencia de Olazábal (2003), quien hace una categorización de problemas de matemáticas contextualizadas respecto a la demanda de traducción del lenguaje natural al matemático.
- Habilidades para aplicar heurísticas. Las heurísticas como estrategias para abordar un problema, con la clasificación que otorga Nickerson (1994) a las dadas por Polya (1976).
- Habilidad para identificar regularidades. Entre las habilidades básicas del pensamiento, esta habilidad se hace notoria.
- Habilidad para transitar entre las diferentes representaciones de un elemento matemático. Se consideran las representaciones que describe Duval (1999): aritmética, algebraica, analítica y visual, incluyéndose la

representación contextual que maneja la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*.

- Habilidad para hacer "consideraciones" o "idealizar" el problema (cuando proceda). Hay problemas tan complejos que deben ser idealizados para poderse matematizar, en otras ocasiones es necesario hacer consideraciones, como controlar variables para poder lograr la matematización.

Nota. Se han tomado como sinónimos a modelación matemática, matematización y modelaje.

Con la estrategia didáctica de la *Matemática en Contexto* se cambia el paradigma educativo de enseñanza tradicional, ahora se trata de una enseñanza, con conocimientos integrados, y centrada en el aprendizaje. Dando los temas de matemáticas vinculados con las demás asignaturas que cursa el alumno y presentándolas al ritmo y tiempos que son requeridos por los estudiantes (Camarena, 1987). La *Matemática en Contexto* fortalece la reorganización cognitiva de conceptos y procesos matemáticos.

En la segunda etapa se instrumenta un curso extracurricular. Se formula a partir de la necesidad abordar problemas concretos en el aula. Cuando se usa como una herramienta la resolución de problemas (Polya, 1976), afloran los elementos de la resolución de problemas, como lo son las heurísticas, las habilidades del pensamiento, la metacognición y las creencias (Nickerson, 1994; De Bono, 1997; Santos, 1997; Herrera, 2003; Camarena, 2003<sub>a</sub>).

Las estrategias para abordar un problema en las diferentes partes del proceso de la resolución se les denomina heurísticas. El padre de las heurísticas fue Polya quien a través de preguntas como las que se muestran a continuación guía la resolución de problemas: ¿Con qué cuento?, ¿Qué me preguntan?, ¿Qué tipo de datos tengo?, ¿Tengo condicionantes?, ¿Cuáles son variables en mi problema y cuáles son constantes?, ¿Se podrá ver para casos particulares y después resolverlo para cualquier caso?, ¿Qué problema que ya he resuelto se parece a éste?, ¿Cuál es la

generalización del problema para ver si es más fácil de abordar?, ¿Qué analogías, semejanzas puedo encontrar con otros problemas?, ¿Puedo plantearlo de forma diferente para poder abordarlo?, Etc.

Cuando se resuelven problemas está presente un factor que es denominado metacognición. La metacognición es aquella parte del individuo que le hace ser consciente de su propio conocimiento, de saber si tiene o no todos los elementos cognitivos cuando resuelve un problema o tiene que ir a buscar en libros o consultar personas, etc. Cuando la persona está en el proceso de resolución de un problema la metacognición es el elemento que se encarga de que el individuo se pregunte a sí mismo si va por buen camino o no, es decir, hace que busque contradicciones, incongruencias o elementos que le den la pauta para decir que sí va bien, en la teoría de *la Matemática en el Contexto de las Ciencias* a esto se le denominan "puntos de control de error". También la metacognición está presente cuando el individuo va y verifica si el resultado obtenido satisface o no el problema planteado.

Las habilidades del pensamiento ayudan al entendimiento de las ciencias y a su vez las ciencias ayudan a desarrollar las habilidades del pensamiento en el individuo que las estudia. Las habilidades del pensamiento se clasifican en básicas y de orden superior.

Entre las habilidades básicas se encuentran: la observación, la identificación, la comparación, la clasificación, la jerarquización, la asociación, la inducción, la deducción, la síntesis, la memoria, etc.

Las habilidades más sobresalientes de orden superior son: la creatividad, el razonamiento (lógico, crítico, analítico, etc.), la contextualización (vincular diferentes disciplinas transfiriendo conocimientos), el modelaje matemático, la resolución de problemas, etc.

Es claro que las habilidades del pensamiento entran en juego en el proceso de resolución de problemas, pero también están presentes en este proceso las habilidades para aplicar

heurísticas, así como habilidades metacognitivas, todas ellas apoyando la transferencia del conocimiento.

Las creencias son un factor que puede actuar de forma positiva o negativa en el alumno. De hecho, los alumnos, al igual que cualquier persona poseen creencias negativas y creencia positivas, siendo las primeras las que los bloquean para actuar de forma eficiente y las segundas al contrario, ayudan a ser eficiente la resolver problemas.

Es menester mencionar que este tipo de cursos se han instrumentado durante un semestre, dando muestras de su éxito a través de los resultados de los estudiantes en donde su aprovechamiento escolar se encuentra favorecido y la motivación hacia los estudios de ingeniería se ha incrementado.

En la tercera etapa se instrumenta un taller integral e interdisciplinario con el objeto de resolver eventos reales de la industria. Esta etapa se considera como la culminación del proceso didáctico de la *Matemática en Contexto*, ya que aquí es en donde se verán reflejadas las acciones de transferencia del conocimiento fomentadas en las etapas anteriores.

La instrumentación de esta etapa, a diferencia de las anteriores, requiere de un grupo interdisciplinario de profesores que se comprometan con el proyecto. Por la complejidad que representan los eventos reales de la industria, en el taller participan estudiantes egresados en las ciencias de física y matemáticas, ya que se ha visto que el trabajo en equipo es más eficiente y trabajando entre pares de las mismas edades el lenguaje y la confianza son componentes favorables para la resolución de los eventos contextualizados.

### **Fase cognitiva.**

El sustento fuerte de esta fase está en la teoría de aprendizajes significativos de Ausubel (1990). Respecto a la fase cognitiva se ha determinado que el estudiante debe transitar entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir y asirse del conocimiento (Camarena, 2002<sub>c</sub>).

Se ha verificado a través de la *Matemática en Contexto* que el estudiante logra conocimientos estructurados y no fraccionados, logrando con ello estructuras mentales articuladas (Camarena, 1999). Esta situación se ha tratado a través de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, como ejemplo véase la tesis de doctorado de Muro (2004) en donde establece el campo conceptual de la serie de Fourier en la transferencia de masa de fenómenos químicos.

La *Matemática en Contexto* ayuda a que el estudiante construya su propio conocimiento con amarres firmes y duraderos y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades del pensamiento mediante el proceso de resolver eventos (problemas y proyectos) vinculados con los intereses del alumno (Camarena, 2003<sub>b</sub>).

Para mirar en los estudiantes el funcionamiento cognitivo de la *Matemática en Contexto*, también, se ha recurrido a analizar las funciones cognitivas, véase la tesis de doctorado de Zúñiga (2004).

Asimismo, se ha determinado que el factor motivación en el estudiante se encuentra altamente estimulado a través de la *Matemática en Contexto* y su desempeño académico como futuro profesionista se incrementa, es decir, la transferencia del conocimiento se puede establecer sin tantos tropiezos (Camarena, 2000).

## **Conclusiones**

Con la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* el estudiante tiende a hacerse responsable de su propio aprendizaje generándose habilidades para la autonomía en el aprendizaje y trabajo en equipo.

Con la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* se cambia el paradigma educativo que se centra en el profesor ante un paradigma centrado en el estudiante, donde el alumno construye el conocimiento.

Como parte de las conclusiones se puede mencionar que ésta es una teoría que nace en el nivel superior y baja a los niveles

anteriores, a diferencia de la mayoría de las teorías sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje que nacen en el nivel básico. Esta teoría contempla muchas de las variables que intervienen en el proceso educativo, al cual lo mira como un proceso social, y tiende a la construcción de una matemática para la vida.

El profesor debe tratar de realizar investigación educativa que le sirva en su actividad laboral para elevar la calidad académica de la educación porque la docencia y la investigación educativa van de la mano.

Es claro que es imposible ahondar en cada una de las cinco fases de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*, por lo que se le sugiere al lector interesado que consulte la bibliografía, que aunque no es toda la existente relativa a este tema, sí es suficiente como para tener un panorama de la teoría.

## Referencias

Ausubel David P., Novak Joseph D. y Hanesian Helen (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Brousseau G. (1983). *obstacle épistémologiques de la didactique des mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques, 7 (2).

Camarena G. Patricia (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena G. Patricia (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena G. Patricia (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G. Patricia (2000). Reporte del proyecto de investigación titulado: *Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2001<sub>a</sub>). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica*. Editorial ANUIES, México.

Camarena G. Patricia (2001<sub>b</sub>). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2002<sub>a</sub>). *Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería*. Revista: Innovación Educativa, Vol. 2, Núm. 10, septiembre - octubre (primera parte) y Núm. 11, noviembre - diciembre (segunda parte). México.

Camarena G. Patricia (2002<sub>b</sub>). *La formación de profesores de ciencias básicas en ingeniería*. Memorias del 3º nacional y 2º internacional: Retos y expectativas de la Universidad, México.

Camarena G. Patricia (2002<sub>c</sub>). Reporte de investigación titulado: *Los registros cognitivos de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2003<sub>a</sub>). *Las heurísticas disciplinarias y la matemática en contexto*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 16, tomo 2.

Camarena G. Patricia (2003<sub>b</sub>). Reporte de investigación titulado: *La matemática en el contexto de las ciencias: la resolución de problemas*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2004<sub>a</sub>). *La transferencia del conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales parciales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo I.

Camarena G. Patricia (2004<sub>b</sub>). Reporte de investigación titulado: *La matemática en el contexto de las ciencias y la didáctica disciplinaria*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2005<sub>a</sub>). Reporte de investigación titulado: *La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2005<sub>b</sub>). *La modelación matemática en las carreras universitarias*. IV Congreso Internacional Trujillano de Educación en Matemática y Física, Venezuela.

Camarena G. Patricia (2007). Reporte de investigación titulado: *La matemática formal en la modelación matemática*. ESIME-IPN, México.

Chevallard Y. (1991). *La transposición didáctica. El saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor S. A.

De Bono Edward (1997). *El pensamiento lateral, manual de creatividad*. Editorial Paidós.

Duval (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Herrera E. Javier y Camarena G. Patricia (2003). *Los modelos matemáticos en el contexto de los circuitos eléctricos y la metacognición*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 16, tomo II, Cuba.

Muro U. Claudia y Camarena G. Patricia (2002). *La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa*.

Revista "Científica" The Mexican Journal of Electromechanical Engineering. Volumen 6, No. 4.

Muro U. Claudia (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa*. Tesis de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional.

Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual*. Editorial Paidós M. E. C.

Olazábal B. Ana María y Camarena G. Patricia (2003). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto*. Memorias del Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas, México.

Ongay, Fausto (1994). *Apuntes de un curso de Cálculo Vectorial en el contexto de la Teoría Electromagnética*. Inéditos.

Polya G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Santos T. Luz Manuel (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Suárez B. Virginia y Camarena G. Patricia (2000). *La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 13.

Zúñiga S. Leopoldo (2004). *Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del concepto de función de dos variables y la derivada parcial en el contexto de la ingeniería*. Tesis de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional.



# **Intuición y rigor en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**

Uldarico Malaspina Jurado  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## **Resumen**

Se muestra que en el desarrollo de la matemática está presente la intuición interrelacionada con el rigor y se destaca su importancia en la educación matemática, como tema presente en la agenda de investigación contemporánea. Se propone encajar la intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) usando una metáfora vectorial en la que el proceso intuitivo se considera un vector con tres componentes que son tres de los 16 procesos primarios del EOS: idealización, generalización y argumentación. Finalmente, se enfatiza y se ilustra con ejemplos la importancia de hacer interactuar la intuición y el rigor en la resolución de problemas.

## **Introducción**

La relación de la matemática con la realidad es muy estrecha. Es un proceso dinámico que se da ante la necesidad de resolver problemas de la realidad, los aportes de la matemática para encontrar las soluciones, la construcción de modelos matemáticos con ese propósito, la verificación o nuevas aplicaciones de tales modelos en la realidad, la aparición de nuevos problemas, y así sucesivamente. La intuición juega un papel importante en este proceso y va acompañada o complementada con el rigor, también en una relación de mutua retroalimentación, pues lo que se intuye se formaliza para examinarlo con rigor y esto a su vez permite intuir nuevos resultados, que nuevamente se analizan con rigor, y así sucesivamente.

Es fundamental que estas relaciones dinámicas se tengan muy presentes y se evidencien en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en los diversos niveles educativos. En particular, es muy importante estimular el desarrollo de la intuición y su interacción con el análisis riguroso, en las sesiones de resolución de problemas.

### **Intuición y rigor en la historia de las matemáticas**

En la historia de las matemáticas hay casos notables en los que lo intuitivo antecedió a lo riguroso. Uno de los más destacables es el del cálculo infinitesimal, cuya formalización y presentación rigurosa se hizo en el siglo XIX, con Cauchy, Weierstrass y Dedekind, luego de una larga historia de aproximaciones y desarrollos intuitivos, como los de Eudoxo y Arquímedes (a.C.), Cavalieri, Torricelli, Fermat, Kepler, Huygens y Barrow, y los más difundidos – y más formalizados – de Newton en 1653 y de Leibnitz en 1684.

Es particularmente destacable el aporte de Fermat a la solución de los problemas de optimización, años antes de que se conozcan los métodos ahora tan difundidos del cálculo diferencial. Fermat, en el año 1637, publicó su *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Método para investigar máximos y mínimos), basado en las siguientes reglas, en las que se puede ver claramente que no hay el nivel de formalización y rigor actual, pero que las ideas son esencialmente las mismas y es fácil deducir su origen intuitivo:

- *Sea A un término relacionado con el problema.*
- *La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A;*
- *Se sustituye A por  $A+E$ , y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E;*
- *Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen “adiguales”, lo que significa algo así como “tan aproximadamente iguales como sea posible”;*
- *Los términos comunes se eliminan;*

- *Se dividen todos los términos por una misma potencia de  $E$  de manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a  $E$ ;*
- *Se ignoran los términos que aún contienen  $E$ ;*
- *Los restos se hacen iguales.*

(Andersen, 1984, p. 38)

También cabe mencionar que Jean Baptiste-Joseph Fourier en 1826 mostró métodos muy relacionados con los que se usan al resolver problemas de la programación lineal, que fue desarrollada a mediados del siglo XX.

*The theoretical insight given by this method is demonstrated as well as its clear geometrical interpretation. By considering the dual of a linear programming model it is shown how the method gives rise to a dual method. This dual method generates all extreme solutions (including the optimal solution) to a linear programme. Therefore if a polytope is defined in terms of its facets the dual of Fourier's method provides a method of obtaining all vertices (Williams, 1986, p. 681)*

Ciertamente, es natural atribuir a la intuición y al talento matemático la formulación de métodos que años – o siglos – más tarde aparecen como parte del desarrollo de una teoría rigurosamente formalizada.

Hechos como estos nos muestran la relación estrecha entre intuición y rigor, y han llevado a destacados personajes de la matemática a tomar posición respecto a este asunto. Baste mencionar a Félix Klein (Alemania, 1849 – 1925), destacado geómetra, autor del famoso programa de Erlangen, quien afirmó que “*En cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración*” (Perero, 1994, p. 101) y a L. E. J. Brouwer (Holanda, 1881 – 1966), matemático famoso, conocido ampliamente por su teorema del punto fijo y con significativos aportes a la topología, que es considerado

creador de la corriente matemática del intuicionismo. H. Poincaré (1932), ocupándose de la lógica y la intuición en las matemáticas, da una visión interesante al considerar dos tipos de espíritus matemáticos: *el lógico y el intuitivo*. Nos dice:

“Unos están preocupados ante todo por la lógica; al leer sus obras, se está tentado a creer que han avanzado paso a paso, con el método de un Vauban que dirige trabajos de aproximación contra una plaza fuerte sin abandonar nada al azar. Los otros se dejan guiar por la intuición y hacen desde el primer asalto conquistas rápidas, pero a veces precarias, como intrépidos guerreros” (p. 11)

### **Intuición y rigor en la educación matemática**

Si con intuición y rigor se va desarrollando la matemática, resulta obvio que la intuición y el rigor deben estar presentes en la formación matemática de nuestros estudiantes. Quizás lo más difundido es la importancia del rigor en la formación matemática, aunque no siempre las acciones concretas se orientan de la manera más adecuada y – seguramente con muy buenas intenciones – se han dado extremos enfatizando la formalización y el rigor en la educación básica, que no han contribuido realmente a lo que se pretendía y han sido ampliamente comentados por matemáticos y educadores. Ciertamente, no tiene sentido la matemática sin el rigor, pero éste debe ser cuidadosamente cultivado, sin quemar etapas e interactuando con la intuición. Es importante tener en cuenta que Mosterín (1980, p.16) considera tres niveles diferentes de precisión y rigor en el concepto de prueba: el intuitivo o ingenuo, el axiomático y el formalizado. Consideramos que el nivel de rigor exigible en la educación básica es fundamentalmente el primero y no pretender llegar al segundo sin haber puesto énfasis en el primero.

El rigor y la intuición están presentes en la discusión de temas actuales de la educación matemática, como lo demuestra la conferencia de David Tall (2005) en Bélgica: “A Theory of Mathematical Growth through Embodiment,

Symbolism and Proof”, en la cual plantea como una interrogante fundamental

*What are the respective roles of intuition and rigor?  
How could the requirements concerning both  
aspects be modulated?*

También, D. Tirosh y P. Tsamir se ocuparon del tema en su conferencia plenaria "Intuition and rigor in mathematics education" en el *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI* (Roma, marzo del 2008).

Hay numerosas experiencias didácticas y estudios de psicólogos y educadores que muestran la presencia de la intuición en el aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas. Hay aportes muy valiosos de Piaget y Fischbein y últimamente de D. Tirosh, P. Tsamir y R. Stavy.

### *Piaget*

En diversos escritos, en particular en su famosa obra "Seis estudios de psicología" (1992), Piaget distingue entre intuición primaria y articulada y las relaciona, sobre todo, con el paso de la etapa preoperatoria a la operatoria. La intuición juega un papel fundamental en su teoría de las etapas; en concreto, la intuición resulta básica para convertir las acciones en operaciones (acciones interiorizadas, reversibles). En la etapa preoperatoria, el niño suple la lógica por la intuición, simple interiorización de las percepciones y los movimientos en forma de imágenes representativas y de "experiencias mentales", que por tanto prolongan los esquemas senso-motrices sin coordinación propiamente racional. La intuición se basa más en lo perceptible que en la lógica: por ejemplo, para un niño de este periodo, una hilera de 10 fichas rojas y una hilera de 12 fichas azules, ambas de la misma longitud, tienen la misma cantidad de fichas, porque atiende al efecto óptico global, no a las distancias de las fichas entre sí.

En un estudio más extenso sobre la intuición (Piaget y Beth, 1980), Piaget reflexiona sobre las relaciones entre evidencia, intuición e invención. En su capítulo 9, en un amplio estudio, considera que existen intuiciones empíricas (como el peso) e intuiciones operatorias (el orden, la correspondencia término a término), que para él son las que tienen verdadero interés desde el punto de vista matemático. Este tipo de intuición la subdivide a su vez en intuiciones simbolizantes (por imágenes) y operatorias en sentido estricto y afirma que la primera se subordina a la segunda y que ésta se desarrolla ilimitadamente por el mecanismo de la “abstracción reflexiva”.

### *Fischbein*

Efraim Fischbein es uno de los psicólogos que más estudió aspectos de la educación matemática y en el libro “Intuition in science and mathematics” que publicó en 1987 esboza una “teoría de la intuición” que constituye para la comunidad de investigadores una herramienta muy útil para la interpretación de fenómenos en educación. En él, el término “intuición” es usado como equivalente a *conocimiento intuitivo*; es decir, no como una fuente o un método, sino como un tipo de cognición. Fischbein aclara que no debe confundirse intuir con percibir. Lo segundo es una cognición inmediata. Intuir va más lejos de los hechos dados, implica una extrapolación más allá de la información directamente accesible. En una definición preliminar, establece que

*“...intuitive cognition is characterized by self evidence, extrapolativeness, coerciveness and globality.”*

(Fischbein, 1994, p. 14)

Al clasificar las intuiciones según su origen, considera como *primarias* aquellas que se desarrollan en cada individuo como consecuencia de sus propias experiencias personales, independientemente de cualquier instrucción sistemática y como *secundarias* las que no tienen un origen natural, en la

experiencia normal de una persona cualquiera, sino que surgen por influencia de instrucciones sistemáticas, del aprendizaje de conceptos, propiedades o resultados y de razonamientos más avanzados. Fischbein afirma que “la categoría de intuiciones secundarias implica asumir que se pueden desarrollar nuevas intuiciones con raíces no naturales” (Fischbein, 1994, p. 68) y más adelante cita a Patrick Suppes, refiriéndose a la importancia de desarrollar intuiciones para encontrar y dar demostraciones matemáticas:

*Put in another way, what I am saying is that I consider it just as necessary to train the intuition for finding and writing mathematical proofs as to teach intuitive knowledge of geometry or of real number system (Suppes, 1966, p. 70)*

### *Reglas intuitivas*

Es importante tener en cuenta que la intuición también puede conducir a conclusiones incorrectas y que hay investigaciones al respecto. Algunas de ellas las podemos encontrar en Stavy, Babai, Tsamir, Tirosh, Fou-Lai Lin y Macrobbe, 2006. Estos investigadores están desarrollando una teoría sobre reglas intuitivas. Basados en sus observaciones a las respuestas de niños, de diversas edades y lugares, a tareas de física, química, biología, y matemáticas han identificado tres reglas intuitivas que las denominan:

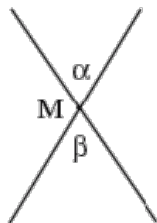
- más A – más B,
- misma A – misma B, y
- todo puede ser dividido inacabablemente

y afirman que muchas respuestas incorrectas están relacionadas con ellas.

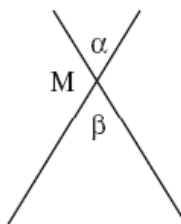
A modo de ilustración sobre la primera regla, resumimos un ejemplo que los autores comentan en el citado artículo:

Cuando a niños de 14 a 15 años se les presenta un gráfico como el que se muestra en la figura 1a, un altísimo porcentaje sostiene que los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales; sin embargo,

cuando se les presenta un gráfico como el que se muestra en la figura 1b, un alto porcentaje afirma que  $\beta$  es mayor que  $\alpha$ , influenciado por la mayor longitud de los segmentos que forman  $\beta$



**Figura 1<sup>a</sup>**

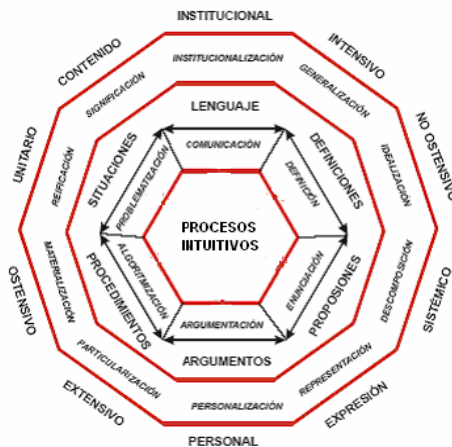


**Figura 1<sup>b</sup>**

### *Enfoque ontosemiótico*

*El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática* (conocido como EOS), desarrollado por investigadores contemporáneos de la educación matemática como Juan D. Godino, Vicenç Font y Carmen Batanero, entre otros, es un valioso marco teórico de tipo holístico que también permite investigar integradamente el rigor y la intuición. El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida; como lenguaje simbólico; y como sistema conceptual lógicamente organizado. Algunos constructos del EOS son los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos, las configuraciones epistémicas y las cognitivas, las facetas duales, los procesos matemáticos, los criterios de idoneidad y la metodología. Hay amplios desarrollos de este enfoque en Godino Batanero y Font (2007); Font (2007); Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006); y D'Amore y Godino (2007); y un resumen en Malaspina (2008).

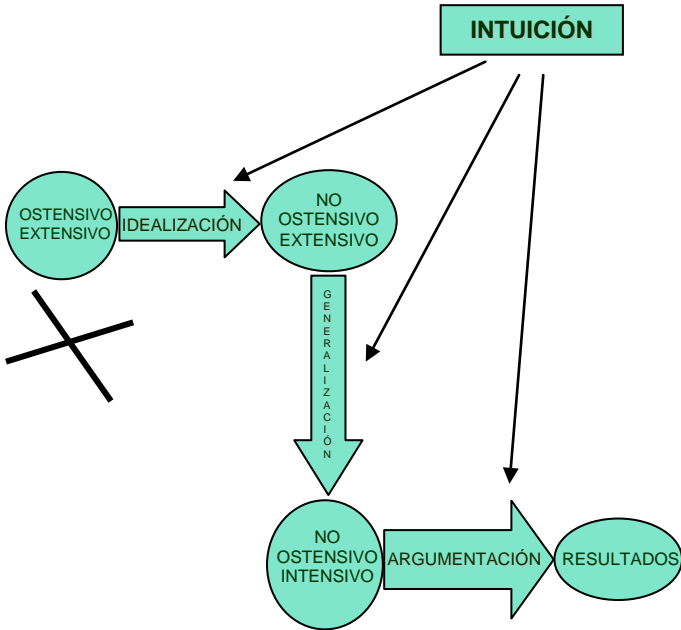
En el EOS, una de las maneras de estudiar la relación entre un determinado proceso, con otros procesos, consiste en situar el proceso que nos interesa – en este caso los procesos intuitivos – en el centro de una figura con un hexágono y dos decágonos (figura 2), para relacionarlo con los procesos de problematización, comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización, y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización / personalización; generalización / particularización; descomposición / reificación; materialización / idealización; representación / significación). Esta es una técnica que ya se ha seguido para estudiar los procesos metafóricos en el marco del EOS (Acevedo, 2008) o el proceso de resolución de problemas (Gusmao, 2006).



**Figura 2.** Los procesos intuitivos en el EOS

En este gran marco, y observando la figura 3, podemos ver aspectos de la intuición presentes en tres procesos fundamentales considerados en el EOS: la *idealización*, cuando un ostensivo extensivo (por ejemplo un par de trazos rectilíneos que se intersecan en un punto; que es ostensivo por ser percibido claramente y es extensivo por ser un caso específico) pasa a ser un no ostensivo extensivo, al considerar

los trazos como segmentos de recta o como rectas, manteniendo su carácter de específico; la *generalización*, cuando el no ostensivo extensivo pasa a ser un no ostensivo intensivo, al considerar que



**Figura 3**

los trazos representan a cualquier par de rectas con un punto de intersección (la intuición permite ver lo general en lo particular); y la *argumentación*, al obtener como resultado, que cuando dos rectas cualesquiera se intersecan en un punto, quedan determinados dos pares de ángulos opuestos y que los ángulos de cada par tienen la misma medida.

De lo observado, podemos afirmar que, en nuestra opinión, la manera de encajar la intuición en el EOS consiste en utilizar una metáfora vectorial en la que el proceso

intuitivo se considera un vector con tres componentes (alguno de ellos podría ser “cero” en algunos casos), los cuales serían tres de los 16 procesos primarios del EOS: idealización, generalización y argumentación:

*Intuición = (idealización, generalización, argumentación)*

### **Intuición y rigor al resolver problemas**

Siendo la resolución de problemas un aspecto esencial de la matemática, la intuición y el rigor deben estar presentes al resolver problemas. Es tarea de los docentes estimular la interacción entre intuición y rigor, de modo que haya una retroalimentación positiva. Una primera aproximación intuitiva puede ser potenciada con un adecuado nivel de formalización y la búsqueda del rigor en las afirmaciones; y éstas, a su vez, pueden inducir a intuir la solución de otras partes del problema, de otras formas de resolverlo, o llevar al convencimiento de que la conjetura inicial, basada en una mirada intuitiva, no es la correcta. Y así es la actividad matemática. Reducir la resolución de problemas a la aplicación de ciertas reglas o rutinas, es recortar la creatividad, el desarrollo de la intuición y el pensamiento matemático. Es, pues, muy importante un adecuado equilibrio entre intuición y rigor. Mostraremos algunos casos para ilustrar que la preocupación por la formalización, el rigor y la intuición no siempre es adecuadamente orientada, desfavoreciendo el estímulo a la intuición.

#### *Problema 1*

Llamamos “paso” aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Mostramos la solución de un alumno que cursaba el segundo ciclo de estudios de ingeniería

2) Se consideran los "a" pasos cuando se multiplica x2  
y "b" pasos cuando se resta 3, entonces:

$$a + b = \text{mínimo} \Rightarrow 11 + 2a - 3b = 25$$
$$2a - 3b = 14$$

$\downarrow$                        $\downarrow$

(7)                      0

$\Rightarrow$  El mejor número de pasos es 7

Se percibe que hay uso de lenguaje formalizado y una intención de ser riguroso, quizás por influencia de los cursos universitarios de matemática ya aprobados, pero que tal actitud no está complementando una reacción natural ante este problema, de ubicarlo en un contexto aritmético y tantear algunas posibilidades calculando alguna secuencia de pasos. Así, no llega a percibir que su formalización no está reflejando o modelizando la situación planteada. Si bien es cierto que cuando  $a$  y  $b$  son no negativos y cumplen que  $2a - 3b = 14$ , entonces el mínimo valor de  $a + b$  es 7, con  $a = 7$  y  $b = 0$ , al aplicar 7 veces el paso "multiplicar por 2", partiendo del número 11, no se llega a 25. Esta "solución formal" estaría alejando al estudiante de una proposición fácilmente intuible, según la cual es imposible llegar a 25 partiendo de 11 y aplicando varias veces solo uno de los pasos descritos.

Esto nos hace ver lo importante que es comprender bien el problema y dejar que la intuición intervenga desde esta fase indispensable para resolverlo. En las experiencias tenidas, ha sido más productiva la formalización acompañada de la intuición.

## *Problema 2*

A continuación reproducimos una página que aparece en un texto de tercer grado de secundaria<sup>1</sup> y en otro texto de cuarto grado de secundaria<sup>2</sup> con una situación-problema contextualizada. El propósito es ilustrar que tal situación se modeliza y se resuelve con una función cuadrática y que es importante la obtención de un valor maximizante. Ciertamente la intención es buena, pero ya la situación planteada no es muy motivadora – en la perspectiva del estudiante – pues se pide encontrar “la cantidad de estudiantes que debe ir a una excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio”, lo cual, cuando se organiza una excursión, normalmente, no es algo que tenga especial interés para los estudiantes.

Luego de la página reproducida hacemos algunos comentarios.

---

<sup>1</sup> Veiga, A. et al (2004). CL@VES.COM 3 Matemática 3° de secundaria. Lima: Santillana, p. 291

<sup>2</sup> Mina, D. et al (2005). Matemática 4. Lima: Santillana, p. 24

## Análisis de problemas sobre funciones cuadráticas

Muchas situaciones requieren de la aplicación de las funciones cuadráticas para poder solucionarlas. Frecuentemente es necesario averiguar en qué condiciones estas funciones alcanzan un valor **máximo** o un valor **mínimo**.

### Ejemplo 19

Los alumnos de un colegio quieren ir de excursión. Una empresa de turismo les cobra \$f. 70 por persona si van 40 alumnos y les rebaja \$f. 1 por persona por cada alumno adicional. Además, acepta que viajen 65 alumnos como máximo y no la organiza si viajan menos de 40. Determinamos la cantidad de alumnos que deben ir de excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio.

- Elaboramos una tabla para obtener una expresión que nos permita hallar el precio total que cobra la empresa de turismo según la cantidad de alumnos que van de excursión.

CANTIDAD TOTAL DE ALUMNOS	PRECIO POR ALUMNO (\$f.)	PRECIO TOTAL (\$f.) $\rightarrow f(x)$	
Si van 40 alumnos:	40	70	$40 \cdot 70$
Si va 1 alumno más:	$40 + 1$	$70 - 1$	$(40 + 1)(70 - 1)$
Si van 2 alumnos más:	$40 + 2$	$70 - 2$	$(40 + 2)(70 - 2)$
Si van 3 alumnos más:	$40 + 3$	$70 - 3$	$(40 + 3)(70 - 3)$
Si van $x$ alumnos más:	$40 + x$	$70 - x$	$(40 + x)(70 - x)$

Observamos que el precio total depende de la cantidad de alumnos  $x$  que vayan.

- Resolvemos  $f(x) = (40 + x)(70 - x)$  y obtenemos  $f(x) = -x^2 + 30x + 2\,800$ .
- Como queremos averiguar el mayor precio total que puede cobrar la empresa de turismo por la excursión, buscamos el **máximo** de la función.
- Como la cantidad total de alumnos no puede ser mayor que 65, averiguamos la cantidad de alumnos  $x$  que podrían ir:

$$40 + x \leq 65 \rightarrow x \leq 25 \rightarrow D(f) = [0; 25] \text{ alumnos}$$

- Hallamos los puntos de intersección de la parábola con el eje  $X$ :

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(-1)(2\,800)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{30 \pm 110}{-2} \rightarrow x_1 = -40 \text{ y } x_2 = 70$$

- Hallamos la abscisa del vértice:

$$x = \frac{-40 + 70}{2} = 15$$

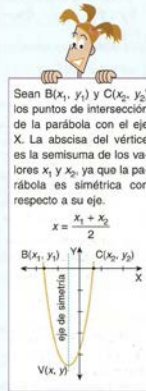
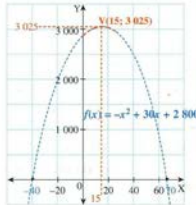
- Hallamos la ordenada del vértice:

$$f(15) = -(15)^2 + 30(15) + 2\,800 = 3\,025$$

Entonces el punto máximo de la función es  $V(15; 3\,025)$ , vértice de la parábola.

- Interpretamos: El mayor precio total (\$f. 3 025) se puede cobrar cuando viajan 15 alumnos más.

Para que la empresa de turismo realice el mejor negocio, deberán ir de excursión  $40 + 15 = 55$  alumnos. En este caso, obtendrían \$f. 3 025.



Sean  $B(x_1, y_1)$  y  $C(x_2, y_2)$  los puntos de intersección de la parábola con el eje  $X$ . La abscisa del vértice es la semisuma de los valores  $x_1$  y  $x_2$ , ya que la parábola es simétrica con respecto a su eje.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

## Comentarios:

- En general se percibe un procedimiento formal y rígido.
- La inducción que se hace para obtener la expresión general de la función cuadrática correspondiente, la consideramos adecuada.

3. La descripción de la variable  $x$  no corresponde con el uso que se hace de esta variable en la tabla para inducir la función. La variable  $x$  no representa “la cantidad de alumnos que vayan”, como se dice a continuación del cuadro, sino la cantidad adicional de alumnos, sobre 40, que podrían ir a la excursión. (Como se dice respecto al valor maximizante, 15, en los párrafos finales).
4. El valor maximizante de la variable se obtiene usando la propiedad de ser semisuma de las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje X. Propiedad cierta pero innecesaria en este caso (se enuncia al margen, sin argumento alguno). Para hallar tales puntos de intersección se resuelve la ecuación cuadrática empleando la fórmula general, a pesar de que la forma original de la función es un producto de dos binomios de primer grado, lo cual permite obtener inmediatamente las raíces de la ecuación cuadrática.
5. Consideramos que para ilustrar que la función alcanza un valor máximo para un determinado valor de la variable, es más adecuado expresar la función cuadrática completando un binomio al cuadrado:

$$f(x) = -x^2 + 30x + 2800 = 3025 - (x - 15)^2$$

Así, siendo  $(x - 15)^2 \geq 0$ , a 3025 “siempre se le quita algo” salvo que  $(x - 15)^2$  tenga el valor cero; es decir, cuando  $x = 15$ , que es, entonces, el valor maximizante de la variable. De este modo, se observa que el valor máximo alcanzable por  $f(x)$  es 3025 y se usa un razonamiento que favorece la intuición.

6. Antes de hacer un desarrollo formal para la obtención del valor máximo, sería ilustrativo y estimulante de la intuición optimizadora, hacer conjeturas sobre la existencia de un valor maximizante o minimizante de la variable. Observar

en el contexto del problema, mostrando tablas y haciendo gráficas, por ejemplo, que al dar valores crecientes a la variable los valores crecen y luego decrecen, lo cual hace intuir un valor maximizante que se puede conjeturar e ir aproximando. Así se brindaría oportunidades para usar el ensayo y error, el cálculo mental y la calculadora, y para mostrar las ventajas de la modelización y de los recursos algebraicos.

Estas son dos muestras del poco cuidado que se pone en la resolución de problemas a la intervención y al estímulo de la intuición. Es, pues, muy importante que los profesores tengan experiencias de sesiones de resolución de problemas en las que se convengan de lo mucho que se puede aprender – matemática y didácticamente – si las dificultades se van proponiendo gradualmente y con preguntas adecuadas; si se deja tiempo para pensar, conjeturar y desarrollar diferentes maneras de resolver un problema; si se resuelven problemas en grupos; si a partir de un problema se crean nuevos problemas intuyendo generalizaciones o considerando casos particulares; en fin, estimulando que la creatividad y la intuición fluyan y se complementen con la formalización y el rigor. Con estas perspectivas y con problemas concretos para diversos niveles educativos, se muestran y desarrollan ejemplos en Malaspina, U., 2005, 2006, 2007 y 2008b.

## **Referencias**

Acevedo, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. España.

Andersen, K. (1984). *Las técnicas del cálculo, 1630-1660. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Grattan-Guinness (comp.). Madrid: Alianza Universidad.

D'Amore, B. y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(2), 191-218.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics*. Holland: Reidel Publishing Company. Second printing.

Godino, J. D., Batanero, C y Font, V. (2007). The Onto Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 117-150.

Gusmao, T.R.S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Tesis doctoral, Universidade de Santiago de Compostela. España.

Malaspina, U. (2005) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 1 al 4. <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>

Malaspina, U. (2006) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 5 al 8. <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>

Malaspina, U. (2007) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 9 al 12. <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>

Malaspina, U. (2008) *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2008b) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 13 al 15. <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php>

Mosterin, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona: Ariel.

Perero, M. (1994) *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Piaget, J.(1992). *Seis estudios de psicología*. Labor: Barcelona

Piaget, J. y Beth, E.W. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Crítica, Grupo Editorial Grijalbo.

Poincaré, H. (1932). *La valeur de la science*. París: Flammarion.

Stavy, R. et al (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education* 4: p. 417 – 436

Tall, D. O. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg. 11, 195–215.

Williams, H. (1986). Fourier's Method of Linear Programming and its Dual. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 9, pp. 681-695.

# **CURSOS**



# Marcos de referencia para la investigación en Didáctica de las Matemáticas

Cecilia Gaita Iparraguirre  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## Resumen

A través del curso, los participantes reflexionaron sobre el objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática y sobre los principios en los que se basan algunas de las aproximaciones teóricas actuales de esta disciplina. Esto, con la finalidad, de ofrecer un panorama para el desarrollo de futuras investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas. Se trataron específicamente los siguientes marcos de referencia: Registros de Representación Semiótica, la teoría APOE, la teoría de Situaciones Didácticas, la teoría Socioepistemológica y se comentó sobre el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Para ello se revisaron investigaciones que fueron realizadas teniendo, como soporte teórico, algunos de los enfoques señalados.

**Palabras clave:** Marcos de referencia, Didáctica de la matemática.

La Didáctica de la Matemática es una disciplina científica emergente y cuenta con un gran número de seguidores interesados en distintos aspectos propios de esta disciplina. Como resultado de estos trabajos, se han desarrollado diversos grupos de investigación que apoyan sus trabajos en marcos teóricos distintos. Sin embargo, pocos autores se han dedicado a estudiar el estado actual de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica y a organizar los distintos paradigmas de investigación existentes. En esta línea, son relevantes los trabajos realizados por Godino (2003), Font (2002) y D'Amore (2006).

Dado que los participantes no habían tenido contacto con enfoques propios de la Didáctica de la Matemática sino solamente con teorías generales sobre el aprendizaje, se consideró necesario seleccionar algunos de los principales paradigmas de investigación de este campo en desarrollo y presentar ejemplos basados en investigaciones para ilustrar los principios en los que se basan así como ejemplos para su aplicación.

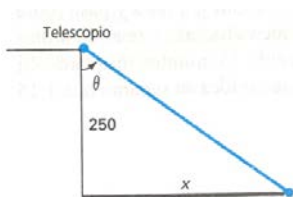
Previo a este trabajo, se reflexionó sobre el campo de interés de la Didáctica de la Matemática. Para ello, se citó a Godino (2003) quien propone que los diversos trabajos que se han realizado buscando una mejora del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se pueden agrupar en los siguientes campos:

- i. Aquellos que resultan de la experiencia y de la reflexión sobre esta práctica por parte del docente de matemáticas. Estos trabajos pueden derivar en propuestas didácticas que tienen un sustento empírico.
- ii. Aquellos que se producen teniendo en cuenta los conocimientos científicos disponibles, es decir, materiales y recursos que han sido elaborados bajo el sustento de algún marco de referencia en la Didáctica de la Matemática.
- iii. Aquellos que se dedican a comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos específicos (formados por el profesor, los estudiantes y el conocimiento matemático). Estos corresponden al grupo que se denomina de *investigación científica*.

Estos tres campos se interesan por el funcionamiento de los sistemas didácticos; sin embargo, tienen características que los diferencian. Mientras que en el primero se realizará una aplicación inmediata de las propuestas, en el segundo caso se requerirá una revisión cuidadosa de los resultados obtenidos en el tercero y estos se adaptarán para convertirse en tecnología didáctica. Godino plantea que el foco de atención

de la investigación en Didáctica de la Matemática son únicamente los trabajos descritos en ii) y iii).

Esta clasificación se ilustró con algunos ejemplos. El siguiente problema fue tomado del texto de Purcell (1992) y corresponde al capítulo 3, *La derivada*, en la sección *Razones afines*.



*Una mujer, de pie en un acantilado, observa con un telescopio un bote de motor, cuando el bote se aproxima a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está 250 pies arriba del nivel del agua y si el bote se acerca a 20 pies por segundo, ¿con qué rapidez cambia el ángulo del telescopio con respecto al bote cuando éste se encuentra a 250 pies de la playa?*

Luego de revisar el texto de Purcell, se observó que previamente al problema señalado se habían resuelto otras situaciones contextualizadas que involucraban la noción de razón de cambio y luego se había dado un algoritmo para abordar problemas de este tipo. Es decir, hubo una intención de contextualizar la matemática con la finalidad de motivar al estudiante y de mostrar la utilidad de esta disciplina. Esta misma finalidad puede ser la perseguida por un docente que incorpora actividades como ésta en clase. Sin embargo, nuestra experiencia nos ha mostrado que al proponer a los estudiantes problemas de razón de cambio contextualizados, estos presentan grandes dificultades en la comprensión de los enunciados y en el tránsito entre los diversos tipos de registros que están involucrados en su solución. Consideramos que este último aspecto no ha sido contemplado por quienes han diseñado este capítulo del texto. Las investigaciones teóricas en el campo de los Registros de Representación podrían reorientar la propuesta del texto de modo que en un trabajo previo se ponga énfasis

en el tránsito del registro verbal al gráfico y luego al algebraico.

De esta manera, de una propuesta didáctica que no toma en cuenta las dificultades en el aspecto cognitivo, se puede elaborar una que sí contemple los obstáculos que se producen al cambiar de registro y que, apoyada en los resultados de la investigación científica, regrese nuevamente al aula para evaluar su eficiencia.

Como ejemplo de esta situación, se revisó el documento presentado por Cortez (2 008) en el que, teniendo como base los resultados del conocimiento científico, se realiza una propuesta para el diseño de un software que ayude a comprender el concepto de derivada. En el trabajo se hace referencia a estudios realizados por Duval (1993), quien define un Registro semiótico de representación como: *“un sistema de representación semiótico que permite tres actividades cognitivas fundamentales que son: La formación de una representación identificable, la transformación interna de una representación (tratamiento) y la transformación de una representación semiótica a otra representación semiótica (conversión)”* . Se menciona también el trabajo de Hitt (1995 p.63) en donde se comprueba que la conversión de un registro semiótico de representación a otro, causa un conflicto que no es trivial.

Estos resultados han sido empleados para la construcción de un software educativo en el que se presentan diferentes registros semióticos de representación. En particular, en la propuesta se enfatiza en el tratamiento numérico y gráfico del concepto de razón de cambio, ya que era este tipo de representaciones las que eran poco atendidas en los textos y en el aula. La influencia de la investigación científica en este trabajo también se observa en la propuesta de la secuencia de actividades; así, mientras que en los textos tradicionales este tema es una aplicación dentro del capítulo de derivadas, en el artículo señalado, se le ubica como un tema previo cuyo tratamiento motivará la formalización del concepto de derivada.

En el ejemplo presentado, se hizo referencia a uno de los marcos teóricos en Didáctica de la Matemática que enfatiza el aspecto cognitivo, la teoría de Registros de representación. Siguiendo en esta misma línea, se discutieron los principios básicos de la teoría APOE.

### **Otro marco teórico de corte cognitivo**

La teoría APOE parte de la premisa que una persona aprende matemáticas a través de la construcción, reconstrucción y organización de procesos y objetos mentales. Tiene su origen en la teoría psicogenética de Piaget. Concibe el conocimiento matemático como la tendencia de un individuo a responder ante cierta clase de situaciones problema.

Esta teoría afirma que es posible clasificar las construcciones mentales que se realizan en el aprendizaje de un determinado concepto matemático; en esta clasificación se proponen los siguientes niveles: acción, proceso, objeto y esquema<sup>1</sup>; incluso en algunas investigaciones se ha considerado necesario definir un nivel previo al que se ha denominado pre-acción. Para la identificación del nivel en el que se encuentra un individuo respecto a un determinado objeto matemático se deben fijar previamente las tareas que debe ser capaz de resolver.

Para ilustrar este enfoque se recurrió a la investigación realizada por Barbosa (2003) que hace referencia al aprendizaje de inecuaciones. A continuación se presentan algunas conclusiones de este estudio. Como se mencionó, es necesario asociar a los distintos niveles, tareas que den cuenta de haber alcanzado dicho estatus. Así, se señala que un individuo se encuentra en el nivel de:

- Pre acción si resuelve una inecuación como si fuera una ecuación.
- Acción si puede evaluar una expresión algebraica en determinado valor, si puede dar valores específicos a la

---

<sup>1</sup> Información tomada del Glosario APOS.

variable para determinar si satisface la inecuación, si puede resolver una inecuación que requiere aplicar la fórmula cuadrática, por ejemplo. En general, si realiza una manipulación repetible, física o mentalmente, que transforma objetos para obtener objetos.

- Proceso si puede señalar los pasos que seguiría para resolver una inecuación con radicales, sin tener que realizarlos; si puede reconocer que la expresión  $x^2 + 1$  siempre será positiva. Es decir, si puede repetir una acción y reflexionar sobre ella.
- Objeto si analiza competentemente cuando dos inecuaciones distintas son equivalentes, cuando visualiza las inecuaciones desde el enfoque de las funciones o cuando distingue qué propiedades de los números reales pueden ser aplicadas a una ecuación pero no a una inecuación. En general, se encuentra en el nivel de objeto si reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso específico y adquiere una conciencia de su totalidad, se perciben qué transformaciones pueden actuar sobre él y se es capaz realmente de construirlas. Esto se expresa también diciendo que se encapsuló o reconstruyó ese proceso como un objeto.
- Esquema si puede interpretar y relacionar los conceptos de variable real, conjunto solución, funciones, gráficas de funciones, etc. Y también se puede resolver inecuaciones señalando por qué se reescriben de otra manera, cómo y por qué se pueden aplicar ciertas propiedades de los números reales, etc. Como se observa, el nivel de esquema abarca una colección individual de acciones, objetos y procesos a los que se pueden añadir otros esquemas previamente construidos. Hay conexión en la mente del individuo entre las diversas estructuras involucradas.

Es importante notar que esta clasificación de tareas no es única y dependerá del investigador, quien teniendo como base los supuestos de la teoría APOE, hará la descomposición genética del concepto en estudio. Este es el primer paso en la

metodología RUMEC, establecer en términos de las construcciones mentales lo que un aprendiz puede hacer en orden a desarrollar la comprensión del concepto. Al resultado de este análisis netamente teórico se le denomina descomposición genética para ese concepto.

### **Una aproximación sistémica**

Como se puede observar, las dos teorías comentadas hasta el momento, la teoría de Registros de representación y la teoría APOE, centran su atención en el estudiante y en los procesos mentales que intervienen cuando estos aprenden matemáticas. Sin embargo, no es este el único foco de atención en el que se puede centrar un investigador en Didáctica de la Matemática. Para ilustrar mejor esta afirmación, se presentó un marco de investigación que aborda el problema del aprendizaje de la matemática desde una perspectiva sistémica; este marco centra su atención en la triada alumno-saber-profesor.

La teoría de Situaciones, desarrollada por Guy Brousseau, parte de la premisa que “el estudiante aprende adaptándose a un medio que tiene dificultades, contradicciones y desequilibrios, interactuando con una problemática y con el docente; y produciendo nuevas relaciones entre los conocimientos”, Brousseau (1997). En este proceso de aprendizaje cumple un papel fundamental la situación didáctica, entendida como un conjunto de relaciones establecidas entre el alumno, el profesor y el entorno para aprender algún conocimiento. Así, como resultado del planteamiento de una situación problema (situación fundamental), seleccionada adecuadamente por el profesor para dar origen al concepto que se espera estudiar, se producirán diversas situaciones didácticas: situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización.

Brousseau plantea como ejemplo, para ilustrar estas distintas situaciones didácticas, un juego al que denomina la carrera al 20. Consiste en lo siguiente:

*El juego se juega en parejas. Cada jugador tratará de decir “20” añadiendo 1 ó 2 unidades al número dado por el otro jugador. Se empieza diciendo 1 ó 2. Gana el primer jugador que dice 20.*

El desarrollo de la actividad es el siguiente: Se propone a los estudiantes que jueguen (situación de acción) y que luego, en grupos, identifiquen si existen estrategias ganadoras (situación de formulación). Se pide a la clase que enuncien afirmaciones relacionadas con las estrategias ganadoras identificadas, que traten de demostrarlas y que si consideran que alguno de los grupos realiza una afirmación incorrecta, la refuten (situación de validación). Como cierre de la actividad, el maestro institucionalizará, en este caso, el concepto de estrategia ganadora. La finalidad de trabajos como este será que los estudiantes puedan enfrentarse a situaciones adidácticas, es decir, a problemas que deban resolver exitosamente de manera autónoma, sin la guía del maestro.

### **Una aproximación desde las prácticas sociales**

A diferencia de los posicionamientos teóricos descritos que centran su atención en el aspecto cognitivo o en la triada alumno-saber-profesor, a fines de la década de los ochenta surgió una aproximación teórica que, sin descuidar al objeto matemático como foco de atención, centró su interés en la producción de dicho conocimiento y, sobre todo, en el papel que juegan en este proceso las prácticas sociales. Esta aproximación recibió el nombre de Socioepistemología y se plantea el examen del conocimiento matemático social, histórica y culturalmente situado, poniendo especial atención a las circunstancias que propiciaron su construcción y su posterior difusión (Cantoral et al., 2006).

Luego, adoptar esta postura implica reformular las preguntas de investigación en los aspectos cognitivo, didáctico y epistemológico, teniendo como base la componente social. Así, el aspecto cognitivo deberá ahora ser guiado por la pregunta *cómo los estudiantes y el profesor, interactivamente, construyen identidades, significados, sus realidades y su propia cognición*. El

aspecto didáctico abordará cuestiones relativas a *los contextos argumentativos que se proponen a los estudiantes y las formas y mecanismos para argumentar y llegar a consensos*. Finalmente, la dimensión epistemológica se centrará en *analizar la naturaleza social de la construcción del conocimiento matemático, su conformación cultural y el papel esencial que desempeña en la acción humana* (Arrieta, 2003).

En el curso se eligió un trabajo realizado por Cantoral (2003), referido a la derivada, para ilustrar cómo se pueden emplear los instrumentos teóricos que proporciona este marco. En esta investigación se reflexiona sobre el tratamiento que se da a este objeto matemático en el contexto escolar<sup>2</sup>. Así, se señala que la derivada se presenta como una medida de inclinación de la recta tangente a una curva. Ello supone que la noción de pendiente, que fue introducida en la geometría (tangente a una circunferencia), ha adquirido cierta estabilidad. Luego se inicia un tratamiento algorítmico y teórico que consiste en enseñar a derivar funciones y a demostrar algunos resultados.

Al analizar los argumentos respecto a este concepto que emplean los estudiantes que cursaron cursos de cálculo, se observó que, pese al trabajo realizado en las clases, estos conservan la idea de tangente que proporciona la matemática griega de la antigüedad. Esta concepción es un obstáculo cuando se quiere tratar localmente la condición de tangencia, así como la necesidad de considerar a la tangente en movimiento y no estática, como en la geometría griega.

Luego, desde el enfoque socioepistemológico, se cuestiona cómo es que la noción de derivada como pendiente de una recta tangente ha logrado estabilizarse en la comunidad de profesores y estudiantes, si es que ha traído consigo una serie de conflictos entre los que destaca la comprensión del concepto de límite. Es fundamental entonces analizar las circunstancias sociales, históricas y culturales que propiciaron la construcción de este conocimiento

---

<sup>2</sup> Por *contexto escolar* se entiende no solo el que se presenta en la escuela sino también en centros de formación de educación superior.

matemático; para ello se recurrió a los orígenes de la noción de tangente.

Tras una investigación más profunda sobre la construcción de la derivada, se encontró que ésta tuvo dos significaciones epistemológicas distintas. Mientras que en el sentido de Cauchy se entendió como el límite del cociente incremental, en el de Lagrange se entendió como el coeficiente lineal del desarrollo en series de potencias de una función en torno de un punto dado.

$$\text{Para Cauchy: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para Lagrange:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

Así por ejemplo, si se considera la función  $f(x) = x^3$ , se tendrá:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \text{ en el sentido}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

de Cauchy.

Y en el sentido de Lagrange,

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$\text{e identificando los coeficientes, } f'(x) = 3x^2.$$

En la investigación de Cantoral (2003) se comenta que esta distinción va más allá de una cuestión de forma; el uso que se le da al objeto derivada es distinto. Desde esta perspectiva, sirve para estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o decrecimiento. Así, se propone cambiar el estatus de la noción de derivada al seno del cuerpo teórico, acompañándola de una reconstrucción racional apoyada en un

paradigma distinto al que domina en la enseñanza contemporánea. Esto se lograría abandonando el paradigma basado en la postura Cauchy, que asume a los objetos matemáticos centrales del cálculo, la derivada y la integral como el resultado de una operación de límite aplicada a una cierta clase de funciones, y tendría repercusiones en el discurso matemático escolar. Esta visión del desarrollo del concepto es la que le da a la investigación un corte socioepistemológico.

### **Hacia un marco unificador**

Por la complejidad que encierran los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se requiere contar con un cuerpo teórico lo suficientemente completo para poder abordar los diversos problemas de investigación que pueden plantearse. También es necesario contar con un marco metodológico que permita un análisis profundo de los fenómenos de estudio. Con esta intención, se ha desarrollado el paradigma de investigación denominado Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

*El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual.* (Godino, 2008). Este modelo teórico contempla las diversas dimensiones presentes en un proceso de instrucción matemática de un determinado contenido matemático. Así, se consideran las siguientes dimensiones y sus respectivas trayectorias *epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas),* (Godino et al, 2008). El aprendizaje

matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Adicionalmente, y siendo coherente con la definición que manejan respecto a la actividad matemática, el EOS centra su atención en identificar estas dimensiones en las prácticas matemáticas, lugar del que emergen los objetos matemáticos con sus respectivos atributos.

Sin embargo, no son estos los únicos niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático. El EOS también ha desarrollado herramientas para la identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa) y para la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, tal como lo señala D'Amore (2007).

Este modelo teórico se muestra lo suficientemente completo para poder abordar la mayoría de problemas que un investigador en didáctica de la Matemática pueda plantearse.

## **Conclusiones**

Como puede observarse luego de esta síntesis, los diversos programas de investigación proveen al investigador de herramientas teóricas y metodológicas para estudiar las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunas de ellas centran su atención en aspectos cognitivos, otras en aspectos epistemológicos, otras en la componente social y hay algunas que tratan de abordar el problema de manera sistémica. Es necesario conocer los principios en los que se sustentan y cuáles son sus limitaciones para poder entender que hay vacíos que cubrir y que es necesario seguir en este largo camino de construir una teoría unificada de la cognición e instrucción matemática en beneficio del desarrollo de la comunidad científica y finalmente de los estudiantes de esta disciplina. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática se presenta así como la mejor alternativa.

## Referencias

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Barbosa Alvarenga, Karly.(2003). La enseñanza de ineuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 6, 003, 199-219.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques. Dordrecht: Kluwer.

Cantoral, R. Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: El caso de la matemática escolar. En *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Capítulo 9. Tratamiento matemático y calculadoras gráficas. 169 – 184. Editorial Trillas. 1ª reimpresión 2003.

Cortez, J., García, J. y Nuñez, G. Software para la enseñanza de la derivada. *UMSNH. Extraído el 8 de mayo de 2008*. (En línea. Documento disponible en: <http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-4.doc>)

D'Amore, B. (2 006). *Didáctica de la Matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá-Colombia.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007).La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, Vol. XXVIII, N° 2, 49-77.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. *Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las matemáticas* Revista EMA 2002 Vol 7, No 2, 127-170.

Glosario APOS

Disponible en:

<http://www.personal.us.es/gavilan/alicante/glosario.htm#Descomposición>

Traducción de Cooperative learning: Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function, by [D. Vidakovic](#). Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, 1993.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). [Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática](#). *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. [Disponible en Internet:

[http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm)]

Godino, J. D. (2003). [Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica](#). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (En línea. Documento disponible en:

[http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01\\_PerspectivaDM.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf))

Hitt F. (1995) Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Revista Educación Matemática*, Vol. 7, No. 1, pp. 63-75.

Purcell, E. (1992) Cálculo con geometría analítica. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. pág. 152.

# **Análisis de las prácticas discursivas del profesorado sobre la contextualización de las funciones**

Ana Beatriz Ramos Pereira  
Universidad de Carabobo, Venezuela

## **Resumen**

La investigación comienza con la observación del siguiente fenómeno didáctico: “La ausencia de problemas contextualizado en la enseñanza de las matemáticas y, por ende, la imposibilidad presente en el alumnado para resolver dichos problemas contextualizados”. A partir de la constatación del fenómeno anterior la investigación se centra en posibilitar la reflexión del profesorado sobre el cambio (o no) en el currículo de la asignatura “Introducción a la Matemática” para la introducción de una enseñanza contextualizada en el tema de las funciones.

La investigación que se describe se divide en dos fases claramente diferenciadas. La primera tendría como objetivo conseguir la problematización de una práctica que no era considerada como tal en la institución (la ausencia de problemas contextualizados) y la segunda la reflexión para el cambio a partir de dicha problematización. La segunda fase, la reflexión para el cambio a partir de dicha problematización, origina el diseño de un Seminario-Taller para trabajar los consensos que dieran entrada a una enseñanza de las funciones de forma contextualizada.

Esta experiencia recopilada y analizada por la autora es la que se presenta en este III coloquio, con la intención de disertar y compartir experiencias prácticas, que bien pueden presentar puntos comunes, que apoyen el intercambio entre los investigadores y profesores de matemática

En la investigación hemos utilizados los Criterios de Idoneidad (Epistémico, Mediacional, Motivacional, Semiótico y Cognitivo) del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Contreras y Font, 2006) para organizar las argumentaciones del profesorado. También hemos hecho uso de la Teoría de la Acción Comunicativa de Habermas (1987) la cual, nos resultó muy útil para analizar los consensos obtenidos en el proceso de argumentación.

Algunas de las conclusiones de la investigación son: 1) La matemática que se enseña en la Facultad es descontextualizada 2) Los docentes no se sienten preparados para enfrentar una enseñanza contextualizada. 3) En cuanto a los criterios utilizados en la argumentación del profesorado, se observa que “cuando el cambio se plantea para que sea asumido por todos, tienen más pesos los criterios mediacionales (materiales, tiempo, etc.); mientras que si se habla de un cambio hipotético, tiene mayor presencia el criterio epistémico y el motivacional.4) Los consensos a los que se llega muestran que hay muy poca aceptación del actual significado institucional pretendido y que hay una disposición para el cambio, no obstante, los docentes puntualizan que los cambios deben ser moderados. 5) los docentes rechazan una instrucción basada en la modelización y se inclinan por una enseñanza donde el profesor primero presente el objeto matemático formal y luego trabaje dicho objeto, dentro de un contexto real.

**Palabras claves:** funciones; contexto; cambio institucional; argumentación; criterios de idoneidad de un proceso de instrucción; objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado.

## **Introducción**

Uno de los grandes retos que enfrentan alumnos y docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es dar respuesta a la interrogante para qué sirve aprender

ciertos conceptos matemáticos (conflicto epistémico). Pero esta interrogante que puede parecer trivial, encierra una contraposición de posturas. Posturas desde los objetos institucionales (marcados por la institución escolar), quienes deben asegurar a través del currículo un significado referencial, que mantiene un estado de cosas en la institución (fines, metas). Estos objetos institucionales a su vez, designan las pautas que cada profesor debe asumir en sus prácticas de aula, para moldear un significado pretendido y logrado. Luego éste rendirá sus frutos en un significado evaluado. Pero los profesores se poseionan de sus propios sistemas de prácticas, es decir, manipulan sus objetos personales (matemáticos y didácticos) que pueden estar en concordancia o no, con los objetos institucionales. En la investigación nos propusimos indagar sobre esos objetos. En una primera instancia la indagación se formuló dentro de las competencias de los docentes sobre el objeto función contextualizado. A la vez que se recopiló las versiones y opiniones acerca de este objeto matemático en el colectivo docente. La segunda postura asumida en la investigación fue la de examinar sobre las argumentaciones docentes para conseguir el cambio, entre otras manifestaciones importante que han puesto en evidencia los objetos personales (matemáticos y didácticos) tanto personales como institucionales de la comunidad estudiada

### **Objetivos**

Analizar las prácticas discursivas del profesorado -segmentos argumentativos- tomados de una comunidad FaCES, con la finalidad de observar, tanto los consensos, como los criterios de idoneidad, que ellos le asignan a sus argumentos para alcanzar el cambio a favor (o no) de una enseñanza contextualizada de las funciones.

En este taller se aborda la solución a un problema típico de las funciones como componente nuclear en la enseñanza de la Matemático -funciones reales de variable real- desde dos perspectivas: una haciendo uso del lenguaje asociado a los

métodos: formal –descontextualizado – y haciendo uso del lenguaje natural –contextualizado-.

El Enfoque Ontosemiótico nos permitirá analizar la complejidad semiótica de ambos métodos y diferenciar la trama de funciones semióticas que aparecen en los mismos, poniendo de manifiesto cómo el lenguaje asociado a los métodos –métodos Contextualizados – posibilita la conexión con el lenguaje intuitivo, pudiendo llegar a representar, de alguna manera, un primer acercamiento a la formalización y por tanto un nexo de unión o puente con la formalización propia del lenguaje algebraico asociado a los métodos del “análisis clásico” característicos de la enseñanza universitaria.

El taller se desarrollará a lo largo de cuatro apartados:

- En el primer apartado efectuamos un estudio de la evolución histórico-epistemológica del concepto de función centrándonos en dos tipos de lenguaje: Contextualizada y descontextualizada
- En el segundo apartado se presentan una serie de trayectorias argumentativas tomadas de la comunidad de profesores. El tema será la discusión de la introducción de una enseñanza contextualizada de funciones de variable real desde las dos perspectivas anteriormente expuestas: a través del lenguaje asociado a los métodos: contextualizados y formal “análisis clásico”. El propósito central es el estudio de los consenso utilizando la TAC Habermas

Igualmente, se aplicará El Enfoque Ontosemiótico (EOS) para poner de manifiesto la complejidad semiótica de cada uno de los métodos, las entidades y sus facetas, haciendo especial hincapié en los Objetos matemáticos y Didáctico del profesorado y los criterios de idoneidad que utiliza.

En tercer lugar, se propondrá a los participantes algunos ejemplos resueltos, de índole parecida, para que reconozcan el entramado de funciones semióticas, observen las similitudes y diferencias con los que ya han

sido explicados. En este sentido, resaltamos que la situación estudiada es una típica situación que debe ser utilizada por los alumnos para resolver otras similares que el profesor habrá escogido convenientemente.

- Para finalizar, se establecerá un debate y puesta en común entre las conclusiones aportadas por los participantes en el taller y las efectuadas por los autores del mismo.

## Referencias

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26, 1, 39-88.

Habermas, J. (1987): *Teoría de la Acción Comunicativa I. Racionalidad de acción y racionalización social*. Madrid: Taurus.

Font, V y Ramos, A (2005). *Objetos Personales Matemáticos y Didácticos del Profesorado y Cambio Institucional. El Caso de la Contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. (Primera Fase) *Revista de Educación*. 338. 309-345

Ramos, AB y Font, V. (2006). Contesto e Contestualizaciones nell'insegnamento Della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La matematica e la sua didattica*. 4 (20) 535-556.

Ramos, Ana B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. Tesis Doctoral*. Universidad de Barcelona. España.



# **TALLERES**



# La Geometría vectorial como herramienta para formalizar la noción intuitiva de superficie

Francisco Ugarte Guerra  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## Resumen

El taller ejemplificó cómo la matemática puede ser utilizada como una herramienta para precisar ideas y construir conceptos. Así, a partir de la idea intuitiva de cono y de algunas herramientas básicas de la geometría vectorial (conceptos de punto, vector, recta y plano), mostramos que es posible *construir* superficies, tanto en un sentido matemático (ecuación) como en un sentido concreto (gráficos, modelos tridimensionales, animaciones).

## Palabras claves

Geometría vectorial, superficies, conos.

## Enfoque

Partimos de la premisa que educar geoméricamente tiene como finalidad facilitar el conocimiento del espacio tridimensional (Alsina 2000) y, entendemos como una tarea del docente de matemáticas la enseñanza de la visualización, que va más allá de educar en el conocimiento de la estructura formal y lógica de cualquiera de sus campos, tal y como señala Miguel de Guzmán (1996).

## Metodología

Durante las tres sesiones de dos horas que duró el taller se propusieron una serie de cuestiones cuya finalidad era que los participantes aportaran ideas y se pusiera en evidencia conceptos previos sobre superficies, conos y geometría vectorial. En términos del constructivismo social de

Vigotsky, nuestras preguntas estuvieron en la zona de desarrollo próximo y ayudaron a que los alumnos construyeran nuevos conceptos.

## **Sesión 1**

Siguiendo la metodología arriba explicada pretendemos que los alumnos

1. Escriban, grafiquen y den ejemplos sobre sus conceptos de superficies y conos. Para ello planteamos preguntas cómo las siguientes: ¿Qué entiende por superficie (cono)? Escriba algunos ejemplos de superficies (conos). Grafique algunas superficies (conos).
2. A partir de sus ideas, gráficos, ejemplos y de la socialización de las mismas con sus compañeros descubran la necesidad de precisar sus conceptos.

Para ello planteamos los siguientes ejercicios:

Escriba una definición de superficie (cono) y verifique que la cumplan sus ejemplos, caso contrario modifique su propuesta de definición hasta que cada uno de sus ejemplos la verifique.

Si es posible identifique tipos de conos a partir de los gráficos realizados por usted y sus compañeros.

Identifique las características comunes de cada uno de los tipos de conos que han encontrado.

3. Utilizando argumentaciones inductivas sean capaces de escribir una definición de superficie y una definición de cono. Para ello se propusieron las siguientes actividades:

Considerando las características comunes de los distintos “tipos” de conos, pruebe a reescribir su definición de cono.

Compruebe que los diferentes tipos de cono satisfacen su definición, caso contrario modifique su definición.

4. A partir de la definición construida de cono sean capaces de aplicarla en la construcción de nuevas superficies. Para ello se les propusieron dibujos donde aparecían una curva plana y un punto fuera de dicho plano, a continuación se les pedía que a partir de esos elementos y, usando su definición, construyeran el cono correspondiente. Para finalizar se les presentaba una animación multimedia donde podía verse en tiempo real la construcción de los conos propuestos.

## **Sesión 2**

1. Usando la misma metodología introducimos dos formas de representación para los vectores: la gráfica (flechas) y la formal (coordenadas). Para ello se les pidió a los participantes explicar qué entendían por vector, se les pidió dar ejemplos y una representación gráfica.
2. Se introdujeron el mínimo número de propiedades de vectores, solo las necesarias para garantizar la comprensión y la construcción formal de la definición de cono: igualdad, suma y multiplicación por un escalar.

## **Sesión 3**

Se introduce la definición matemática (cartesiana y vectorial) de un cono y se proponen actividades que requieren que los estudiantes transiten por las representaciones gráfica y formal del concepto de cono, ello con la finalidad de enriquecer su comprensión mostrando las ventajas de una y otra representación.

## Definiciones y problemas

A continuación presentamos y comentamos, a manera de ejemplo, la definición de cono utilizada y uno de los problemas trabajados durante el taller.

Se puede observar que para la definición de cono solo se hacen uso de los conceptos de vector, suma de vectores, multiplicación por un escalar y de las relaciones de pertenencia y paralelismo.

### Definición

Sea  $C$  el cono de curva base  $\Gamma$  y vértice  $V$ , entonces

$P(x; y; z) \in C$  si y solo si

- $P = V + t\vec{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v} // \overline{P_0V}$
- $P_0(x_0; y_0; z_0) \in \Gamma$

Puede comprobarse que en el siguiente problema, para el ítem a., se requiere aplicar de manera correcta la definición de cono y demostrar un manejo del álgebra elemental.

En el ítem b. en cambio, se resalta la correspondencia entre la expresión algebraica y geométrica del cono. Los ítems c. y d. muestran como el álgebra (vectorial) y la geometría (noción de cono) se complementan.

### Problema

- Escriba la ecuación cartesiana del cono  $C$  de curva base  $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$  y vértice  $(0; 5; 5)$ .
- ¿El punto  $(0; 5; 5)$  pertenece al cono  $C$ ?
- Escriba la ecuación vectorial de una recta  $L$  que esté contenida en el cono  $C$ .
- Determine si es posible o no hallar una recta  $L$  tal que
  - Corte en un único punto al cono  $C$ .
  - Corte en dos puntos al cono  $C$ .
  - Corte en tres puntos al cono  $C$ .

## **Comentarios Finales**

El taller permitió que los participantes, profesores de secundaria:

1. Reconocieran que para precisar una idea no basta con hacer un dibujo, o dar ejemplos,
2. Comprobaran que para escribir una definición correcta, es necesario tener presente diferentes puntos de vista, reconocer patrones, desechar particularidades pero sobretodo evitar las ambigüedades
3. Concluyeran de forma natural que, para precisar la idea de cono, el lenguaje matemático es la herramienta ideal, pues entre otras cosas, el usarlo implica dejar a un lado las ambigüedades del lenguaje natural.
4. Experimentaran como una “buena” definición permite comprender mejor y ampliar nuestro entendimiento acerca de los objetos matemáticos.

## **Referencias**

Alsina, C. (2000) *Geometría y Realidad*. Universidad Politécnica de Cataluña.

De Guzmán, M. (1996) *El Rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.



# Geometría dinámica con TracenPoche

Bertrand Rousset  
Colegio Franco Peruano

## Resumen

Este artículo presenta algunos aspectos desarrollados en el taller «Geometría Dinámica con TracenPoche». Se analizará cómo los participantes lograron construir una circunferencia circunscrita a un triángulo con TeP. Al final del taller, los docentes realizaron una ficha que podrá ser utilizada por alumnos para construir la circunferencia circunscrita a un triángulo con TeP.

**Palabras clave:** TracenPoche, geometría dinámica, actividades, entornos informáticos, aprendizaje de las matemáticas.

El objetivo del taller es enseñar a los profesores a utilizar el software TracenPoche. El taller fue realizado en tres sesiones de 2 horas. Hubo alrededor de 20 participantes. Las referencias teóricas son presentadas en el artículo «Entornos informáticos para el aprendizaje de las matemáticas. Proyecto TeP-Perú».

## 1. Parte I

La primera sesión se inició con una introducción para mostrar a los participantes cómo funciona el software. Se les presentó el concepto de las diferentes zonas del software y las informaciones de pantalla. Los participantes identificaron el concepto de punto sobre un objeto. TeP permite hacer una diferencia entre un punto libre y un punto sobre un objeto. Es muy importante para los usuarios entender la necesidad de definir los objetos de manera precisa. Cuando se desplaza un objeto, las relaciones entre los diferentes objetos predefinidos son conservadas. La zona script tiene una sintaxis para describir los objetos. A través del ejemplo de un punto y de una recta se analizó la sintaxis de la zona script.

A continuación se presentarán algunos ejemplos de las actividades realizadas.

## 1.1. Primer día: Actividad 1:

1.1.1. Primera etapa: Las tareas fueron las siguientes:

- a) Construir un segmento  $[AB]$
- b) Construir un punto  $M$  de tal manera que al desplazar  $M$ ,  $M$  sea el centro de una circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$ .

Los participantes tuvieron dificultades para construir el punto  $M$ . Una explicación posible es que la técnica “papel-lápiz”, usada en clase, no permite a los estudiantes darse cuenta de las etapas de construcción de un objeto geométrico. Generalmente, un alumno hace las construcciones sin pensar en las justificaciones. Con TeP, el usuario tiene que conocer la justificación de una construcción para poder realizarla con los diferentes comandos disponibles.

## 1.2. Segunda etapa:

Después de la primera etapa, los participantes tenían que construir un triángulo conociendo la longitud de cada lado. La dificultad fue de volver a utilizar lo que habían hecho en la primera etapa. Los profesores saben construir un triángulo con una regla y un compás a partir de las longitudes. La dificultad al usar TeP es que hay que trazar una circunferencia en lugar de un arco; esto requiere definir un centro y un radio. Los alumnos no están acostumbrados a definir de manera formal las construcciones que hacen con el compás. La otra dificultad se presentó al momento de definir el punto de intersección de dos circunferencias para conseguir el tercer vértice del triángulo. Al final, se les preguntó sobre la similitud entre lo realizado y una construcción hecha con el compás.

## 2. Parte II:

Después de presentar el funcionamiento de TeP, los participantes tuvieron que reflexionar para preparar una ficha que pudieran utilizar sus alumnos. El tema era: «Construcción de una circunferencia circunscrita a un triángulo con TeP». Tuvieron un tiempo para trabajar en grupos. Después se hizo un trabajo

común. Se realizó un documento (Anexo 1). El objetivo era presentar a los participantes las etapas necesarias para preparar una actividad. El uso de TeP permite a los alumnos crear nuevas estrategias de resolución de problemas. Cuando un alumno empieza, es necesario ayudarlo en su investigación.

Otro objetivo era de mostrar el interés de construir una actividad. Este trabajo en grupo permite intercambiar ideas ya que los puntos de vista son diferentes. El tipo de preguntas que se hacen ejercerán una influencia en el trabajo de los alumnos. Hubo muchas discusiones sobre el tipo de preguntas que se pueden hacer. La problemática consistió en saber cómo ayudar al alumno en su trabajo de investigación sin darle todas las respuestas. Esta etapa fue muy interesante porque hubo una reflexión sobre la manera de dirigir las actividades de los alumnos. El uso de TeP permite un aprendizaje, siempre que haya una reflexión didáctica en la preparación de la actividad.

Al finalizar el taller los participantes fueron invitados a formar parte del proyecto llamado TeP-Perú. El proyecto TeP-Perú consta de tres etapas principales: la primera es traducir TeP al español. La segunda es de promover, a nivel nacional, el uso de TeP en las instituciones educativas, especialmente de nivel secundario. La tercera es desarrollar una red de trabajo entre los profesores de las distintas instituciones educativas del país dando ayuda técnica y poniendo a disposición de los integrantes, actividades para ser desarrolladas con sus alumnos. Todas estas etapas conducen al objetivo fundamental que es el de mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Perú. Más de 20 participantes se inscribieron en este proyecto. El objetivo es de seguir proponiendo actividades como se hizo durante el coloquio. Estos documentos podrán ser descargados desde el sitio web de TracenPoche<sup>1</sup>. De esta manera, otros profesores tendrán la posibilidad de utilizar directamente con sus alumnos estas fichas. Los profesores indicaron que les gustaría seguir aprendiendo a manejar TeP. Esto plantea el reto de diseñar actividades que permitan a los docentes aprender a utilizar el software a distancia.

---

<sup>1</sup> [www.tracenpoche.net/es](http://www.tracenpoche.net/es)

**Anexo 1:** Ficha realizada por los participantes:

## **Construcción de una Circunferencia Circunscrita a un Triángulo**

1. Crear un punto A y un punto O. Trazar una circunferencia de centro O que pase por A.  
¿Cuántas circunferencias cumplen esta condición?
2. Crear tres puntos A, B y O. Traza una circunferencia de centro O que pase por A y B, a la vez.
3. Crear cuatro puntos A, B, C y O. Trazar los segmentos AB, BC y AC. Traza la circunferencia de centro O que pase por uno de los vértices.
4. Desplazar la circunferencia de tal manera que pase por los tres vértices del triángulo.
5. Trazar los segmentos OA, OB y OC.
6. Completa la tabla. Para el segundo caso, desplaza los vértices.

	Primer caso	Segundo caso
OA		
OB		
OC		

7. Responde  
¿Qué observas en los datos de la primera y segunda línea?  
¿Qué conclusión se puede obtener respecto a los puntos A y B?
8. Responde  
¿Qué observas en los datos de la segunda y tercera línea?  
¿Qué conclusión se puede obtener respecto a los puntos B y C?
9. Responde  
¿Cómo se podría construir de manera precisa el punto O?
10. Hacer una nueva figura. Construir un triángulo PQR. Construir el centro O de la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

# Análisis didáctico, una mirada desde el enfoque Ontosemiótico

Norma Rubio Goycochea.  
Pontificia Universidad Católica del Perú

Vicenç Font Moll  
Universitat de Barcelona

Núria Planas Raig  
Universitat Autònoma de Barcelona

## Resumen

En este taller mostramos las herramientas que el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática propone al profesor para analizar, valorar y de ser factible, mejorar la práctica profesional. Para ello, con la participación activa de los asistentes al taller y aplicando los niveles de análisis que propone este enfoque, se realizó un análisis didáctico de la transcripción de un episodio de una clase de matemáticas de secundaria en la que se institucionaliza la resolución de un problema. En dicho episodio participan tres alumnos en interacción con el profesor.

**Palabras clave:** Enfoque ontosemiótico, análisis didáctico, niveles de análisis.

## Introducción

La reflexión sobre los diversos factores presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje es parte de la labor docente. La necesidad de realizar un análisis sistemático que permita esta reflexión requiere de herramientas teóricas que lo faciliten. Durante la realización del taller presentamos una metodología de análisis didáctico que se basa en cinco niveles de análisis propuestos por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).

D'Amore, Font y Godino (2007); Font y Contreras (en prensa); Font y Godino, (2006); Godino y Batanero (1994); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Contreras y Font, (2006); Godino, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2008) proponen, en el marco del EOS, cinco niveles para el análisis de procesos de estudio:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los niveles de análisis propuestos en el marco EOS son considerados para el desarrollo de un análisis completo que permita describir, explicar y valorar procesos de estudio.

En este taller, aplicamos los niveles del EOS adaptados:

**Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.** En un proceso de estudio, la aplicación de este nivel lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas, durante las cuales se activan elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.).

**Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.** La finalidad de este nivel de análisis es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, ya que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, en las que se deben considerar, entre otros aspectos, las configuraciones de objetos y los procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas.

**Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.** En nuestro caso y dada la gran diversidad de interacciones

didácticas ocurridas en cualquier proceso de estudio, para este nivel nos centramos en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico.

*Nivel 4. **Identificación de normas.*** En este nivel consideramos que tanto las prácticas matemáticas como las interacciones están condicionadas y soportadas por un conjunto de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa ya que sirven para comprender y responder a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’.

*Nivel 5. **Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de estudio.*** Este nivel se ocupa del análisis de tipo valorativo. La didáctica de la matemática no debería limitarse solo a la descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Son necesarios, por tanto, criterios “idoneidad” o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora, evaluando la pertinencia del proceso de instrucción matemática y señalando pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio.

Mostramos, durante el desarrollo del taller, la posibilidad de aplicar estos niveles conjuntamente usando como contexto de reflexión el análisis de un episodio de una clase de matemáticas de secundaria en la que el profesor institucionaliza la resolución de un problema. En este taller, que tuvo una duración de tres días con sesiones de dos horas cada día, y con una asistencia promedio de 25 profesores de educación secundaria propusimos el análisis didáctico de una transcripción de un episodio de clase. La principal tarea dada a los profesores para el análisis didáctico de este episodio fue que, en base a su experiencia profesional, realizaran un análisis didáctico.

En el apartado 2 de este documento presentamos la transcripción del episodio de clase, cuyo análisis didáctico

planteamos a los profesores asistentes al taller, con una breve contextualización del episodio. En los apartados 3, 4, 5, 6 y 7 presentamos cinco de las tareas que les propusimos a los profesores, con los resultados obtenidos y esperados, en las cuales se estudia los cuatro niveles de análisis como herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa, que nos sirven para comprender y responder a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’. Finalmente en el apartado 8, concluimos con algunas reflexiones generales.

### **Episodio de clase**

El episodio de estudio a tratar en el taller toma lugar en una clase de matemáticas con estudiantes de 15 y 16 años de edad (enseñanza obligatoria). La clase está localizada en una escuela secundaria de una gran área de la clase trabajadora de Barcelona, España. El profesor tiene muchos años de experiencia en la enseñanza, algunos de ellos en su actual escuela. En la clase hay 21 estudiantes de diferentes culturas, religiones y capacidades cognitivas, en cambio todos son de un nivel socioeconómico similar (bajo).

Nuestro episodio sucede durante la segunda semana de clases al inicio del primer semestre del año escolar. Esta es la primera lección donde el profesor propone la dinámica de resolver un problema en pequeños grupos durante la clase entera. El problema es acerca de dos conocidos distritos, uno de los cuales es cercano a la ubicación de la escuela (ver Figura 1). El año pasado, los estudiantes habían trabajado una unidad centrada en proporcionalidad. Así, se “supuso” que los estudiantes tenían las habilidades matemáticas requeridas para resolver la tarea.

Aquí tienes la población y el área de dos distritos en tu ciudad.

<i>Distrito 1 (N1)</i>	<i>Distrito 2 (N2)</i>
65 075 habitantes	190 030 habitantes
7 km <sup>2</sup>	5 km <sup>2</sup>

- (i) Discute en cuál de estos dos lugares las personas viven más espaciosamente.
- (ii) Encuentra cuánta gente debería trasladarse de un distrito a otro para vivir en ambos espaciosamente.  
(N1 ≡ Miraflores, N2 ≡ Villa el Salvador)

Figura 1. El planteamiento del problema.

El episodio se inicia cuando Alicia (A), Emilio (E) y Mateo (M), miembros de un grupo, le dicen al profesor que ellos no han hallado una solución común al problema propuesto. El episodio termina cuando el profesor cambia de explorar las ideas del grupo a intentar hacer que otros grupos participen.

### Representación escrita del discurso de la clase

- 1 A: Este es un problema acerca de densidades porque los datos son acerca de densidades.
- 2 T: De acuerdo. (Le dice a Alicia que ella necesita explicarse mejor) [A Alicia]. Nosotros sabemos que tú sabes bastante, pero...
- 3 A: En N1 la densidad es menor que en N2. Eso es todo.
- 4 T: Emilio dice no.
- 5 E: ¡Yo no lo entiendo! Hay algo que falta.
- 6 T: [A Emilio] ¿Cómo lo has resuelto tú?
- 7 E: Es claro que aquí [N2] hay más personas y menos espacio. Yo he estado allí. Los pisos son muy pequeños.
- 8 T: De acuerdo. Lo que tú dices está claro, pero entonces cómo respondes a la segunda pregunta.
- 9 E: La segunda pregunta está mal
- 10 T: ¿Por qué?
- 11 E: Yo no me mudaría solo, yo lo haría con toda mi familia.
- 12 T: ¿A qué te refieres?
- 13 E: Yo cambiaría la segunda pregunta.
- 14 T: ¡No empieces de nuevo, Emilio! Tú sabes que los problemas son como son.
- 15 M: A mí no me importa cambiar la pregunta, pero si tú la cambias, nosotros no practicaremos la matemática que el profesor quiere que nosotros practiquemos. Tú puedes hacer esto por ensayo y error, primero empieza con 50 000 personas.
- 16 A: ¡Eso no es matemática!
- 17 E: ¿Por qué esto no es Matemática?
- 18 T: Mejor continuemos. Alicia, ¿cuál es tu opinión?
- 19 A: Yo ya lo dije. Este es un problema de densidades.
- 20 T: Tú sabes lo que estás diciendo, sino estás cansada ...
- 21 A: ¿Voy a la pizarra?

- 22 T: [El profesor mueve la cabeza]
- 23 A: [ En la pizarra]
- $$\frac{65\ 075}{7} \rightarrow \frac{65\ 072}{7} = 9\ 296h / km^2 \quad \text{en N1}$$
- $$\frac{190\ 030}{5} = 38\ 006h / km^2 \quad \text{en N2; } 9\ 296 \times 38\ 006$$
- 24 T: De acuerdo. Nosotros necesitamos comparar los dos distritos. Estos números no significan nada si nosotros no los comparamos.
- 25 A: Este número [9 296] es...
- 26 E: Nosotros colocamos algunas personas aquí y algunas personas allí.
- 27 A: ¡Déjame terminar! 9 296 es más pequeño que este número [38 006]. Esto significa que en N1 tú vives más espaciosamente.
- 28 T: De acuerdo.
- 29 A: Ahora veamos la ecuación. [En la pizarra].
- $$\frac{190\ 030 - x}{5} = \frac{65\ 072 + x}{7}; 38\ 006 - \frac{x}{5} = 9\ 296 + \frac{x}{7};$$
- $$38\ 006 - 9\ 296 = \frac{x}{5} + \frac{x}{7};$$
- $$28,710 = \frac{12x}{35}; x = \frac{28\ 710 \times 35}{12}; x = 83\ 737,5 \rightarrow 83\ 737$$
- personas.
- 30 T: Alicia, tienes que explicar lo que has hecho y por qué.
- 31 E: Yo no entiendo por qué ella cambia 65075 por 65 072.
- 32 T: ¿Alicia? ¿Por qué sustituyes este número?
- 33 A: [Regresa a su sitio] Yo ya he explicado mi propuesta, ahora que lo expliquen ellos.
- 34 M: Yo no creo que necesitemos hacer una ecuación. ¿Por qué no probamos con diferentes números? ¿No necesitamos ser exactos aquí, no es cierto?
- 35 T: Veamos de nuevo a la propuesta de Alicia. [A Emilio] ¿Aún quieres cambiar la segunda pregunta?

- 36 E: Todos nosotros conocemos estos distritos, ¿no es raro lo que ella está haciendo? ¿Por qué nosotros tenemos que usar densidades y ecuaciones?
- 37 M: [Al profesor] ¿Por qué ella ha movido tres personas de aquí [65 072]?
- 38 T: Mateo, concentrémonos, olvídate ahora de las personas y sólo piensa en la fracción. ¿Es 65 075 un múltiplo de 7?
- 39 M: No.
- 40 T: ¡Esta es la cuestión! 65 072 es un múltiplo de 7 y 65 075 no lo es. Ahora podemos hacer una división exacta.
- 41 M: ¡Pero esto no es acerca de múltiplos, es acerca de personas!
- 42 E: En la última operación ella no mira los múltiplos ¿verdad?
- 43 A: Esto no es importante.
- 44 T: ¿Ves cómo ella ha resuelto la ecuación?
- 45 M: Sí
- 46 T: Esto es importante.
- 47 M: ¿Podemos dar una respuesta aproximada?
- 48 A: Por favor, esto no es importante.
- 49 M: ¿Copiamos la ecuación?
- 50 T: Ordenemos nuestras ideas primero. Necesitamos calcular las densidades y luego necesitamos que sean iguales. Esta es una propuesta. ¿Y vosotros qué [señalando a otro grupo]? ¿Cuál es vuestra solución?

Tabla 1. Transcripción del episodio

### 1. Análisis Didáctico de un episodio de clase.

La primera tarea que debieron desarrollar los asistentes al taller fue, que después de una realizar una lectura individual, en grupos de tres escribieran sus conclusiones del análisis didáctico a partir de la transcripción del episodio de clase

(Tabla 1). Para ello, previamente se les entregó la contextualización del episodio (Figura 1) y luego, se les entregó la Tabla 1.

Cada uno de los grupos participantes estuvo de acuerdo con que se parte de un problema matemático en el cual se pueden distinguir ecuaciones y que la solución de éste se centra en la solución de la alumna que más sabe, en este caso Alicia, y que hay una mala gestión por parte del profesor quién no soluciona los conflictos que se presentan durante el desarrollo de la clase.

También hubo acuerdo en que en esta transcripción se propone un único problema. Se trata de una situación contextualizada cuya resolución implica, entre otros, el uso del concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades.

### **Aplicación del Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.**

La segunda tarea que debieron desarrollar los participantes fue la de señalar qué prácticas matemáticas realizaron Emilio, Mateo y el profesor. Para ello, se mostró como ejemplo, que en la transcripción dada se observaba que las prácticas matemáticas eran realizadas básicamente por Alicia, que ella resolvía el apartado (i) del problema planteado aplicando el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades, y el apartado (ii) planteando y resolviendo una ecuación, y que a petición del profesor esta alumna contextualizó y dio sentido a la solución hallada.

Los participantes distinguieron que Emilio responde en base a sus vivencias, que Mateo propone resolver el problema por ensayo y error aunque no lo hace y que el profesor interviene sin resolver los conflictos que tienen Mateo y Emilio.

Las prácticas que se pedían que identificaran los asistentes al taller se muestran en la siguiente tabla:

<p><i>Emilio</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lee y entiende el enunciado del problema. Por otra parte, cuestiona el apartado (ii)</li> <li>- Resuelve el apartado (i) mediante un razonamiento de tipo intuitivo y vivencial usando su conocimiento de los barrios citados en el problema.</li> <li>- Sigue las explicaciones de Alicia y observa una contradicción entre las maneras como se ha resuelto (i) y (ii).</li> </ul>
<p><i>Mateo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lee y entiende el enunciado del problema</li> <li>- Propone una resolución por ensayo y error, aunque no aplica este método.</li> <li>- Propone la aceptación de soluciones aproximadas.</li> </ul>
<p><i>Profesor</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Considera el papel del contexto extramatemático en matemáticas.</li> <li>- Valida la argumentación de Alicia e interviene para completar explicaciones de esta alumna sobre la sustitución de 65 075 por 65 072.</li> <li>- Reconduce propuestas de aproximación al problema de Emilio y Mateo.</li> </ul>

Tabla 2. Prácticas Matemáticas

### **Aplicación del Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.**

La tercera tarea que debieron realizar los profesores fue la de completar las proposiciones y procedimientos de la configuración epistémica del problema planteado. A continuación se muestra la configuración epistémica incompleta, proporcionada a los profesores.

### SITUACIÓN PROBLEMA

Aquí tienes la población y el área de dos distritos en tu ciudad.

<i>Distrito 1 (N1)</i>	<i>Distrito 2 (N2)</i>
65 075 habitantes	190 030 habitantes
7 km <sup>2</sup>	5 km <sup>2</sup>

(iii) Discute en cuál de estos dos lugares las personas viven más espaciosamente.

(iv) Encuentra cuánta gente debería trasladarse de un distrito a otro para vivir en ambos espaciosamente.

### LENGUAJE

*Verbal:*

Densidad (A), menor(A), ecuación (A), múltiplo (T), división (T),....

*Simbólico:*

Números naturales (P), fracciones (A), decimales (A), unidades de área (P) y de densidad(A), símbolos N1 y N2 (P), → (A)....

### CONCEPTOS

Densidad (A), mayor y menor(A), múltiplo (T), fracción (A), decimal (A), incógnita (A), ecuación (A), solución exacta de una ecuación (M), solución aproximada de un problema (M).

## PROPOSICIONES

- Este es un problema acerca de densidades (A).
- En N1 la densidad es menor que en N2 (A).
- Aquí [N2] hay más personas y menos espacio (E).
- 
- 
- 

## PROCEDIMIENTOS.

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1. Ensayo y error (M lo cita pero no lo aplica).          | 2. Dividir (A).               |
| 3. Redondeo de números (A).                               | 4. Cálculo de densidades (A). |
| 5. Comparación de números que representan densidades (A). | 6.                            |
| 7.  | 8.                            |

## ARGUMENTOS

(Alicia) Tesis 1: Este es un problema acerca de densidades.

Se usan los siguientes argumentos:

Argumento 1: En los problemas de densidades los datos son densidades.

Argumento 1: En este problema los datos son densidades.

(Emilio) Tesis 2: Aquí [N2] hay más personas y menos espacio.

Se usa el siguiente argumento (vivencial):

Argumento: Yo he estado allí. Los pisos son muy pequeños.

(Alicia) Tesis 3: En N1 la densidad es menor que en N2.

Se usan los siguientes argumentos:

Argumento 1: Se puede sustituir 65 075 por 65 072 (implícito: para que la división por 7 sea exacta).

Argumento 2: Dividiendo el número de habitantes por el número de km<sup>2</sup> se obtiene que la densidad en N1 es 9 296 h/km<sup>2</sup>.

Argumento 3: Dividiendo el número de habitantes por el número de km<sup>2</sup> se obtiene que la densidad en N2 es 38 006 h/km<sup>2</sup>.

Argumento 4: 9 296 es menor que 38 006.

(Alicia) Tesis 4: En N1 vives más espaciosamente.

Se usan los siguientes argumentos:

Argumento 1 (implícito) Si la densidad de un vecindario es menor que la de otro, eso quiere decir que en el de menor densidad "Tú vives más espaciosamente".

Argumento 2: En N1 la densidad es menor que en N2.

(Alicia) Tesis 4: Si se trasladan 83 737 vecinos de N2 a N1 los dos vecindarios tendrán la misma densidad (A).

Argumento: Planteamiento y resolución de una ecuación.

Tabla 3. Objetos Matemáticos

Los profesores participantes, en su mayoría, llegaron a completar las proposiciones y procedimientos que mostramos a continuación:

### PROPOSICIONES

- Este es un problema acerca de densidades (A).
- En N1 la densidad es menor que en N2 (A).
- Aquí [N2] hay más personas y menos espacio (E).
- En la última operación ella no encuentra múltiplos (E).
- En N1 vives más espaciosamente (E).
- 65 075 no es múltiplo de 7; 65 072 si lo es (T).
- Si un número es múltiplo de otro, la división por este último es exacta (T).
- Si se trasladan 83 737 vecinos de N2 a N1 los dos vecindarios tendrían la misma densidad(A).

## PROCEDIMIENTOS

1. Ensayo y error (M lo cita pero no lo aplica).
2. Dividir (A).
3. Redondeo de números (A).
4. Cálculo de densidades (A).
5. Comparación de números que representan densidades (A).
6. Traducción del lenguaje verbal al algebraico. (Planteamiento de ecuaciones) (A).
7. Determinar si un número es múltiplo de otro (T lo usa implícitamente).
8. Resolución de ecuaciones (A)

La cuarta tarea fue la de identificar los procesos matemáticos involucrados. En esta última mostramos primero los 16 procesos matemáticos que se han identificado en el EOS (idealización, materialización, representación, significación, encapsulación, desencapsulación, personalización, institucionalización, particularización, generalización, algoritmización, enunciación, definición, problematización, argumentación y comunicación), ya que los participantes no pudieron distinguir en principio ningún proceso.

A continuación mostramos una tabla con los procesos identificados:

### *Alicia*

- Proceso de *generalización* [1, 19] cuando considera que el problema es un caso particular de un problema más general.
- Proceso de *enunciación* de una proposición [3].
- Proceso de *argumentación* [23, 27, 29].
- Proceso de *representación y materialización* [23] al escribir en la pizarra signos matemáticos interpretables como el uso del concepto de densidad y de procedimientos de comparación de densidades.

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proceso de <i>enunciación y comunicación</i> de una proposición [27] que se interpreta como la inferencia que se obtiene de aplicar el concepto de densidad y el procedimiento de comparaciones de densidades, y como un uso contextualizado y correcto de la solución.</li> <li>- Proceso de <i>representación y materialización</i> [29] al escribir signos matemáticos interpretables como el planteamiento y resolución de una ecuación.</li> </ul>
<p><i>Emilio</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Proceso de <i>enunciación</i> de una proposición [7] sobre la interpretación del enunciado.</li> <li>- Proceso de <i>argumentación</i> [11, 16] basado en el conocimiento del contexto extramatemático del problema.</li> </ul>
<p><i>Mateo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Proceso de <i>comunicación</i> [15] al plantear la posibilidad de resolver el problema por el método de ensayo y error.</li> <li>- Proceso de <i>comunicación</i> [34] al plantear la posibilidad de buscar soluciones aproximadas para el problema.</li> </ul>
<p><i>Profesor</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Proceso de <i>institucionalización</i> [todas sus intervenciones y en especial la 50] de la solución del problema.</li> <li>- Proceso de <i>argumentación</i> [40] para resolver dudas de Emilio y Mateo.</li> <li>- Proceso de <i>idealización</i> [38] cuando pide prestar atención a las fracciones por delante de las personas.</li> </ul>

Tabla 4. Procesos Matemáticos.

### Aplicación del Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.

La cuarta tarea propuesta a los participantes al taller fue que señalaran los conflictos observados en la transcripción.

Los profesores identificaron como un conflicto de Emilio el no aceptar la solución matemática propuesta por Alicia, pues con lo que conocía de sus vivencias era suficiente para él.

En Godino, Batanero y Font (2007) nos dicen que “*conflicto semiótico* es cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones”. Entre los conflictos semióticos tipificados por el EOS tenemos, el *conflicto semiótico* de tipo *cognitivo*, cuando la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto; el *conflicto semiótico* de tipo *interaccional*, cuando la disparidad se produce entre las prácticas (actuativas y discursivas) de dos sujetos diferentes en interacción social (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) y el *conflicto semiótico* de tipo *epistémico*, cuando la disparidad se produce entre significados institucionales.

En la siguiente tabla mostramos algunos ejemplos de los conflictos semióticos que se presentan en el episodio de clase y que fueron observados por los profesores y que tipificamos juntos.

<i>Cognitivo</i>	En [42] Emilio pudo haber ocasionado un conflicto semiótico de tipo cognitivo en Alicia, aunque ella no le da importancia, al hacerle observar que no ha sido coherente en la resolución de (i) y (ii).
<i>Interaccional</i>	Cuando Alicia y Mateo discrepan sobre si el procedimiento de ensayo y error se puede considerar como “matemático” [16-17], se produce un conflicto semiótico de tipo interaccional.

<i>Epistémico</i>	Emilio, plantea un conflicto entre su "mundo de la vida" y la "clase de matemáticas" [9-14]. Emilio confronta una manera válida de resolver el problema en el "mundo de la vida" con la resolución válida en el aula de matemáticas cuyo portavoz en este caso es el profesor. Se puede interpretar que estas personas proponen prácticas válidas en instituciones diferentes: mundo de la vida y aula de matemáticas, produciéndose un conflicto semiótico de tipo epistémico.
-------------------	---

Tabla 5. Conflictos Semióticos.

Hay que notar que los tipos de conflicto semiótico cognitivo, epistémico e interaccional no son excluyentes, dependiendo de la perspectiva desde donde se enfoque un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro. Por ejemplo, el conflicto epistémico entre Emilio y el profesor [9-14] también es un conflicto interaccional y los conflictos cognitivos de una persona a menudo son resultado de interacciones sociales generadoras de conflicto.

#### **Aplicación del Nivel 4. Identificación de normas.**

Para este nivel planteamos a los profesores la actividad que se muestra en la tabla siguiente.

<p>¿Qué normas y metanormas han condicionado el proceso de instrucción?</p> <p>En el episodio de clase dado, podemos observar algunas normas y metanormas que han condicionado el proceso de instrucción. Por ejemplo, "No basta dar la solución de un problema, hay que justificar que la solución es correcta" se mencionan en la transcripción en 2, 20, 24, 30.</p> <p>Identifique en qué lugares de la transcripción aparecen las siguientes normas o metanormas.</p>
--

1. "En un problema contextualizado los signos matemáticos tienen una interpretación (hay que interpretar si la solución tiene sentido para el contexto inicial)". \_\_\_\_\_
2. "Los enunciados de los problemas no se pueden modificar". \_\_\_\_\_
3. "Una vez se ha descontextualizado el problema, hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial".
4. Hay cosas que son importantes en matemáticas (p. El ensayo y error no lo es y las ecuaciones si lo son)".  
\_\_\_\_\_
5. "Los problemas se pueden resolver por diferentes métodos (aunque algunos son más matemáticos que otros)".  
\_\_\_\_\_

¿Observa alguna otra norma o metanorma más? En caso afirmativo enúnciela e indique en que lugar de la transcripción se encuentra.

Dando respuestas a la tarea anterior, pudimos introducir las definiciones de normas y metanormas, poco conocidas por los profesores.

En el aula, la actividad matemática tiene una dimensión social puesto que ella tiene lugar la construcción y la comunicación de conocimiento matemático a través de interacciones sociales entre alumnos y profesor. Así, el aprendizaje matemático está condicionado no solo por conocimientos matemáticos y didácticos, sino por algunas reglas llamadas normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) y las cláusulas del contrato didáctico (Brousseau, 1988, 1997). En D'Amore, Font y Godino (2007), nos muestran diferentes criterios de clasificación de las normas como: el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), el aspecto del proceso de estudio a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional,

mediacional...), su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad...), etc.

De acuerdo con D'Amore, Font y Godino (2007), entendemos por normas epistémicas las configuraciones de objetos: situaciones-problema, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos las cuales regulan la práctica matemática en un marco institucional específico. Pero además, cada uno de los componentes de la configuración de objetos está relacionado con normas metaepistémicas, llamadas normas sociomatemáticas por autores diversos (Civil y Planas, 2004; Cobb y McClain, 2006; Planas y Civil, en prensa; Stephan, Cobb y Gravemeijer, 2003; Yackel y Cobb, 1996). Así por ejemplo, en las **situaciones-problema**, el alumno debe saber responder a preguntas como: qué es un problema, cuándo decimos que se ha resuelto, qué reglas conviene seguir para resolverlo, cómo debo dar la respuesta etc. De igual modo si nos fijamos en el componente **argumento** ya que el alumno necesita saber qué es un argumento en matemáticas, cuándo se considera válido, cómo justifico, etc. Hemos detallado normas epistémicas al describir la configuración de objetos en la tabla 3 de este documento. Pero también, en la transcripción del episodio se pueden deducir otros tipos de normas. A continuación mostramos algunas de ellas.

<p>Normas metaepistémicas</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No basta dar la solución de un problema, hay que justificar que la solución es correcta [4, 20, 24, 30].</li> <li>- Hay que interpretar el sentido de la solución en el contexto del problema [24]</li> <li>- Los enunciados de los problemas no se pueden modificar [14].</li> <li>- Hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial del problema [38].</li> </ul>
-------------------------------	--

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Hay elementos importantes en matemáticas, como las ecuaciones, a diferencia de otros como el método de ensayo y error [46, 50].</li> <li>- El profesor decide sobre la validez de una argumentación [28, 49].</li> <li>- Hay argumentaciones que no son válidas en matemáticas [16].</li> <li>- Los problemas pertenecen a familias de problemas [1, 19].</li> </ul>
Normas que regulan las interacciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El profesor interviene para resolver dificultades de los alumnos [38, 40].</li> <li>- El profesor tiene un papel determinante en el inicio, distribución y finalización de intervenciones [2, 6, 18, 22, 50].</li> <li>- Los alumnos intervienen cuando no entienden algo [31] y [37].</li> </ul>
Normas que regulan el uso de los materiales en el aula	<ul style="list-style-type: none"> <li>- [40] Se puede usar la calculadora (por ejemplo, para comprobar que la división es exacta).</li> <li>- [49] Las soluciones correctas se tienen que copiar en el cuaderno de clase</li> </ul>

Tabla 5. Identificación de normas

Las normas metaepistémicas “hay que interpretar el sentido de la solución en el contexto del problema [24]” y “hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial del problema [38]” pueden ocasionar conflictos a los alumnos, pues según la interrelación pueden ser contradictorias. La práctica matemática conlleva la posibilidad de desprenderse del contexto extramatemático cuando conviene y volver a él cuando interesa. Para algunos alumnos puede ser difícil entrar en este “juego de lenguaje”. El análisis realizado en el apartado anterior muestra que

efectivamente dichos conflictos se han producido y que Emilio y Mateo los han experimentado.

## **Conclusiones**

Observamos que los profesores abarcaron en sus análisis didácticos diferentes aspectos. Así, por ejemplo, algunos centraron su atención en el hecho de que en el episodio de clase analizado el profesor realizaba un proceso de socialización de la resolución de un problema; otros realizaron objetos matemáticos (proporcionalidad, ecuaciones, etc.) presentes, según ellos, en la transcripción. La mayoría de profesores expresó apreciaciones negativas en torno a la práctica profesional del profesor del episodio. Para argumentarlas, mencionaron, entre otros aspectos, el hecho de que el profesor no había gestionado bien algunas intervenciones de los alumnos o bien que había creado un clima emocional desfavorable para dos de ellos; también sugirieron cómo tendría que haber actuado el profesor del episodio.

Más que responder a la pregunta ‘¿qué se ha hecho mal y cómo se debería mejorar?’, el tipo de análisis que pretendemos desarrollar debe responder en primer lugar a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’. Entendemos, por tanto, que el estudio exhaustivo de los aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar posteriormente valoraciones sobre esta situación.

Nuestra conclusión es que el modelo de análisis didáctico que propone el EOS aplicado en este trabajo es útil para la investigación sobre la práctica docente de los profesores de matemáticas, así como también puede ser útil para el grupo de profesores interesados en reflexionar sobre su propia práctica. Esto último, basándonos en la experiencia positiva de este taller. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. Para el

diseño de estos programas son necesarias herramientas para el análisis de la práctica docente como las que aquí se han propuesto.

## Referencias

Brousseau, G. (1988). *Le contrat didactique: le milieu*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9 (3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. Dordrecht: Kluwer.

Civil, M.; Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 7-13.

D'Amore, B., Font, V.; Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.

Font, V.; Contreras, A. (en prensa). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*.

Font, V.; Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes in L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.), *Semiotics in Math Education: Epistemology, Historicity, and Culture*. Sense Publishers: The Netherlands.

Godino, J. D.; Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.

Godino, J. D.; Contreras, A.; Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006), Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 131-155.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R.; Castro, C. de (2008, en prensa). Una aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21.

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 66: 201-222.

Stephan, M.; Cobb, P.; Gravemeijer, K. (2003). Coordinating social and psychological analyses: learning as participation in mathematical practices. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 12 (67-102). Reston, VA: NCTM.

Yackel, E.; Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.



# Visualización de la noción de límite empleando el Cabrí II

María del Carmen Bonilla Tumialán  
Pontificia Universidad Católica del Perú

Jacqueline Huanqui Astocóndor  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## Resumen

En la Maestría en la Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú se desarrolla una investigación sobre la enseñanza de la noción de límite. Numerosas investigaciones constatan el fracaso de las aproximaciones teóricas y formales que se desarrollaron en el contexto de las matemáticas modernas, y de las estrategias de enseñanza usuales, que reducen el Análisis a un cálculo algebraico algoritmizado (Artigue, 1998). El problema de investigación que motiva el taller se presenta en función cómo diseñar archivos en Cabrí Géomètre que permitan la transposición didáctica de la noción de límite a contextos computacionales, transposición informática (Balacheff, 1994), y que promuevan una transformación a nivel epistemológico de la experiencia matemática del estudiante. Se elabora la propuesta enfocando diferentes sistemas de prácticas (Godino, 2006) de la noción de límite (límite de sucesiones y límite de funciones). En un primer momento, en base a la resolución de un grupo de problemas de carácter geométrico diseñados por Hitt y Páez (2003) procuramos un acercamiento intuitivo a la noción de límite de sucesiones. En una segunda parte del taller se trabaja en la construcción geométrica de la noción de límite de funciones. La visualización y manipulación del concepto permite la comprensión cabal de la definición formal, la validación de los enunciados matemáticos y la activación de un proceso cognitivo marcado por la relación dialéctica entre percepción

y conceptualización durante la interacción con la interfase del sistema (Moreno, 2002)

**Palabras claves:** noción de límite, geometría dinámica, Cabrí, visualización.

**Audiencia:** Profesores de los cursos de Cálculo a nivel universitario

**Equipo necesario:** Proyector Multimedia.

**Software:** Microsoft Office, Cabri Géomètre II Plus.

**Ambiente:** Laboratorio de Informática o de Computación

### **Marco Teórico**

La dificultad de los alumnos para entrar al campo conceptual del cálculo ha generado numerosos trabajos que analizan las causas de esta problemática (Artigue, 1995), como el no partir de problemas al introducir las nociones, el empleo temprano de un lenguaje formalizado y una enseñanza centrada en el discurso del profesor. Teniendo en cuenta estas críticas la concepción de la matemática cambia, se la considera como una actividad humana, histórica, que no se descubre sino se construye, que tiene como fin la resolución de problemas intra o extramatemáticos, y que debe equilibrar la exigencia del saber matemático con la exigencia del funcionamiento cognitivo del estudiante.

A pesar de los cambios en la enseñanza del cálculo, existen un conjunto de dificultades analizadas por diferentes investigadores. Señalaremos aquellas dificultades que se busca disminuyan con este taller al utilizar el Cabri Géomètre II en la visualización y comprensión de la noción de límite.

Una dificultad que se presenta en la comprensión de toda noción matemática es la de articular los diferentes registros semióticos (escrito, verbal, gráfico, gestual, material). Bosch (2000) nos señala la no diferenciación entre registros desde el punto de vista de su función en su trabajo matemático. Todos tienen el mismo valor. Es más, según Blázquez (2001), dominar un concepto consiste en conocer sus principales

representaciones, sus significados, traducir unas en otras. En ese sentido las actividades propuestas en el Taller consiguen representar en forma simultánea representaciones algebraicas, gráficas y numéricas de la noción de límite. A través del movimiento podemos apreciar cómo se articulan las diferentes representaciones.

Otro aspecto que también corresponde al aprendizaje de toda noción matemática es la flexibilidad proceso-concepto (Artigue, 1995). Existen dificultades para desarrollar la flexibilidad entre las nociones vistas como proceso y las nociones vistas como objeto. Los objetos matemáticos presentan dos status: el operacional, dinámico y el estructural, estático. Es frecuente, por no decir siempre, que en la historia de los conceptos el primer status precede al segundo. Esa misma jerarquía se reflejaría en el aprendizaje individual. Existe dificultad de separar la visión de límite en términos de proceso, para separar el objeto límite del proceso que lo ha construido. En las actividades propuestas en el Taller, principalmente en las sucesiones de figuras geométricas del cuadrado y el círculo, podemos apreciar como se da el proceso de construcción de una aproximación intuitiva a la noción de límite de sucesiones, visualizando el cambio gracias al carácter dinámico del Cabrí, superando así las limitaciones de la representación geométrica tradicional.

### **Ejercicio N° 1**

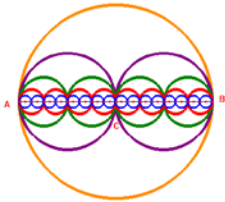
Se construye un círculo con el segmento AB como diámetro.  $AB = 8$ . Luego se divide AB en dos partes iguales, AC y CB, y se construye dos círculos. Se continúa dividiendo y construyendo más círculos.

- a) Si sumas las áreas determinadas por los círculos a medida que disminuye la longitud de cada sub-segmento, ¿Obtendrás un valor? ¿Cuál es el valor? Justifique su respuesta.

Cabri Geometría II Plus [límite de sucesiones\_círculo.fig "]

Archivo Edición Opciones Sesión Ventana Ayuda

Active revisar construcción



Area

C1	$\pi r^2$	50,27	
C2	$2 \pi (r/2)^2$	$\pi r^2/2$	25,13
C3	$4 \pi (r/4)^2$	$\pi r^2/4$	12,57
C4	$8 \pi (r/8)^2$	$\pi r^2/8$	6,28
C5	$16 \pi (r/16)^2$	$\pi r^2/16$	3,14

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi r^2}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} r &= 4 \\ r/2 &= 2 \\ r/4 &= 1 \\ r/8 &= 1/2 \\ r/16 &= 1/4 \end{aligned}$$

Inicio Microsoft Office LibreOffice Calc Cabri Geometría II Plus

## Ejercicio N° 2

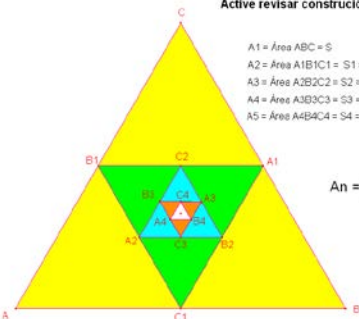
Se construye un cuadrado de lado 1. Uniendo los puntos medios de los lados se construye un cuadrado inscrito. Así sucesivamente se toman los puntos medios de los lados y se van construyendo cuadrados inscritos.

¿Cuál es el área de la figura final?

Cabri Geometría II Plus [Triángulo equilátero.fig "]

Archivo Edición Opciones Sesión Ventana Ayuda

Active revisar construcción



$A_1 = \text{Área } ABC = S$   
 $A_2 = \text{Área } A_1B_1C_1 = S_1 = 0,25 S$   
 $A_3 = \text{Área } A_2B_2C_2 = S_2 = 0,25 S_1 = 0,25 \times 0,25 S$   
 $A_4 = \text{Área } A_3B_3C_3 = S_3 = 0,25 S_2 = 0,25 \times 0,25 \times 0,25 S$   
 $A_5 = \text{Área } A_4B_4C_4 = S_4 = 0,25 S_3 = 0,25 \times 0,25 \times 0,25 \times 0,25 S$

$$A_n = \left( \frac{1}{4} \right)^{n-1} S$$

Inicio Microsoft Office LibreOffice Calc Microsoft Paint Cabri Geometría II Plus

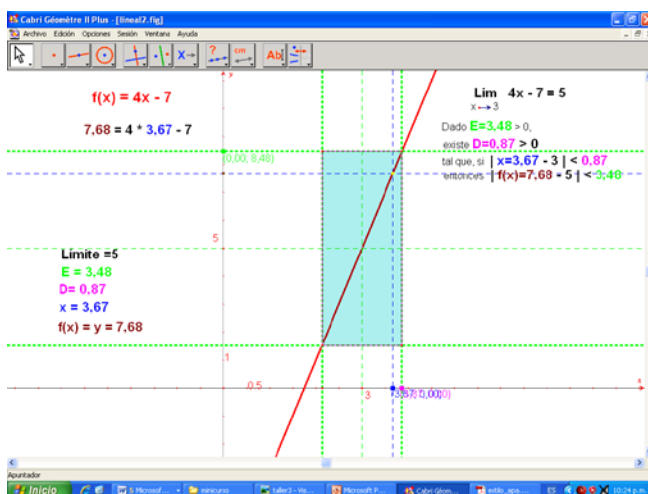
Según Alsina, Burgués y Fortuny (1997) la historia del desarrollo de las Matemáticas es la historia del desarrollo del conocimiento geométrico, dos modos de comprensión y expresión, 1) el que se realiza de forma directa, que corresponde a la *intuición geométrica*, de *naturaleza visual*, y, 2) el que se realiza de forma *reflexiva, lógica, de naturaleza verbal*. Ambos son complementarios. La visualización permite el desarrollo de la intuición geométrica, por ende, de la creatividad. Tiene un carácter subjetivo.

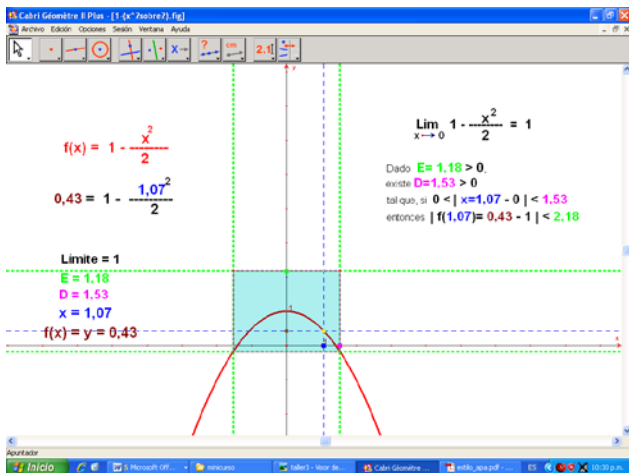
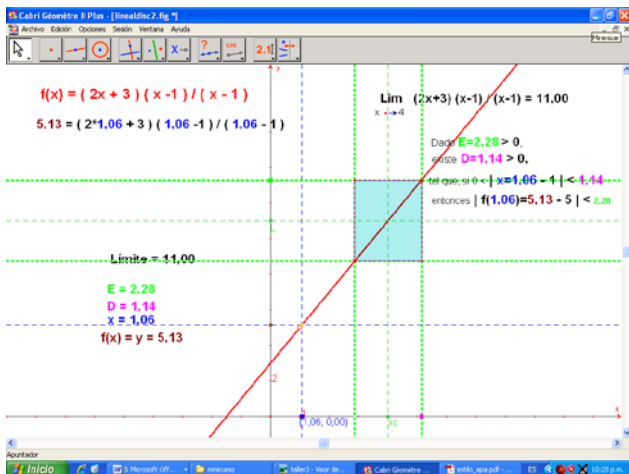
Para Miguel de Guzmán (1996) las corrientes formalistas han privilegiado la exposición formal de la matemática, considerando inútiles a los apoyos en la intuición visual de los conceptos y procesos del pensamiento matemático, sin tomar en cuenta que muchas veces las intuiciones visuales han dado origen a los conceptos y procesos matemáticos más básicos e importantes. La adquisición de ese sustrato visual e intuitivo puede ser muy provechosa para cualquier usuario de la matemática. Para los griegos la visualización era algo connatural a las matemáticas. La palabra *τεορεμα* (zeorema) significa contemplar y no lo que se demuestra. Las Geometrías no euclídeas y otros hechos llevaron a crear una corriente hacia la formalización y una desconfianza hacia la visualización. La tendencia actual es a la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático. Lo visual se considera como un argumento heurístico y como una forma de validar propiedades; incluso algunos consideran que el rol de la noción tradicional de prueba en Educación ha cambiado, y nuevas formas y tipos de explicación y argumentación se han desarrollado, producto del uso de las computadoras. Como una consecuencia, en la filosofía y en la historia de la matemática el enfoque de cómo entender la matemática ha cambiado. (Hanna, Jahnke y Pulte, 2006).

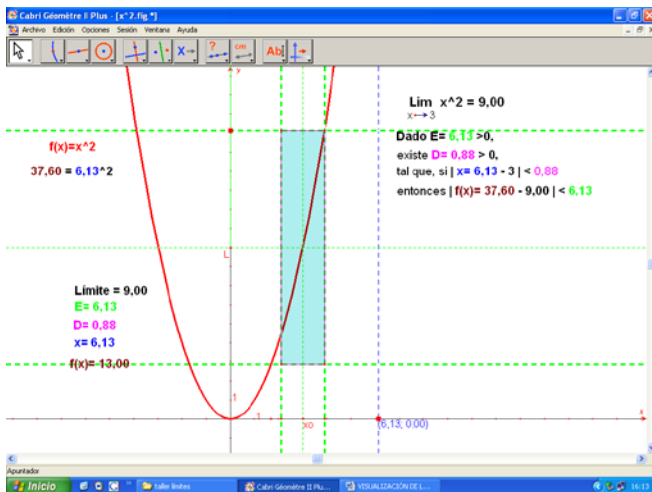
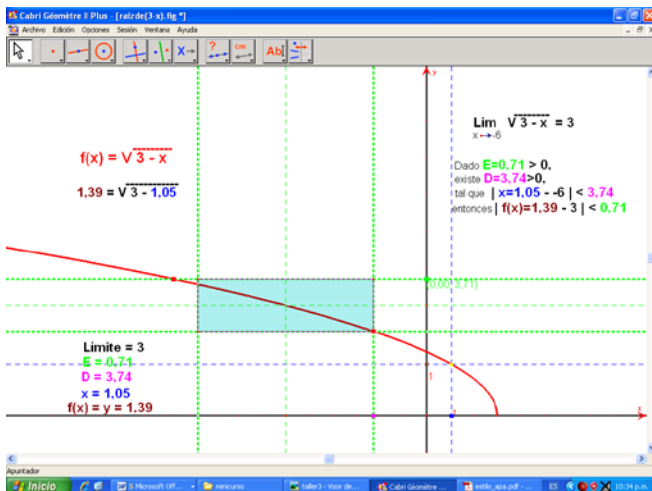
En el enfoque tradicional la formalización estándar de la noción de límite expresa una dificultad asociada a su carácter poco natural, al construirse una vecindad alrededor del límite. Se hace necesaria la utilización de cuantificadores, de  $\varepsilon$ , que hacen más compleja la definición. Desde una perspectiva histórica existe un salto cualitativo entre el

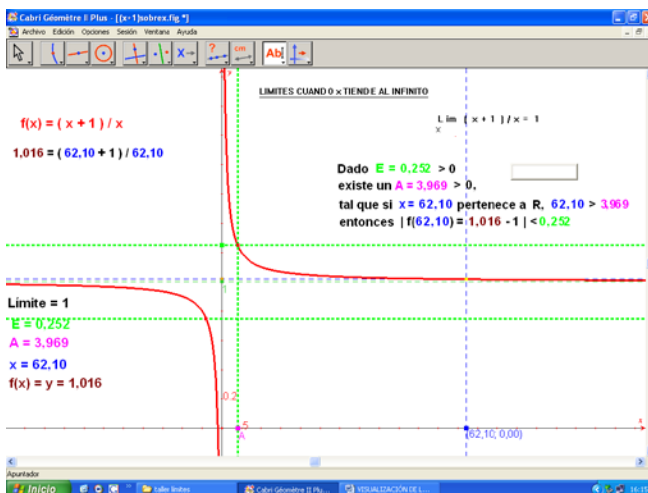
manejo intuitivo de la noción de límite y la noción formalizada estándar. Esta última rompe con las concepciones previas de la noción. Al momento de efectuar la transposición didáctica del concepto de límite no se pone en evidencia su dimensión epistemológica. Se enfatiza en su papel de concepto unificador del campo del análisis y se deja de lado su papel productivo para resolver problemas. Utilizando las actividades en Cabri relacionadas al límite de funciones procuramos establecer una articulación entre sus representaciones geométrica, algebraica, y aritmética, que permita una mejor comprensión del enunciado formal de la noción de límite.

A continuación se trabaja la construcción de límites de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales cuando tienden a un punto, así como límite de funciones cuando tienden al infinito.









Podemos apreciar que la geometría dinámica del Cabri vence a la fuerza de una geometría estática que no permite ver los objetos involucrados en la noción de límite y su topología subyacente.

El conocimiento matemático no es el resultado de un proceso continuo, ni lineal. Es un proceso dialéctico que se da en espiral. El desarrollo del conocimiento matemático ha necesitado de momentos de ruptura con las formas de pensamiento anteriores. Históricamente hemos adquirido primero el pensamiento numérico. El Álgebra, ciencia de la cantidad finita que tiene por objetivo extraer las raíces de las expresiones, significó liberarse de la concepción “estática” de la matemática griega para ver la variación. Como producto del desarrollo de la matemática surge el Análisis, la ciencia del infinito. En el pensamiento analítico la visión de la noción de igualdad debe ser enriquecida, reconstruida, así como se hizo en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico. Para Leibniz la variable es una secuencia de valores infinitamente próximos. El crecimiento y movimiento se expresa como creciendo por mínimos, o términos continuamente crecientes, elemento por elemento.

Es nuestro interés que a través de las actividades propuestas se logre sentar las bases para el desarrollo de una aproximación intuitiva del pensamiento analítico, pues con el Cabrí podemos visualizar el cambio en valores infinitamente próximos.

## Referencias

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (4ª ed.). Madrid, España: Síntesis.

Artigue, M. (1995). *La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 41 – 56.

Bainville, E. (2002). Cabri Geometry II Plus. User Manual. Cabrilog. (S. Hoath, trad.) [Manual de cómputo]. Recuperado de <http://www.cabri.com>

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14(1-2),9-42.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, 4 (3), 219 – 236.

Bosch, M. (2000). *Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática*. Recuperado el 20 de agosto del 2006, del sitio web de la Universidad de Granada: [http://www.ugr.es/local/seiem/IV\\_Simposio.htm](http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm)

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid, España: Pirámide.

Godino, J. (2006) *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 10 de mayo del 2006 del sitio web de la Universidad de Granada: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_1mayo06.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_1mayo06.pdf).

Hanna, G., Jahnke, H. y Pulte, H. (2006). *Conference Program (preliminary) of The International Conference Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Recuperado el 20 de agosto del 2007 del sitio web de la Universidad Duisburg Essen: [http://www.bew.de/bew/bew\\_essen/](http://www.bew.de/bew/bew_essen/)

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno*, (32), 97- 108.

Leithold, L. (1992). *El Cálculo con Geometría Analítica*. (6ª ed.). (A. Eroles, trad.). México, D.F.: Harla

Moreno, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Bogota: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.



# Edición y reutilización de simuladores digitales (Nippe Descartes) en la enseñanza de las Matemáticas

Alberto Mejía Manrique  
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas-UPC

## Resumen

La visualización juega un papel muy importante en la enseñanza de las Matemáticas y su mayor impacto se logra cuando los estudiantes logran visualizar un concepto o problema. “Visualizar un problema significa entenderlo en términos de un diagrama o de una imagen visual. La visualización en matemáticas es un proceso en el que se forman imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología, y se utiliza con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas”<sup>1</sup>

Para hacer uso de la visualización matemática se han hecho uso de una serie de herramientas (de libre disponibilidad y de pago) a partir de las cuales se han implementado formas de trabajo con los estudiantes. Dentro de las herramientas de libre disponibilidad más conocidas podemos mencionar:

**Winplot:** <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>

Es un ploteador que permite graficar (y animar) curvas y superficies determinadas por ecuaciones cartesianas, polares y paramétricas entre otras.

**Winggeom:** <http://math.exeter.edu/rparris/winggeom.html>

---

<sup>1</sup> <http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/carrion/carrion.htm>.  
Vicente Carrión Miranda, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, México.

Es un ploteador que permite graficar elementos geométricos (básicamente geometría euclidiana) en dos y tres dimensiones. Dichos elementos pueden ser resaltados y animados de diferentes maneras con la idea de desarrollar simulaciones para el estudiante e interacciones con el estudiante.

Por otro lado existen instituciones como **EDUTEKA** y su Portal Educativo (<http://www.eduteka.org/>) actualizado quincenalmente desde Cali, Colombia, por la **Fundación Gabriel Piedrahita Uribe** que provee, en forma gratuita, toda clase material a docentes y directivos escolares interesados en mejorar la educación básica y media con el apoyo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC).

Esta institución considera a los DIM's (Diagramas Matemáticos Interactivos) un tipo de **Manipulable Virtual**. En la siguiente dirección:

<http://www.eduteka.org/Manipulables.php> se desarrolla una taxonomía a partir de los tipos de herramientas y objetivos pedagógicos planteados.

Inclusive ha desarrollado módulos listos para descargar y ser usados por la comunidad docente para el desarrollo de sus secuencias de enseñanza – aprendizaje. En algunos casos es necesario tener instalada la máquina virtual de Java<sup>2</sup> mientras que otras simulaciones están desarrolladas en Shockwave y necesitan instalar un plugin<sup>3</sup>. Estos módulos se pueden encontrar en <http://www.eduteka.org/instalables.php3>.

---

<sup>2</sup> Máquina Virtual de Java: Intérprete y ambiente de ejecución de Java para applets y aplicaciones de este lenguaje. Se le llama “máquina virtual” porque, sin importar el tipo de computador en el cual se esté ejecutando el programa, crea un computador simulado que proporciona la plataforma correcta para ejecutar estas aplicaciones. Es posible descargar este software gratuitamente de <http://java.sun.com/j2se/1.3/download.html>

<sup>3</sup> Plugin: Es un módulo de programa diseñado para interactuar directamente con una aplicación (Explorer, netscape, etc) para darle más funciones. Muchos programas como

Luego de visitar estas páginas y de instalar algunos de los módulos e identificar cuando estamos frente a un DIM (o manipulable virtual) programado con Java o publicado con Shockwave, pudimos reconocer que muchos DIM programados con Java, a su vez **EDUTEKA** los programo apoyados en recursos de otros portales.

Es entonces que llegamos a uno de los proyectos mas importantes desarrollados por el **Ministerio de Educación y Ciencia de España** orientado al desarrollo de materiales que impulsen el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje apoyados en las TIC's en la asignatura de matemática: **Descartes 3** que se puede encontrar en: <http://descartes.cnice.mecd.es/> dentro de el trabajaremos con el núcleo interactivo para programas educativos (**Nippe Descartes**).

*“Descartes es una herramienta para profesores y estudiantes de matemáticas, física y otras ciencias. Las aplicaciones de Descartes son escenas educativas con gráficas y números y en las que el alumno puede modificar parámetros manipulando controles y observar el efecto que esas modificaciones tienen sobre las gráficas y números. Los profesores pueden crear escenas de Descartes modificando configuraciones existentes o creando configuraciones nuevas y pueden insertar las escenas en páginas Web para crear lecciones o unidades didácticas interactivas y colocarlas en un servidor de internet, en el disco fijo de un ordenador o en un CD-ROM.”<sup>4</sup>*

Descartes es un applet configurable. ¿Esto que significa?

---

Shockwave de Adobe necesitan que se instale un módulo (plugin) que habilite al navegador para desplegar animaciones. Es posible descargar este módulo gratuitamente de <http://www.adobe.com/shockwave/download/instructions/streaming.html>.

<sup>4</sup> [http://descartes.cnice.mecd.es/Documentacion\\_3/index.html](http://descartes.cnice.mecd.es/Documentacion_3/index.html).

Documentación técnica Proyecto Descartes 3

- 1) Que sea un applet significa que puede insertarse en páginas Web.
- 2) Que sea configurable significa que cada aplicación o configuración puede tener un aspecto diferente.

De esta forma los profesores tienen a su disposición un recurso que pueden descargar, configurar y ajustar a sus propios diseños de actividades.

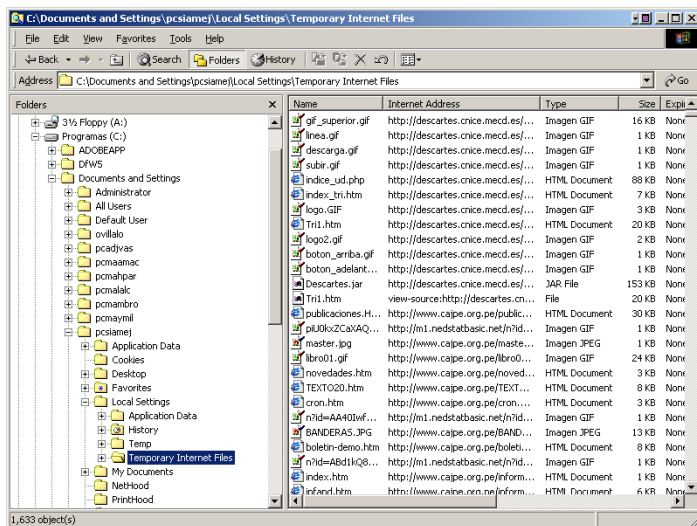
En consecuencia, el objetivo de este taller es:

- Descargar los DIM's o Manipulables Virtuales (**conocidos técnicamente como applets**) del **Proyecto Descartes 03**.
- Descargar los Manipulables Virtuales del **Proyecto MIT Open Courseware**.
- Descargar los Manipulables Virtuales del **Proyecto Estadística Interactiva**.
- Comprender la visión del director general (Mariano Segura) del Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE)
- **Proyecto Homovidens:** Profesores para el Futuro (impulsado por la Secretaria de Cultura y Extensión Universitaria – SCEU, la Facultad Regional de Buenos Aires – FRBA, el Departamento de Aprendizaje Visual de la Universidad Tecnológica Nacional – UTN y la empresa Telecom Argentina). En el marco de este punto se espera que los asistentes adquieran un conocimiento sobre **Nippe Descartes** tal que puedan:
  - Utilizar las escenas generadas con el programa Descartes por otros docentes.
  - Modificar simuladores existentes.
  - Elaborar nuevos simuladores.

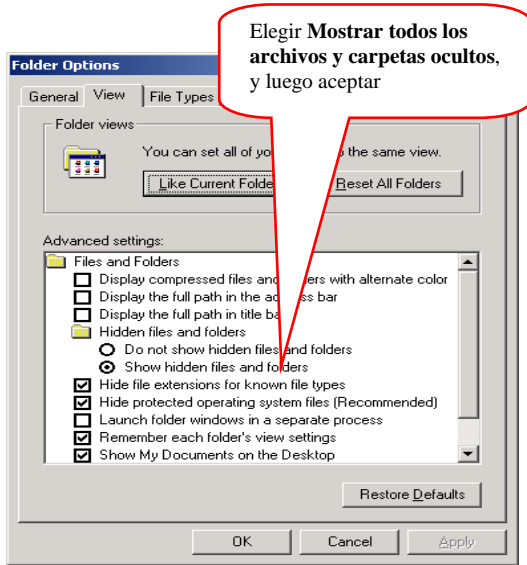
#### **A. Descarga de los Applets del Proyecto Descartes 03**

**Nota:** Recuerde que para poder visualizar los applets de Descartes 3 es necesario que su computadora debe tener instalada la máquina virtual de Java. En caso de no contar con este software es posible descargarlo gratuitamente de <http://java.sun.com/j2se/1.3/download.html>

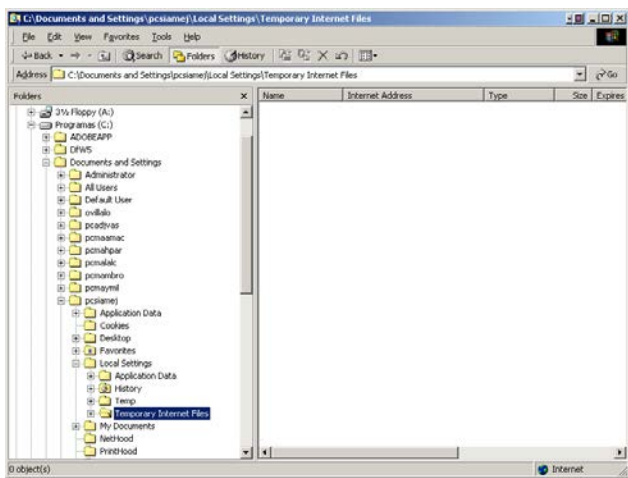
- 1) Ubicamos la siguiente carpeta en el disco duro de nuestro computador: **C:\Documents and Settings\pcsiamej\Local Settings\Temporary Internet Files.**
- 2) En la mencionada carpeta se graban todas las imágenes, animaciones, textos, applets, etc, que forman parte de los sitios web que visualizamos en nuestro computador como se muestra en la siguiente figura.



**Nota:** Puede ocurrir que la carpeta **Temporary Internet Files** se encuentre oculta. En este caso usted debe ir al menú **Tools** (herramientas) de la ventana del explorador y elegir **Folder options...** (Opciones de carpeta) y hacer clic en la pestaña **View** (Ver)

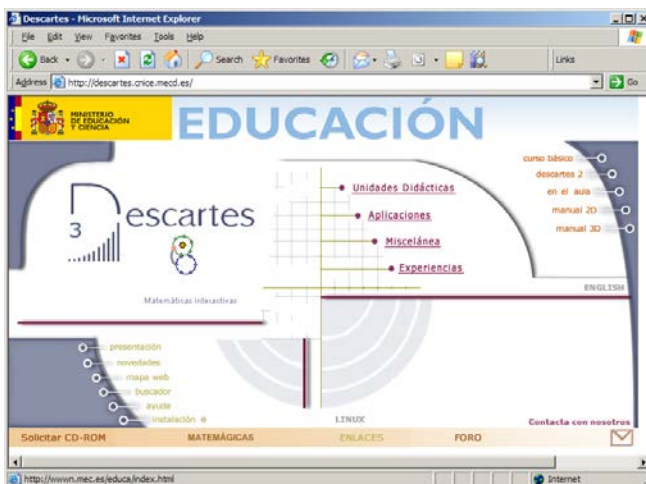


- 3) Para poder trabajar con más comodidad vamos a borrar el contenido de dicha carpeta.



Ahora recomendamos un conjunto de direcciones que contienen applets para los cursos de Ciencias:

**Proyecto Descartes 3:** <http://descartes.cnice.mecd.es/>



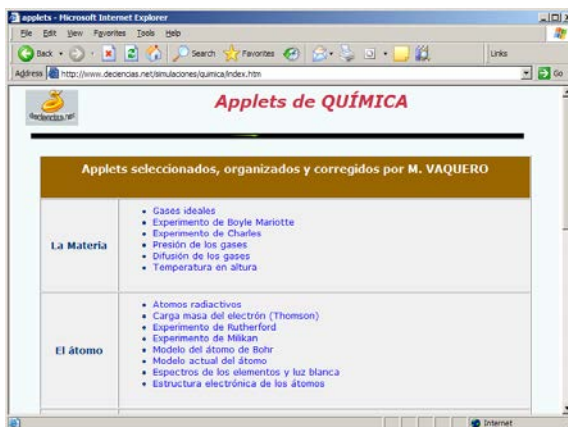
**Proyecto Newton:** <http://newton.cnice.mec.es/index2.html>



Física: <http://www.walter-fendt.de/ph11s/>

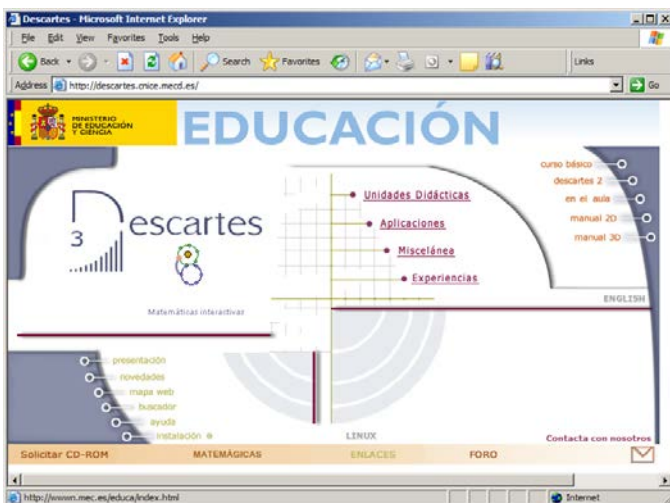


Química: <http://www.deciencias.net/simulaciones/quimica/index.htm>



Ahora nos concentraremos en la descarga de los applets del proyecto Descartes 3.

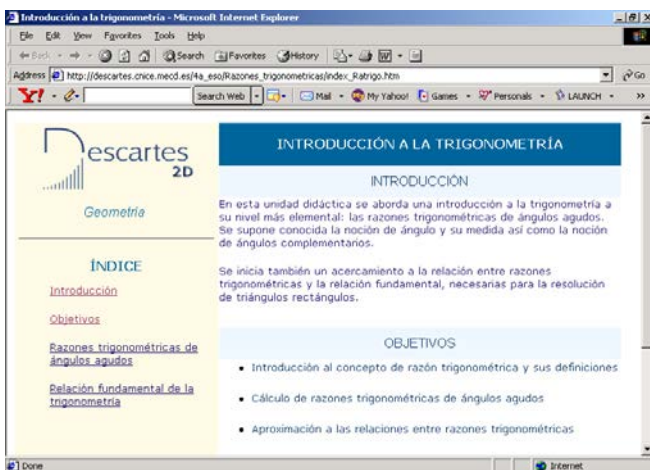
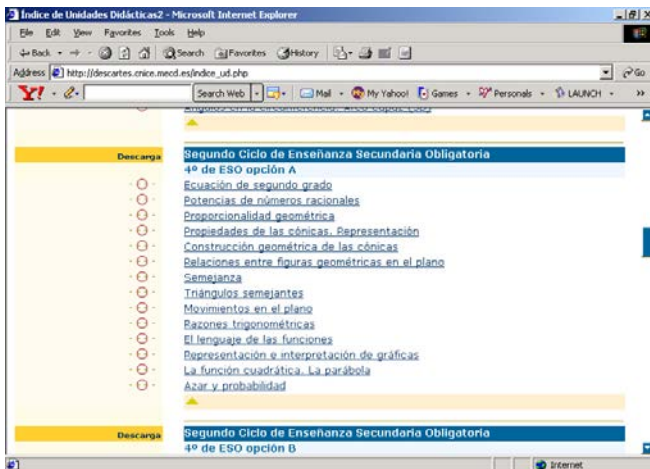
- 4) Abrir **Internet Explorer** y digitar en el campo dirección: <http://descartes.cnice.mecd.es/index.html>



- 5) Luego hacemos clic sobre **Unidades Didácticas**.



- 6) Bajamos hasta **Segundo Ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (4to de ESO opción A)**, luego **Razones trigonométricas**.



- 7) A continuación seleccionamos **Razones trigonométricas de ángulos agudos**.

Teorema de Tales - Microsoft Internet Explorer

Address http://descartes.chice.mec3.es/4\_eso/Razones\_trigonometricas/Ratigo1.htm

escartes 2D

RAZONES TRIGONÓMICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Geometría

### 1. RAZONES TRIGONÓMICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

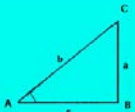
Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se definen en función de los lados de ese triángulo y son independientes de su tamaño. Las razones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente** del ángulo agudo de un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que el ángulo  $B=90^\circ$ ,  $b$  es la hipotenusa, y  $a$  y  $c$  son los catetos, se definen:

Si se aumenta el tamaño de los lados del triángulo prolongándolos y trazando rectas paralelas al lado  $a$  se obtienen triángulos semejantes al anterior y, por tanto, las razones trigonométricas del ángulo  $A$  siguen siendo las mismas, dependiendo sólo de su amplitud (en grados o en radianes). Con Descartes vamos a poder comprobar esta propiedad.

$$\text{sen } A = \frac{a}{b}$$

$$\text{cos } A = \frac{c}{b}$$

$$\text{tg } A = \frac{a}{c}$$



créditos zoom 40 0.x 96 0.y 96 config 1.- Varía los valores de b hasta que

Done Internet

Teorema de Tales - Microsoft Internet Explorer

Address http://descartes.chice.mec3.es/4\_eso/Razones\_trigonometricas/Ratigo1.htm

escartes 2D

RAZONES TRIGONÓMICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Geometría

### 1. RAZONES TRIGONÓMICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

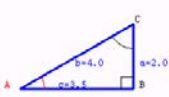
Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se definen en función de los lados de ese triángulo y son independientes de su tamaño. Las razones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente** del ángulo agudo de un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que el ángulo  $B=90^\circ$ ,  $b$  es la hipotenusa, y  $a$  y  $c$  son los catetos, se definen:

Si se aumenta el tamaño de los lados del triángulo prolongándolos y trazando rectas paralelas al lado  $a$  se obtienen triángulos semejantes al anterior y, por tanto, las razones trigonométricas del ángulo  $A$  siguen siendo las mismas, dependiendo sólo de su amplitud (en grados o en radianes). Con Descartes vamos a poder comprobar esta propiedad.

$$\text{sen } A = \frac{a}{b} = 0.500$$

$$\text{cos } A = \frac{c}{b} = 0.866$$

$$\text{tg } A = \frac{a}{c} = 0.577$$



créditos zoom 40 0.x 96 0.y 96 config 1.- Varía los valores de b hasta que alcance una longitud de 12.

2.- Observa cómo no varía el valor de las razones trigonométricas del ángulo de  $30^\circ$  que aparece en la figura. Cambia a  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .

3.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de  $15^\circ$ , 1 radian,  $85^\circ$  y 0.3 radianes.

Puesto que  $3.1416$  radianes son  $180$  grados un radian equivale a  $180/3.1416$  grados, cantidad que puedes introducir de modo indicado, Descartes calcula el resultado y, en este caso, lo redondea hasta los grados.

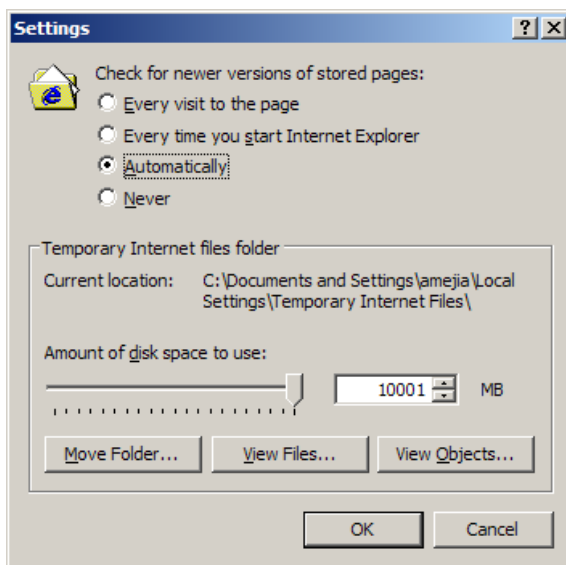
inicio ángulo A 30 hipotenusa 4.0 limpiar 4.- Intenta construir un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. ¿Qué valor

Done Internet

- 8) Observe que la página mostrada tiene dos applets. Nuestro objetivo es descargarlos de tal forma que podamos visualizarlos OFF LINE, es decir sin tener que estar conectados a Internet.



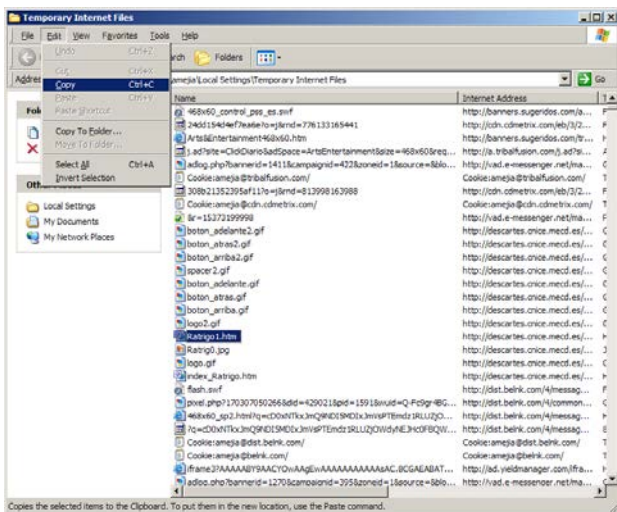
- 10) Pulsar el botón **Configuración (Settings)**.



- 11) Pulsar el botón **Ver Archivos (View Files...)**
- 12) Ordenamos los archivos que se muestran de los más recientes a los más antiguos, para poder identificar cuales necesitamos. En este caso es el archivo **Ratrigo1.htm**.
- 13) **Recuerde que los motores Descartes.jar y Descartes3.jar ya han sido entregados por el facilitador.**

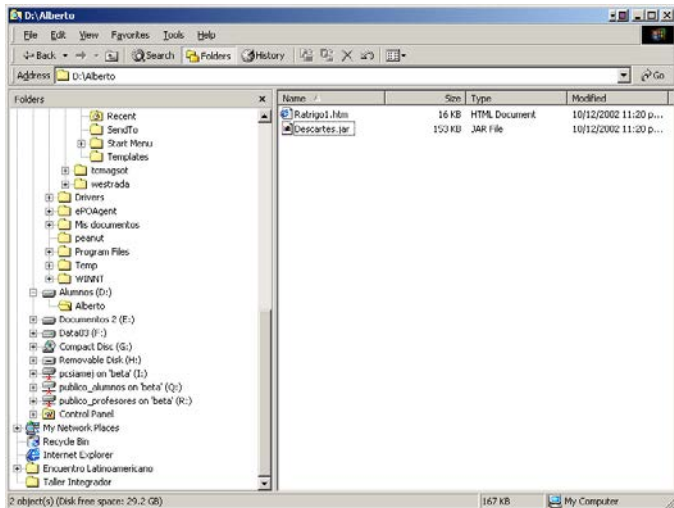
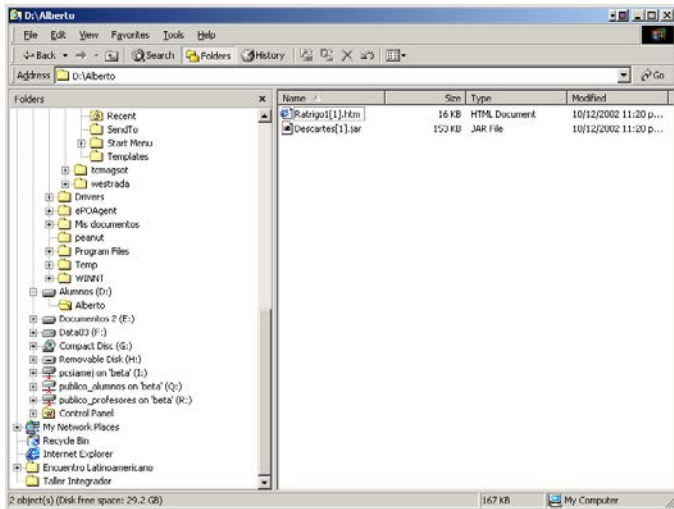
**Nota:** En este momento se explica como interactúan los archivos \*.jar con los archivos \*.html (es decir los applets con las páginas web)



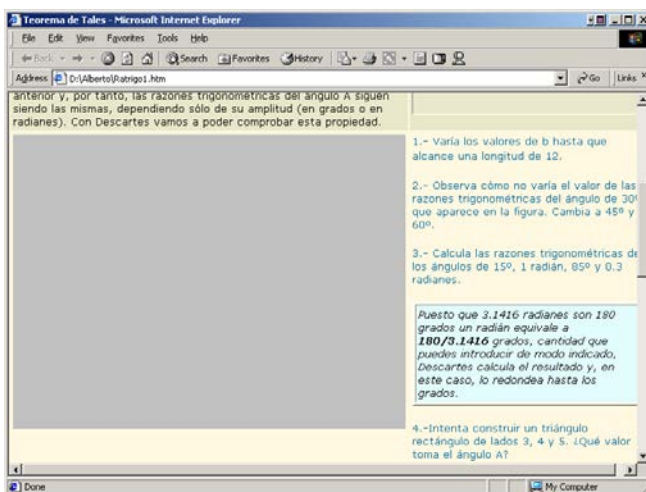


- 14) Seleccionamos el archivo (\*.html) y los copiamos, para luego pegarlos en una carpeta que crearemos en la unidad **D:** llamada **Alberto** (en su caso use su propio nombre) tal como se muestra en la siguiente figura.
- 15) Observe que las copias de los archivos arriba mencionados, agregan a los nombres originales los símbolos [1] cuando son copiados, para que funcionen correctamente deber restaurar los nombres originales.

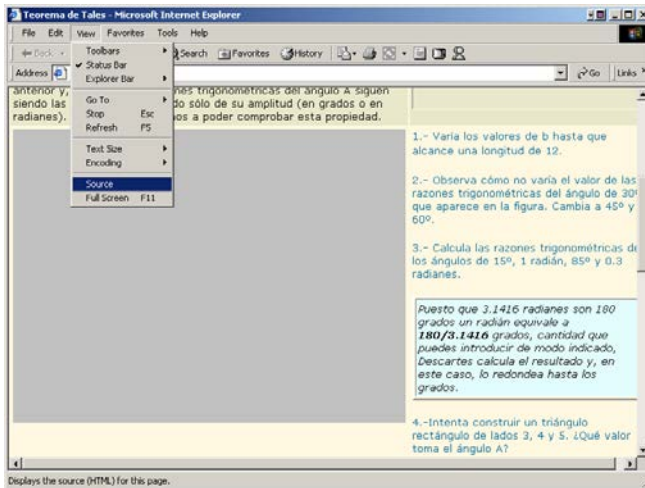
**Nota:** En realidad esta restauración sólo es obligatoria para el archivo \*.jar, en el caso de que dicho archivo se descargara por la misma vía, el archivo en formato \*.html podría dejarse con el símbolo [1].



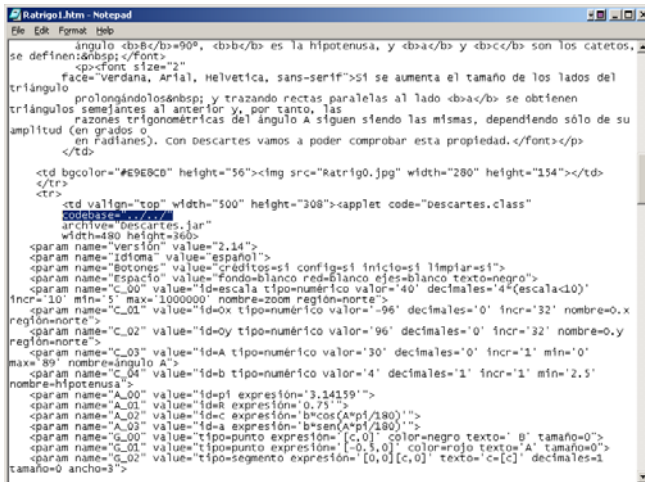
16) Ahora tenemos que hacer doble clic sobre el archivo **Ratrigol.htm** ubicado en la carpeta **D:\Alberto**.



- 17) Observe que los applets originales no se visualizan. Recuerde que en el computador de trabajo debe estar instalada la máquina virtual de Java que se puede descargar de la dirección indicada anteriormente. En caso de que no se encuentre instalado el JDK, los applets no se podrán visualizar.
- 18) Esto ocurre porque la pagina **Matrigo1.htm** almacena una ruta relativa que ya no existe. Debemos realizar la siguiente modificación: eliminar los comandos : **codebase="..../"** que aparecen dentro del código HTML de la página. Es decir aparecerá una línea de código : **codebase="..../"** por cada applet incrustado que tenga la página descargada. Por ejemplo en este caso al tener 2 applets incrustados en esta página, tendremos que eliminar **codebase="..../"** dos veces.
- 19) Para ello escogemos la opción : **View > source** en el menú principal del browser (como se muestra en la figura).

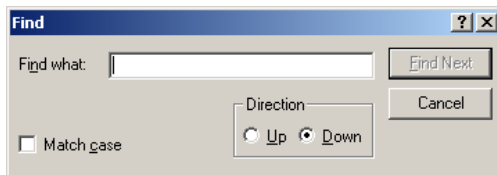


20) En la pagina HTML correspondiente debo buscar la primera aparición de `codebase="..//"`

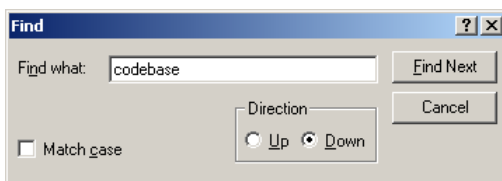


21) Para encontrarlo y borrarlo sugerimos seguir el siguiente procedimiento:

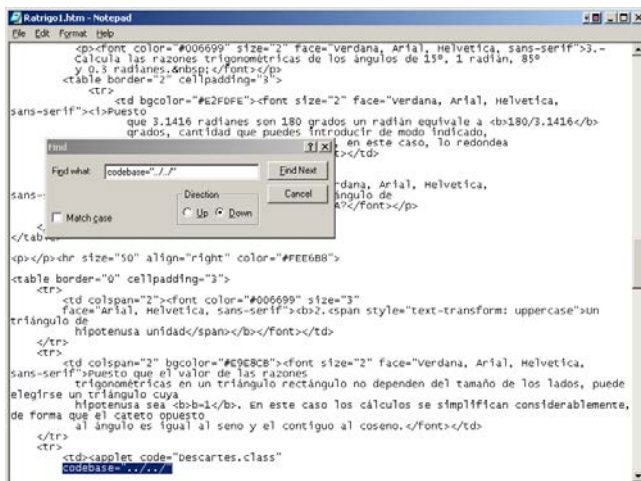
22) Seleccionamos la opción **Edit > Find ...** y aparecerá la ventana



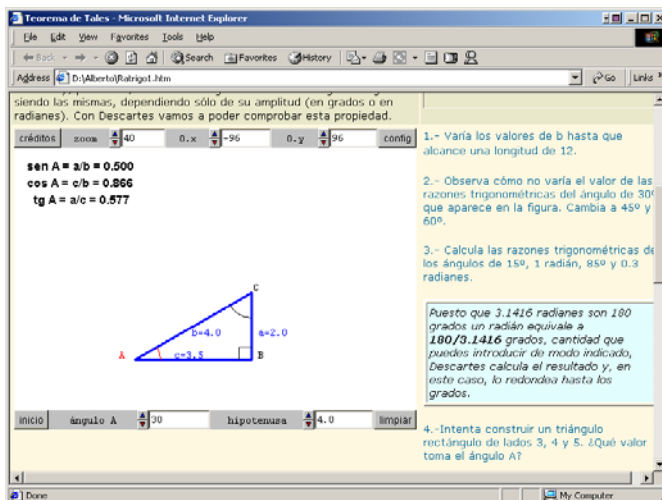
23) Nos ubicamos dentro del campo **Find what** y escriba **codebase**.



24) Para buscar las ocurrencias de dicho texto pulsamos el botón **Find Next**.



- 25) Luego eliminamos del mismo modo todas las otras veces que dicha palabra aparezcan en el código HTML de la página en mención. Recuerde que aparecen tantos comandos codebase como applets tenga incrustada la página a descargar.
- 26) Pulsamos el botón **Cancel** y luego grabamos el archivo con el mismo nombre usando la opción **File > Save**.
- 27) Cerramos la ventana que muestra el código HTML de la página **Ratrig1.htm** y recargamos la página recientemente grabada.
- 28) En este momento podremos visualizar los applets **OFF LINE**, aún mas, a dicho applet lo podemos grabar en un disquete y llevarlo a cualquier otro computador y mostrarlo (siempre y cuando tenga instalada la máquina virtual de Java)



- 29) Este procedimiento puede utilizarse para descargar cualquier applet de cualquier otro Sitio Web. Sin embargo depende de la forma en que técnicamente los archivos digitales estén organizados.

- 30) En el caso del proyecto Descartes 3, el archivo **Descartes.jar** (ó **Descartes3.jar**) es siempre el mismo y solo debemos capturar el archivo HTML “controlador”, para luego modificarlo y recargarlo para ver el applet.

Esto significa que todos los applets o “manipulables” están contenidos en el archivo **Descartes.jar** (ó **Descartes3.jar**) por ello le llamamos “núcleo”.

***Nota:** Esta forma de descargar applets es una variante de la forma en que el proyecto Descartes 03 propone la descarga de sus propios archivos. Sólo funciona con los applets de Descartes 03, si desean descargar applets de otros Web Sites es necesario seguir un procedimiento parecido que se describe en las páginas siguientes, que describen la forma de descargar los recursos liberados por el proyecto MIT Open Courseware*

## **B. Descarga de los applets del Proyecto MIT Open Courseware**

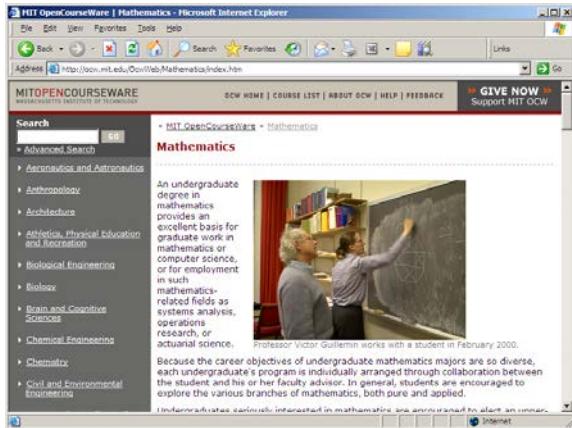
- a) Puede probar una variante de este método de descarga con los applets incluidos en las páginas de los cursos del MIT. (<http://ocw.mit.edu/index.html>)



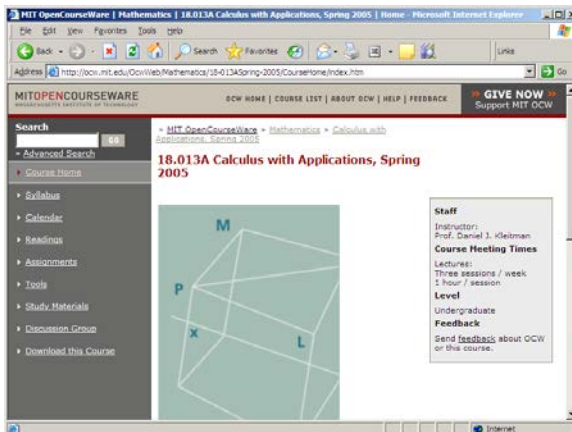
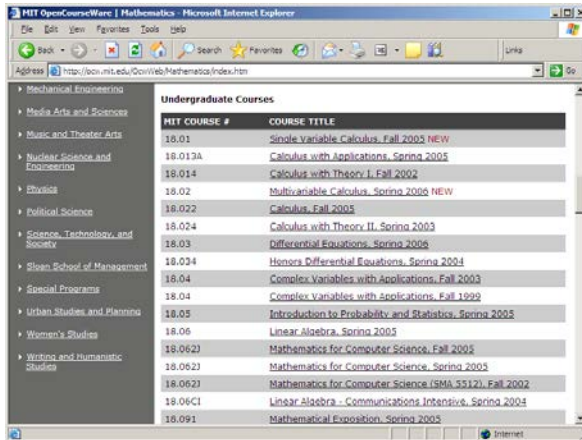
- b) O si lo prefieren ingresar a la versión en español del curso patrocinado por Universia ubicada en: (<http://mit.ocw.universia.net/>)



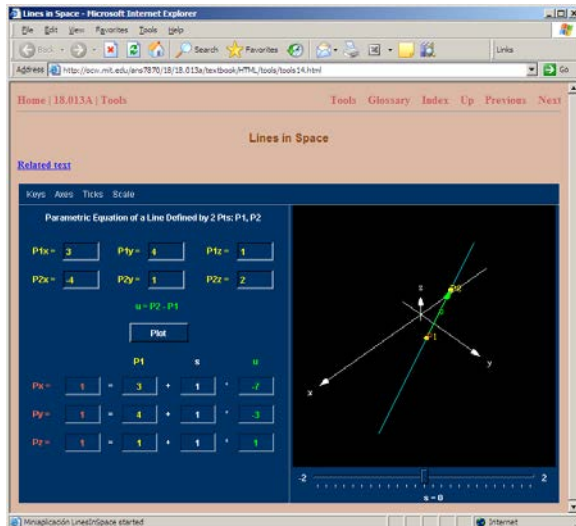
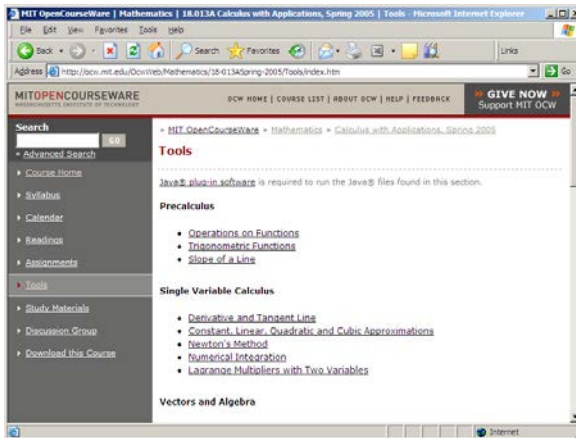
- c) Decidamos ingresar al proyecto en Ingles (ósea el primero). En esta primera página seleccionar la opción **Mathematics** del menú de cursos de la parte izquierda.



- d) Bajamos hasta Undergraduate Courses y allí seleccionar el curso **Calculus with Applications, Fall 2001 (18.013A)**



- e) Inmediatamente seleccione de la izquierda la opción **Tools**. En la ventana que se muestra bajar hasta el subtítulo **Application to 3D Linear Geometry** y allí seleccionar **Lines in Space**.

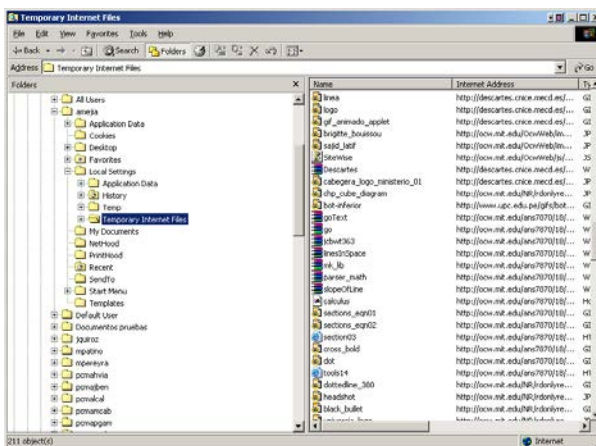


f) ¿Cuál es el nombre del archivo HTML que debo buscar y copiar?

*Para ello debemos ingresar al explorador de windows y buscar la carpeta **C:\Documents and Settings\pcsiamej\Local Settings\Temporary Internet Files**. Inspeccionando dicha carpeta encontrarás algunos archivos de extensión \*.jar, además del archivo **tools14.html**.*

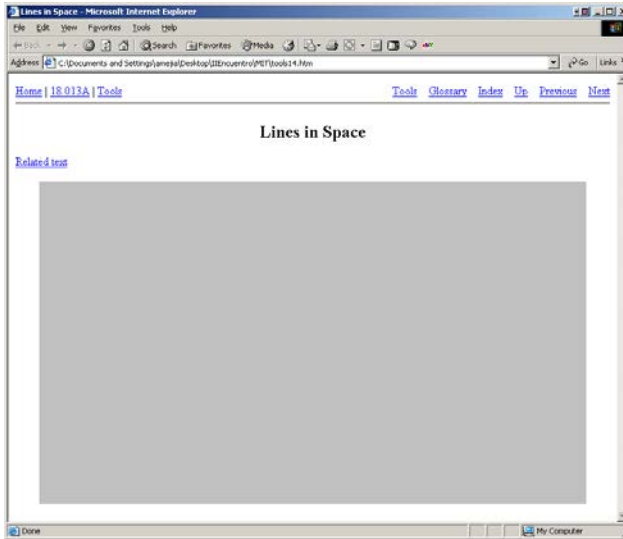
- g) ¿Cuántos y cuales archivos \*.jar debemos buscar y copiar?

En este caso existen son 7 archivos \*.jar que están interactuando con el archivo **tools14.html**

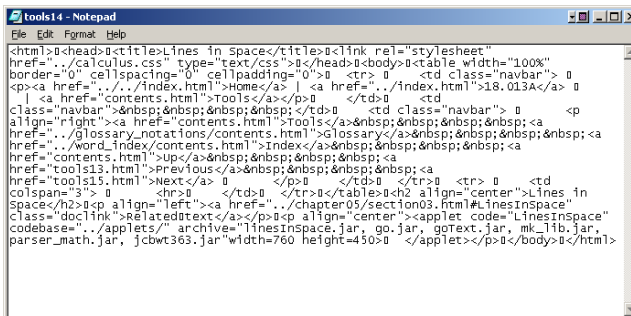


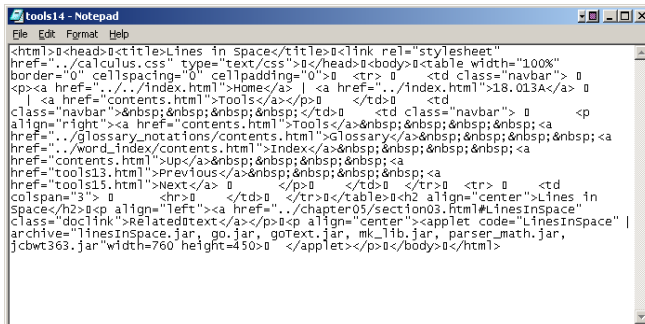
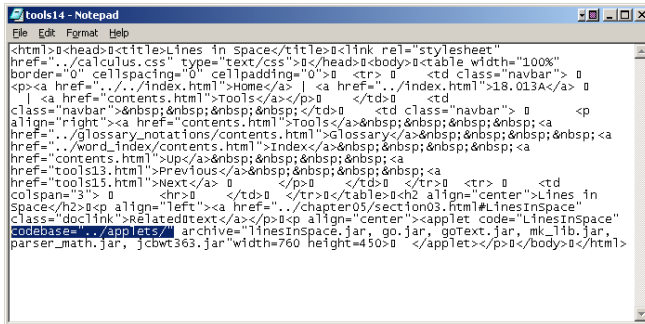
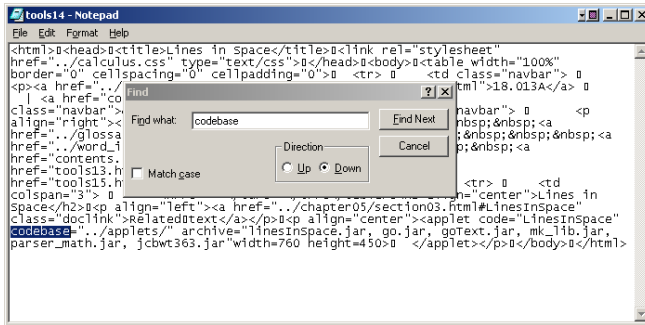
- h) ¿Cómo sé que cambios debo realizarle al código fuente de la pagina anterior?

*Del mismo modo que en el caso de Descartes 3, debe copiar los 7 archivos \*.jar y el archivo **tools14.html** a otra carpeta. Si intenta visualizar el applet haciendo doble clic en **tools14.html** vera lo siguiente:*

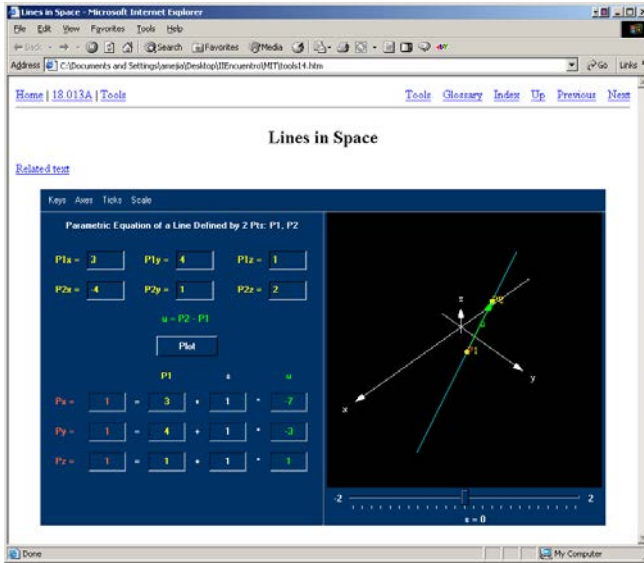


*En el caso de los archivos html del MIT Open Courseware también es necesario eliminar la línea de comando Codebase que se encuentra en el código fuente.*





Luego vuelve a cargar el archivo tools14.html y vera el applet **Off Line** como lo muestra la siguiente figura.

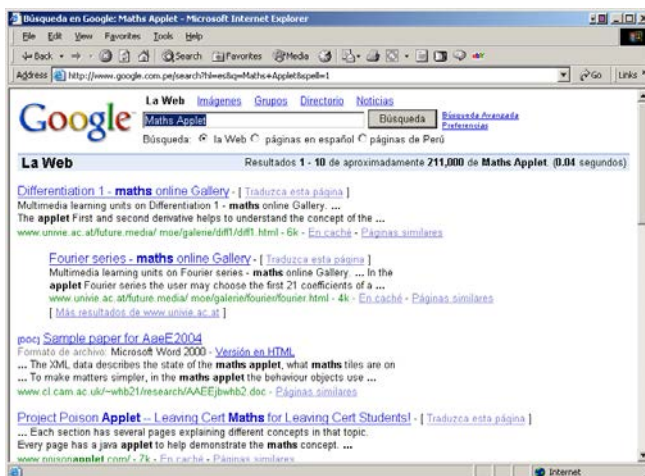


## C. Descarga de los Applets del Proyecto Estadística Interactiva



- ¿Cuál es el nombre del archivo HTML que debo buscar y copiar?
- ¿Cuántos y cuales archivos \*.jar debemos buscar y copiar? En este caso también veo archivos \*.jar (o archivos \*.class)
- ¿Qué relación existe entre los archivos \*.jar y los archivos \*.class?
- ¿Cómo sé que cambios debo realizarle al código fuente de la pagina anterior? ¿Cómo puedo comprobar si se necesitan hacer cambios en el código fuente?

Ahora ingrese a [www.google.com](http://www.google.com) ejecuté una búsqueda con las palabras clave “**Maths Applet**” y obtendrá de vuelta una página con un conjunto de enlaces a paginas que contienen applets matemáticos (**211,000 páginas web**). Seleccione cualquiera de ellos y descargue el applet y la página web correspondiente para poder visualizar el “manipulable” Off Line.



¿Qué otras habilidades son necesarias para que el profesor construya sus secuencias de enseñanza aprendizaje?

- 1) Construir páginas web a nivel intermedio haciendo uso de un editor (Dreamweaver, FrontPage, GoLive, entre otros)
- 2) Aprender a configurar el “applet” de Descartes 3 para no solo “descargar y usar” los applets sino, “descargar, configurar y usar” los applets de descartes.
- 3) Conocer alguna herramienta libre para generar evaluaciones en línea y de esta manera integrar una autoevaluación al material diseñado en los ítems anteriores.
- 4) Descargar animaciones construidas con Flash.
- 5) Diseñar y construir DIM's o Manipulables Virtuales.

#### **D. Visión del Ministerio de Educación y Ciencia de España**

##### **El director del CNICE defiende el papel de las nuevas tecnologías en el aula como material didáctico.**

*Tomado de:*

<http://www.solociencia.com/noticias/0709/28183116.htm> (28 de Mayo de 2007)

*(consulta: 12 de febrero de 2008)*

El director general del Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE), Mariano Segura, defendió hoy el papel de las nuevas tecnologías en varios ámbitos como la formación a distancia del profesorado, la de adultos, así como la elaboración de contenidos y materiales didácticos.

En este último aspecto, indicó que su departamento hace "un gran esfuerzo en el seguimiento y evaluación de la propia implantación", a través del propio portal educativo de CNICE, dependiente del Ministerio de Educación en el campo no universitario, vinculado directamente a la escuela. A su juicio, la dotación de ordenadores y conectividad en los centros docentes se ha extendido exitosamente, por lo que

ahora es necesario continuarlo en el área de contenidos para que se pueda trabajar con esas herramientas.

En su intervención en el evento Thursday Internet, destacó la importancia de cuatro factores prioritarios para implantar las TIC en la educación: las infraestructuras hardware, la conectividad, el contenido y finalmente el profesorado. "La figura del profesor es clave en este planteamiento de Internet en el aula, porque es quien va a trabajar con los materiales que le proporcionemos", apuntó Segura.

En este sentido, destacó que "más del 90 por ciento del profesorado utiliza el ordenador y más del 70 por ciento emplea Internet, si bien hasta ahora lo hacía de una forma personal, para preparar exámenes y alguna materia". "Ahora este concepto tiene que variar para trasladarse al aula y que se trabaje con el ordenador como herramienta didáctica y metodológica que tiene vincularse con las propias asignaturas", afirmó.

#### **IV CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA: 7 al 9 de Noviembre de 2006**

*Tomado de:*

[http://www.concytec.gob.pe/redperiodistaspe/index.php?option=com\\_content&task=view&id=279&Itemid=67](http://www.concytec.gob.pe/redperiodistaspe/index.php?option=com_content&task=view&id=279&Itemid=67)

*(consulta: 12 de febrero de 2008)*

El Dr. Mariano Segura, Director del Centro de Comunicación del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de España puntualizó la importancia de la educación científico – tecnológica para el desarrollo de las naciones y manifestó que su centro pone a disposición del Ministerio de Educación del Perú contenidos pertinentes para la ECT.

Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www.cnice.mec.es/



**cnice**

# EDUCACIÓN

Sobre el CNICE | Correo Web | Servicios para Usuarios | Agenda | Web de Centros | Red Digital | CC.AA. |  
Diccionarios | Foros | Contacto | Buscador

**Profesorado - Centros**

La web de los profesores: todos los recursos educativos del CIBCE, organizados por materia y nivel educativo

**Niñas y Niños**

La web de los niños y niñas: accede a los recursos educativos de infantil y primaria

**Jóvenes**

Contenidos educativos de secundaria, bachillerato y formación profesional, organizados por materias

**Madres y Padres**

Páginas de ayuda y orientación a los padres y madres con hijos en edad escolar

**Personas adultas**

Información general, recursos y formación

**Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa**



**DESTACADOS PARA PERSONAS ADULTAS**

**Formación a distancia**  
Aula Mentor. A través de esta plataforma, las personas adultas pueden acceder a un sistema de formación abierta, libre y a distancia a través de Internet, en el que colaboran un amplio número de instituciones.

**DESTACADOS PARA PADRES Y MADRES**

**Apoyo al aprendizaje**  
Plan de Fomento de la Lectura. El Plan de Fomento de la Lectura, iniciado en el año 2001 y presentado públicamente el 7 de mayo de dicho año, constituye una de las líneas fundamentales de la política del Gobierno en materia cultural.

**DESTACADOS PARA NIÑOS**

**Música**  
La ópera en la escuela. Propuestas didácticas. Si no has ido nunca a la ópera, esta página te sorprenderá mucho. Los cantantes son impresionantes, si lo infantiles verás lo difícil que es cantar como lo hacen ellos. Te lo han probado todo: Ángel Ilarián, Acad y Silvia Escríbe Clemente.

**CIBCE Informa**

**Becas TIC 2007**  
Relación de solicitudes recibidas a fecha 3 de noviembre con indicación de subsanación de defectos (Convocatoria en BOE nº227, 22/9/06).

**Relación de solicitudes**

**Cursos para profesorado**  
Convocatorias, inscripciones y listas de admitidos en los cursos de formación a distancia para profesores.

[Más información](#)

**Microespacios sobre Internet en el Aula**  
La *Aventura del Saber* emite microespacios, producidos por el Gabinete de Medios Audiovisuales del CIBCE, sobre los recursos educativos de Internet en el Aula.

[Ver microespacios](#)

**Red Digital, nº6**  
El último número de la revista especializada en TIC y Educación del CIBCE abordó el tema de los contenidos educativos en la era Internet.

[Más información](#)

**Centro Virtual de Educación**  
El CIBCE está desarrollando una nueva herramienta telemática para sus usuarios, que se encuentra en fase final de

Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Back Forward Stop Home Search Favorites Print Mail

Address http://www.cnice.mec.es/profesores/ Go



**cnice**

# EDUCACIÓN

Sobre el CNICE | Correo Web | Servicios para Usuarios | Agenda | Webs de Centros | Red Digital | CC.AA. |  
Diccionarios | Foros | Contacto | Buscador

Links

**RECURSOS EDUCATIVOS**

**CURRICULARES**

- Asignaturas
- Asignaturas optativas
- Lectura
- Contenidos transversales

**COMPLEMENTARIOS**

- Orientación educativa
- Orientación tutorial
- Bibliotecas escolares
- TV educativa
- Observatorio tecnológico
- Banco de Imágenes
- Sugerencias bibliográficas

**FORMACIÓN A DISTANCIA**

- Adultos: Aula Mentor
- Formación de profesores
- Educación Reglada: CIDEAD

**CENTRO VIRTUAL DE EDUCACIÓN**

- Área de usuarios

**COOPERACIÓN INTERNACIONAL**

- MAILTED
- OASIS
- EURL
- eTwinning

**IGUALDAD DE GÉNERO**  
Recursos educativos



Portada |

## Profesorado - Centros



**Destacados para Profesores**

**Matemáticas**  
Proyecto Cifras. Aplicación dirigida al área de las matemáticas que incorpora desde un sencillo recorrido histórico por esta materia hasta poemas relacionados con ella. Las actividades específicas están estructuradas por ciclos y bloques de contenidos.



**Segunda Lengua Extranjera (Italiano)**  
WebQuest sobre Leonardo Da Vinci. Recurso que persigue motivar a los estudiantes de este idioma, a través de la indagación, para desarrollar las capacidades lingüísticas y profundizar en aspectos de la cultura italiana.



**Astronomía**  
Antares: Curso de Astronomía y Astrofísica. Material de apoyo al profesorado de Educación Secundaria relacionado a la asignatura optativa "Taller de astronomía". "Antares" estimula a los estudiantes a adquirir habilidades y hábitos de trabajo que atiendan a las demandas de la sociedad actual.



**Destacados**

Cursos para profesorado  
Convocatorias, inscripciones y listas de admitidos en los cursos de formación a distancia para profesores.

[Más información](#)

Recursos descargables: "El español es fácil" y "Aloes"  
El Portal del CNICE está incorporando versiones descargables de los recursos publicados hasta el momento en CD. Ya está disponible "El Español es fácil" con ayudas en diversos idiomas, y "Aloes" acceso al lenguaje escrito".

[Más información](#)

eTwinning suma ya más de 2.000 centros en España  
El programa eTwinning, que fomenta el intercambio entre centros escolares europeos para compartir experiencias y trabajar en proyectos comunes, se está convirtiendo en una iniciativa muy popular entre los docentes. Por el momento, ya se han registrado en esta iniciativa 14.051 centros escolares europeos, de los cuales 2.000 son españoles.

[Más información](#)

  
Comunidad escolar

Planifica tu visita

Done Internet

Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address http://www.cnice.mec.es/profesores/asignaturas/



# EDUCACIÓN

Sobre el CNICE | Correo Web | Servicios para Usuarios | Agenda | Web de Centros | Red Digital | C.C.A.A. | Diccionarios | Foros | Contacto | Buscador

**RECURSOS EDUCATIVOS**

- CURRICULARES**
  - Asignaturas
  - Asignaturas optativas
  - Lectura
  - Contenidos transversales
- COMPLEMENTARIOS**
  - Orientación educativa
  - Orientación tutorial
  - Bibliotecas escolares
  - TV educativa
  - Observatorio tecnológico
  - Banco de Imágenes
  - Sugerencias bibliográficas
- FORMACIÓN A DISTANCIA**
  - Adultos: Aula Mentor
  - Formación de profesores
  - Educación Reglada: CIBEA
- CENTRO VIRTUAL DE EDUCACIÓN**
  - Área de usuarios
- COOPERACIÓN INTERNACIONAL**
  - MALTEO
  - GA3S
  - FUN
  - eTwinning

Portada | Profesores |

## Asignaturas

- Biotología y Geología
- Ciencias Naturales
- Ciencias Sociales
- Comunicación y Representación
- Conocimiento del Medio
- Dibujos Técnicos
- Tecnología Industrial
- Educación Artística - Plástica
- Educación Artística - Música
- Educación Física
- Educación Plástica y Visual
- Ética
- Expresión Corporal
- Filosofía
- Física y Química
- Historia
- Historia del Arte
- Identidad y autonomía personal
- Informática
- Lengua y Literatura
- Lenguas Extranjeras: Inglés
- Lenguas Extranjeras: Francés
- Otras lenguas
- Matemáticas
- Medio físico y social
- Música
- Religión
- Tecnología
- Formación profesional

**Por niveles educativos**

Es posible acceder al listado de asignaturas por niveles educativos:

[Infantil](#)  
[Primaria](#)  
[Secundaria](#)  
[Bachillerato](#)  
[Formación Profesional](#)

[Infantil](#) [Primaria](#) [Secundaria](#) [Bachillerato](#) [Formación Profesional](#)

Aviso legal | Accesibilidad | WCAG 2.0

© Ministerio de Educación y Ciencia  
 Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa  
 Información general: [webmaster@cnice.mec.es](mailto:webmaster@cnice.mec.es)  
 C/ Torrelaguna 56, 28027 Madrid - Tel: 915 776 300, Fax: 915 660 709, NPO: 851-05-403-6

Done Internet

Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa - Microsoft Internet Explorer

Address <http://www.cnice.mec.es/profesores/ asignaturas/matematicas/>

# EDUCACIÓN

Sobre el CNICE | Correo Web | Servicios para Usuarios | Agenda | Web de Centros | Red Digital | CC.AA. |  
Diccionarios | Foros | Contacto | Buscador

Inicio | Profesores | Asignaturas |

## Matemáticas

Portada | Profesores | Asignaturas |

- Descartés. Aplicación didáctica interactiva de Matemáticas para la ESO y el Bachillerato
- Cifras
- Curso de Geometría, de José Manuel Arranz y María de la Cruz Lobo
- Conecto con las mates
- El peso y la masa
- El volumen, capacidad
- La decena, material didáctico para Primer Ciclo de Primaria
- La longitud, matemáticas para primaria
- La superficie, matemáticas para primaria
- Las fracciones
- Los decimales
- Los porcentajes
- Matemáticas. Página temática de José Javier Etxe
- Phi, el número de oro
- La Oca (de las tablas de multiplicar)
- Grado 58
- Vaso de Álgebra matricial, de L. Vaamonde Portas y C. Díaz Sordo
- Actividades sobre vectores en el plano
- Curvas cónicas, de A. Moreno Pérez y A. R. Pulido Pérez
- Fotografía y Matemáticas, de P. Moreno, X. Nonceodu y E. Borrás
- Geometría dinámica del triángulo
- Inferencia estadística
- Introducción a las variables estadísticas
- Juegos de estrategia e ingenio. Una experiencia temprana de investigación
- La Jaina de las balanzas
- Movimientos en el plano, de Teresa Ruiz, Pilar Álvarez y Arantxa Corchamán
- Programación lineal
- Puzle matemáticas
- Superficies
- Visión espacial
- Italo en el planeta de los números
- El ordenador en Matemáticas
- Guía de recursos didácticos de matemáticas
- Las Tecnologías Audiovisuales en el Currículo de Matemáticas
- Matemáticas (Documento)
- Matemáticas. Actividades con calculadoras gráficas
- Programación del primer ciclo de la E.S.O.

**Por niveles educativos**

Es posible acceder al listado de asignaturas por niveles educativos:

[Infantil](#)  
[Primaria](#)  
[Secundaria](#)  
[Bachillerato](#)  
[Formación Profesional](#)

Internet



## E. Proyecto Homovidens: Profesores para el Futuro

### ¿Qué es Homovidens?

*Tomado de:*

<http://www.sceu.frba.utn.edu.ar/dav/homovidens.htm>

*(consulta: 12 de febrero de 2008)*

*Secretaria de Cultura y Extensión Universitaria – SCEU  
Facultad Regional de Buenos Aires – FRBA*

*Departamento de Aprendizaje Visual de la Universidad  
Tecnológica Nacional – UTN  
Telecom Argentina*

Este Proyecto ofrece una nueva forma de enfocar el aprendizaje y la enseñanza de las Ciencias Básicas, logrando incorporar nuevas tecnologías y de esta forma crear un ambiente innovador y motivador para el alumno.

A través del mismo proponemos conectar la enseñanza de la matemática y la física con la realidad actual, modelando la misma a través de simulaciones.

Las simulaciones son potencialmente estrategias que permiten promover en los estudiantes el desarrollo de modelos mentales sobre situaciones complejas y también realizar un uso activo de estrategias de resolución de problemas.

Este proyecto ha sido pensado para ofrecer a los profesores de Ciencias y Tecnología de nivel medio y universitario, nuevas herramientas y estrategias que les permitan usar y crear, materiales educativos interactivos.

HOMOVIDENS busca que los aprendices no se orienten a replicar logros de otros o a adquirir conocimiento transmitido mediante la instrucción. Por el contrario se propone que los estudiantes participen activamente, creando situaciones que los obliguen a pensar matemáticamente, cultivando así el interés en actividades intrínsecamente enriquecedoras.

En el marco de desarrollo del Proyecto Homovidens el Programa "Profesores para el Futuro", es una pieza clave ya que a través del mismo se logra incorporar las capacidades necesarias para que los docentes apliquen las Nuevas Tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

### **¿Por qué utilizar simuladores en el aula?**

A. Apoyan el aprendizaje Constructivo: los estudiantes construyen su conocimiento más que recordar el conocimiento del docente.

- B. Apoyan el aprendizaje Acumulativo: todo aprendizaje se construye sobre conocimientos previos.
- C. Apoyan el aprendizaje Integrador: los estudiantes elaboran nuevo conocimiento y lo interrelacionan con su conocimiento disponible.
- D. Apoyan el aprendizaje Reflexivo: los estudiantes conscientemente reflexionan sobre lo que saben y lo que necesitan aprender y lo evalúan.
- E. Porque es una herramienta cognitiva efectiva, apoya el pensamiento significativo ejecutando operaciones de bajo nivel que permiten a los estudiantes generar hipótesis y la resolución de situaciones problemáticas.

### **Implicancias del proyecto para el Colegio**

- Sumarse a la propuesta Homovidens, le permitirá al colegio mantener actualizada su propuesta educativa, incorporando nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Fortalecerá la articulación entre el Secundario y la Universidad, en cuanto a la elaboración de contenidos y generando un espacio de encuentro entre docentes secundarios y universitarios.
- Le permitirá ofrecer a los docentes herramientas innovadoras y los procedimientos necesarios para la incorporación de las nuevas tecnologías.
- Logrará una mayor motivación de los alumnos por tratarse de recursos y herramientas afines a su entorno.
- Así mismo, podrá acercar el trabajo de aula, a las familias, permitiendo a los alumnos continuar utilizando esta tecnología desde su hogar.

# Enfoque geométrico del análisis real en varias variables

Mariano González Ulloa  
Pontificia Universidad Católica del Perú

Roy Sánchez Gutiérrez  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## Introducción

En los cursos de cálculo en varias variables que se desarrollan en los programas de nivel superior se estudian las funciones diferenciables poniendo mayor énfasis en la parte algebraica y dejando a un segundo plano el aspecto geométrico. Sin embargo este último enfoque es de gran importancia debido a que ayuda a visualizar e intuir los resultados algebraicos. Desde este punto de vista propusimos un taller en el cual se estudió la naturaleza geométrica de curvas y superficies en el espacio de tres dimensiones ( $P^3$ ) que se desarrollará con la ayuda de una computadora y software apropiado para cristalizar la riqueza geométrica de los temas mencionados.

Por ello pensamos que a través de este taller se podía contribuir, de alguna manera, al desarrollo del pensamiento geométrico de los participantes. Con esta finalidad se hizo una breve exposición de los conceptos y resultados teóricos independientes del cálculo diferencial y integral para luego aplicarlos en ejemplos concretos. Cada participante disponía de una computadora en la que desarrolló las actividades propuestas.

Advertimos, sin embargo, que los tópicos que se abordaron no fueron tratados en forma exhaustiva, pues el objetivo del taller fue el tratamiento geométrico de curvas y superficies en el espacio tridimensional con el apoyo de los software Cabri 3D, Derive y Mathematica.

Al final del taller resolvimos, como aplicaciones, algunos problemas de optimización con restricciones, los cuales se desarrollaron usando geometría dinámica y las propiedades de la media aritmética y media geométrica.

## **Resumen**

Realizamos el estudio de curvas y superficies en el espacio tridimensional como parte fundamental del análisis real en varias variables, enfatizando en el aspecto geométrico de las mismas y aprovechando las bondades de los software Cabri 3D, Derive y Mathematica los que usamos, también, para resolver algunos problemas de optimización con restricciones.

## **Palabras claves**

Curvas, superficies, optimización, geometría dinámica, Cabri 3D, Derive, Mathematica.

## **Objetivos**

Los principales objetivos del taller fueron:

- Representar gráficamente curvas y superficies en una computadora usando Cabri 3D, Derive y Mathematica.
- Graficar curvas que resultan de la intersección de dos superficies y también aquellas que están dadas mediante sus ecuaciones paramétricas.
- Resolver algunos problemas de optimización con restricciones usando geometría dinámica y sin el uso del cálculo diferencial.
- Mostrar la utilidad de la computadora en el estudio de temas del análisis en varias variables.

## **Desarrollo**

### **1. Rectas, planos en $P^3$**

#### **1.1. Rectas**

Una recta en  $P^3$  queda determinada mediante un vector y un punto de paso. El vector se denomina

vector *dirección* de la recta. Si  $P$  es un punto de paso y  $V$  es el vector *dirección* de una cierta recta  $L$ , el conjunto de puntos

$$\{Q \in P^3; Q = P + tV, t \in P\}$$

constituye la recta  $L$ .

De esta representación se obtienen otras representaciones denominadas ecuaciones *paramétricas* o ecuaciones *cartesianas* de la recta.

### Ejemplo

Sean  $P = (1;1;1)$  un punto de paso y  $V = (3;4;-5)$  el vector *dirección* de la recta  $L$ . Su ecuación vectorial está dada por  $(x; y; z) = (1;1;1) + t(3;4;-5)$ ;  $t \in P$ , donde  $(x; y; z)$  es un punto genérico de  $L$ .

Sus ecuaciones paramétricas ( $t$  como parámetro), se obtienen descomponiendo la ecuación vectorial en la forma

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}; \quad t \in P.$$

Despejando la variable  $t$ , de las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones cartesianas de  $L$ :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

## 1.2. Planos

Para representar un plano es suficiente conocer un vector perpendicular al plano y un punto del plano. Si  $N$  es el vector normal y  $P_0$  un punto conocido del plano, su ecuación vectorial está dada por:

$$N \cdot (P - P_0) = 0$$

donde  $P$  es un punto genérico del plano y  $\cdot$  significa producto interno de vectores.

### Ejemplo

Denotemos con  $\pi$  el plano que pasa por  $Q = (1;1;1)$  y tiene vector normal  $N = (3;4;-5)$ . Sea  $P(x; y; z)$  un punto arbitrario del plano  $\pi$ , su ecuación vectorial está dada por:

$$N \cdot (P - Q) = 0.$$

Reemplazando las componentes de  $N$  y las coordenadas de  $Q$  y  $P$  se obtiene  $(3;4;-5) \cdot (x-1; y-1; z-1) = 0$  de donde resulta la ecuación cartesiana del plano  $3x + 4y - 5z - 2 = 0$ .

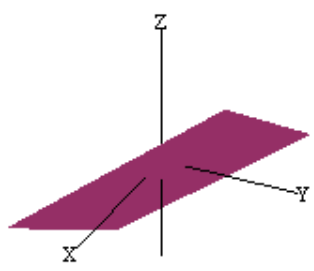


Figura 1. Plano

**Observación.-** Si una recta es la intersección de dos planos diferentes entonces las ecuaciones de los planos constituyen la forma general de la ecuación de la recta.

## 2. Superficies

En matemática, una **superficie** es un objeto que, intuitivamente hablando, es localmente "parecido" a una parte conexa de  $P^2$ . Eso significa que para cada punto de

una superficie hay una pequeña región que la rodea y que es homeomorfa<sup>1</sup> a un disco abierto de  $P^2$ .

De manera informal, una superficie en  $P^3$  se puede pensar como un objeto “bidimensional” que vive en el espacio  $P^3$ . Podemos pensar en una superficie como “una sábana que en el instante de tenderla se va volando por los aires de nuestra habitación”. Si inicialmente la sábana se encuentra sobre una cama (está en el espacio  $P^2$ ), entonces al levantarla “cobra vida” en el espacio  $P^3$ . Para un instante de tiempo muy pequeño (el que se demora para tomar una fotografía) se tiene una superficie en  $P^3$ .

Como casos especiales de superficies se tienen:

## 2.1. Superficies de revolución

Una superficie de revolución es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, denominada generatriz, alrededor de una recta fija llamada eje de rotación, la cual se halla en el mismo plano de la curva.

Cualquier posición de la generatriz se denomina *meridiano* y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz al rotar alrededor del eje de rotación se denomina *paralelo* de la superficie. Los nombres de meridiano y paralelo son referidos respecto al eje de rotación elegido.

Puesto que una superficie es de dimensión dos (inmerso en  $P^3$ ) las coordenadas de cualquier punto de la superficie pueden describirse en función de dos parámetros.

### Ejemplos

1. Si hacemos rotar la parábola de la figura 2,

---

<sup>1</sup> ver [4] Pag 131.

$$C: \begin{cases} x^2 + 2z = 6 \\ y = 0 \end{cases}$$

que se encuentra en el plano XZ, alrededor del eje Z, entonces la superficie generada, S, tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = -2(z - 3)$  y se denominada *paraboloide circular* (figura 3).

En efecto:

Sea  $P(x; y; z)$  un punto genérico de la superficie S. Como  $P(x; y; z)$  pertenece a la circunferencia con centro en  $C(0; 0; z)$  y que pasa por el punto  $Q(x_1; 0; z)$  perteneciente a la curva, entonces la distancia del punto P al punto C es igual a la distancia del punto C al punto Q, es decir que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_1^2}$$

Pero  $x_1^2 = 6 - 2z$ , entonces  $x^2 + y^2 = -2(z - 3)$  es la ecuación del paraboloide.

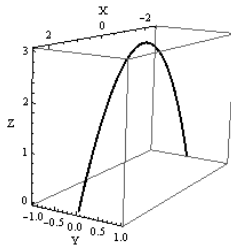


Figura 2. Curva C

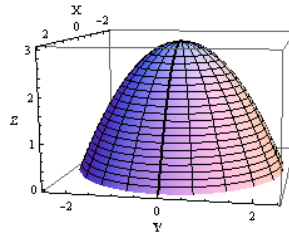


Figura 3. Superficie generada por C

En esta superficie los meridianos son parábolas y los paralelos son circunferencia como se muestra en la figura 3.

2. Si la curva

$$\Gamma: \begin{cases} z = \frac{1}{y^3} \\ x = 0 \end{cases}$$

que se encuentra en el plano YZ, la rotamos alrededor del eje Y origina la superficie de revolución que se muestra en la Figura 4 la cual se describe mediante los parámetros  $u$  y  $v$  a través de la función vectorial

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos(v); \frac{1}{\sqrt[3]{u}}; u \sin(v)); 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi .$$

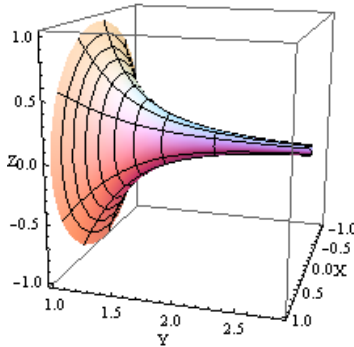


Figura 4. Superficie de revolución

## 2.2. Cilindro circular recto

Construya dos rectas paralelas. Gire una de ellas alrededor de la otra. La recta fija constituye el eje del cilindro y la que rota, la generatriz. La distancia entre ambas rectas es el radio del cilindro circular recto.

Otra alternativa para construir un cilindro circular recto, en Cabri 3D, es la siguiente:

Construya una circunferencia,  $C$ , y la recta,  $E$ , que pase por el centro de  $C$  y sea perpendicular al plano que contiene a  $C$ . Elija un punto,  $P$ , en  $C$  y construya por dicho punto la recta  $L$  paralela a  $E$ . El cilindro circular recto con directriz  $C$ , generatriz  $L$  y eje  $E$  se obtiene activando la opción *Trayectoria* en  $L$  y la opción *Animación* en el punto  $P$ .

### 2.3. Cono circular recto

Construya dos rectas no perpendiculares que se intersecan. Rote una de ellas alrededor de la otra. El punto de intersección de las rectas es el vértice, la recta fija es el eje del cono y la recta que gira la generatriz.

Otra alternativa para construir un cono circular recto es la siguiente:

Usando Cabri 3D construya una circunferencia,  $C$ , y la recta,  $E$ , que pase por el centro de  $C$  y sea perpendicular al plano que contiene a la circunferencia. Fije un punto,  $V$ , en la recta  $E$ . Elija un punto,  $P$ , en  $C$  y construya la recta  $L$  que pasa por  $P$  y por  $V$ . Active la opción *Trayectoria* sobre  $L$  y active la opción *Animación* en el punto  $P$ .

El punto  $V$  es el vértice, la recta  $E$  es el eje, la circunferencia  $C$  es la directriz y la recta  $L$  es la generatriz del cono.

## 3. Curvas

De manera intuitiva, una curva se piensa como un objeto unidimensional. Por ejemplo la trayectoria de una partícula en movimiento o el resultado de doblar (sin romper) un trozo de alambre muy delgado. De manera más formal una curva en  $P^3$  es un objeto unidimensional

formado por el conjunto de puntos  $P(x; y; z)$  donde tanto  $x$ ,  $y$  y  $z$  dependen de un cierto parámetro  $t$ . Es decir,

$$x=f(t); \quad y=g(t); \quad z=h(t)$$

donde  $t$  varía en algún intervalo de los números reales. Como caso particular, una curva se puede representar mediante dos ecuaciones independientes (las ecuaciones de dos superficies diferentes cuya intersección es la curva). La totalidad de los puntos y solamente de aquellos, cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones es una curva en el espacio.

### Ejemplos

1. Si en la parábola  $x + 1 = (y - 2)^2$  hacemos la sustitución  $y=t+1$  entonces

$x=t^2-2t$ , con lo cual se obtienen las ecuaciones paramétricas de la parábola:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Cuyo gráfico se muestra en la figura 5.

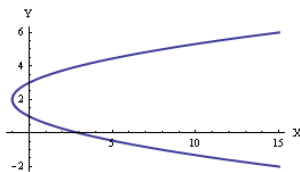


Figura 5. Parábola

2. La curva descrita vectorialmente mediante

$$\vec{\alpha}(t) = \left( \cos(t); \sin(t); \frac{t}{10} \right); \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

se denomina hélice circular. Intuitivamente esta curva se envuelve sobre un cilindro circular recto de

radio 1, debido a que si  $x=\cos(t)$ ,  $y=\text{sen}(t)$ , entonces  $x^2+y^2=1$ .

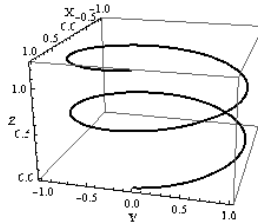


Figura 6. Hélice circular

3. **Curva como intersección de dos superficies**

Cuando el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $y+z=2$  se intersecan resulta una elipse que se puede generar mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \text{sen}(t) \\ z = 2 - \text{sen}(t) \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ecuaciones que se pueden obtener visualizando la proyección de la curva en el plano XY, o en forma vectorial

$$\vec{\alpha}(t) = (\text{Cos}(t); \text{Sen}(t); 2 - \text{Sen}(t)); 0 \leq t \leq 2\pi .$$

En la figura 7 se representan el cilindro y el plano, mientras que en la figura 8 se muestra la elipse.

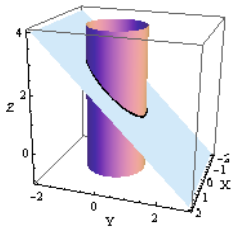


Figura 7. Cilindro y plano

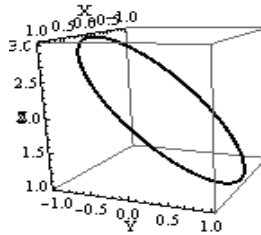


Figura 8. Elipse

4. Las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = (4 + \text{sen}(20t)) \cos t \\ y = (4 + \text{sen}(20t)) \text{sen} t ; 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = \cos(20t) \end{cases}$$

generan la espiral toroidal, nombre debido a que la curva se envuelve alrededor de un toro como se muestra en las figuras 9 y 10.

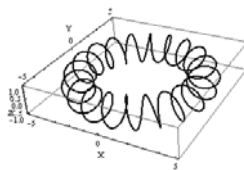


Figura 9. Espiral toroidal

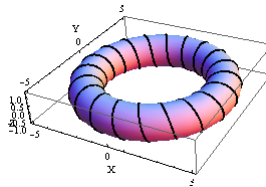


Figura 10. Toro

#### 4. Problemas de optimización con restricciones

Un problema de optimización matemática se puede modelar considerando una función objetivo dependiendo de una o varias variables y un conjunto de restricciones expresadas en términos de la o las variables que

intervienen en el problema. En un problema de optimización se trata de tomar la mejor decisión, es decir, la decisión óptima, la cual debe elegirse respetando todas las restricciones impuestas. Los problemas de optimización aparecen en todas las áreas donde se deben tomar decisiones, incluso en los quehaceres cotidianos.

En este taller propusimos algunos problemas de optimización con ciertas restricciones, problemas que usualmente se resuelven recurriendo al cálculo diferencial, determinando el valor máximo o mínimo de una función real. Aquí los resolvimos recurriendo a la geometría dinámica y usando media aritmética y media geométrica solamente.

### Ejemplos

1. Encontrar el volumen de la mayor caja rectangular situada en el primer octante, con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano  $x + 2y + 3z = 6$ .

### Solución

Sea  $P(x; y; z)$  un punto del plano  $x + 2y + 3z = 6$  ubicado en el primer octante. Llamemos  $S$  al paralelepípedo que tiene tres aristas en los ejes coordenados, uno de sus vértices en el origen y el vértice diagonalmente opuesto en el punto  $P$  (figura 11).

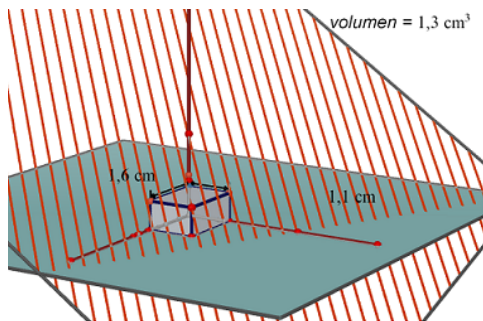


Figura 11. Caja y plano

Sea  $v(x; y) = x y \frac{(6 - x - 2y)}{3}$  el volumen del sólido S.

Luego, usando la relación entre la media aritmética y la media geométrica se tiene

$$\begin{aligned} \text{A} & v(x; y) = x y \frac{(6 - x - 2y)}{3} \\ \text{s} & \\ \text{í} & = \frac{1}{6} x(2y)(6 - x - 2y) \\ \text{e} & \\ \text{l} & \leq \frac{1}{6} \left( \frac{x + 2y + 6 - x - 2y}{3} \right)^3 \\ \text{m} & = \frac{1}{6} 2^3 = \frac{4}{3} \\ \text{á} & \end{aligned}$$

Así el máximo volumen de la caja rectangular es  $\frac{4}{3}$  que se alcanza cuando  $x = 2y = 6 - x - 2y$  es decir cuando  $x = 2$  e  $y = 1$ .

- De todas las cajas tridimensionales con una superficie total dada, pruebe que el cubo es la de mayor volumen.

### Solución

Sean  $x, y, z$ , respectivamente, el largo, el ancho y la altura de la caja con área de superficie total fija  $S$ . Si  $V(x; y; z)$  es el volumen de dicha caja entonces  $V(x; y; z) = x y z$  y  $S = 2(xy + xz + yz)$ .

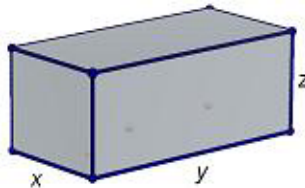


Figura 12: Caja tridimensional

Usando la relación entre la media aritmética y geométrica se tiene

$$\begin{aligned} (V(x; y; z))^2 &= (x y z)(x y z) \\ &= (x y)(x z)(y z) \\ &\leq \left( \frac{xy + xz + yz}{3} \right)^3 \\ &= \left( \frac{S}{6} \right)^3 \end{aligned}$$

De donde resulta

$$V(x; y; z) \leq \left( \frac{S}{6} \right)^{\frac{3}{2}}$$

La igualdad se cumple cuando  $xy = xz = yz$ , es decir cuando  $x = y = z$ , con lo cual se tiene que la caja es un cubo.

## 5. Actividades

### 5.1 Rectas y planos

Las siguientes actividades se desarrollaron usando el software Cabri 3D.

1. Construya un vector no perpendicular al plano base.
2. Construya el vector que tiene como punto inicial  $A(2;-1;4)$  y como punto final  $B(2;3;4)$ .
3. Construya la recta que pasa por el punto  $P(1;1;1)$  y es paralela al vector  $V(-2;1;2)$ .
4. Construya el plano con normal  $N(1;1;1)$  y que pasa por el punto  $P(2;2;2)$ .
5. Construya el plano que pasa por los puntos  $A(1;0;3)$ ,  $B(0;2;4)$  y  $C(2;2;0)$ .
6. Construya el plano cuya ecuación es  $3x - 2y + z = 1$ .

## 5.2. Superficies de revolución:

La siguiente actividad se realizó usando Cabri 3D.  
Considere la curva (hipérbola en el plano XY)

$$C: \begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Si se hace girar C alrededor del eje Y se forma la superficie S denominada **Hiperboloide de revolución de 2 hojas**, cuya ecuación cartesiana es  $y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4$ .
- Si se hace girar C, en este caso, alrededor del eje X, se obtiene la superficie denominada **Hiperboloide de revolución de una hoja**.

Escriba las ecuaciones paramétricas y construya las gráficas en ambos casos.

## 5.3. Superficies

Las siguientes actividades se desarrollaron usando Derive y Mathematica.

- Construya la superficie cuya representación vectorial es  $\vec{r}(u, v) = (u v; u^2 + v; u + v^2)$  donde  $-2 \leq u \leq 2$ ,  $-2 \leq v \leq 2$ .
- Construya la superficie generada por  $\vec{r}(u, v) = (u v; u \cos(v); u \sin(v))$  donde  $0 \leq u \leq 2$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .
- Construya la superficie generada por  $\vec{r}(u, v) = (u + v; u \cos(v); u \sin(v))$  donde  $0 \leq u \leq 2$  y  $0 \leq v \leq 2\pi$ .
- Dadas dos circunferencias  $C_R$  y  $C_r$  de radios R y r ( $R > r > 0$ ), respectivamente. Coloque el centro de  $C_r$  en  $C_R$  de manera que los planos que las

contienen se corten ortogonalmente y el plano que contiene a  $C_r$  pase por el centro de  $C_R$ . Desplazando el centro de la circunferencia  $C_r$  en la circunferencia  $C_R$ , se genera una superficie. Construya tal superficie. Identifique dicha superficie. Deduzca sus ecuaciones paramétricas.

5. Dada la hipérbola  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$  ;  $y = 0$  rotarla
- Alrededor del eje Y.
  - Alrededor del eje X.

#### 5.4. Curvas

Las siguientes actividades se desarrollaron usando Derive.

- Construya la intersección de un cilindro y un plano. Por ejemplo el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $x + y - z - 3 = 0$
- Construya la intersección del paraboloides  $z = x^2 + y^2$  con:
  - el plano  $z=3$
  - el plano  $2x+z=1$
  - el plano  $y=0$
- Construya la intersección del cono circular recto  $(y - 4)^2 = (x - 2)^2 + z^2$  con un plano en diferentes posiciones. Identifique la curva en cada caso.

#### 5.5. Problemas de optimización

Resuelva los siguientes problemas de optimización bajo las restricciones dadas:

- De un pedazo de cartón de forma rectangular y de área conocida,  $S$ , construya una caja

rectangular sin tapa cuyo volumen sea máximo. Halle las dimensiones de la caja.

- b) Se desea construir un envase de forma cilíndrica de 1 litro de capacidad. Halle las dimensiones del envase para que se use la menor área del material en su construcción.
- c) Halle los puntos de la esfera, con centro en el origen de coordenadas y radio 2, más cercanos y más alejados del punto  $A(3, 1, -1)$
- d) El plano  $x+y+2z=2$  interseca al paraboloido  $z = x^2 + y^2$  en una elipse. Encuentre los puntos en dicha elipse más próximos y más alejados del origen.

### Conclusiones

1. El uso de software ayudó a:
  - a) Visualizar la forma de las superficies y curvas en  $P^3$ .
  - b) Deducir la ecuación de una superficie de revolución.
  - c) Manipular los objetos construidos y visualizarlos desde distintos ángulos.
  - d) Hacer conjeturas para imaginar la forma de las curvas y superficies a partir de sus ecuaciones.
2. En el desarrollo del taller se puso énfasis en la parte geométrica adecuando los conceptos del análisis en varias variables al nivel de los profesores de educación secundaria.
3. Los problemas de optimización constituyen una alternativa para introducir algunos conceptos geométricos.

## Referencias

Barbolla, R.; Cerdá, E. y Sanz, P.(200) "Optimización: Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía". Ed. Prentice Hall. Madrid.

Cabri 3D. <http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-3d.html>

Derive. <http://derive.uptodown.com/>

Do Carmo, Manfredo. (1976) Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. IMPA.

Stewart, James. (2000) *Cálculo Trascendentes Tempranas*. Internacional Thomson Editores, S.A. 4ta edición.

Taylor Angus E., Mann W. Robert. (1989) *Fundamentos de Cálculo Avanzado*. Editorial Limusa S. A. México D. F.

# La indagación en las clases de Matemáticas

Rosa Cardoso Paredes<sup>1</sup>  
María Elena González Romero  
Alex Molina Sotomayor<sup>2</sup>

Proyecto “Enseñanza de las Ciencias mediante la Indagación”  
(ECBI-Perú) Academia Nacional de Ciencias

## Resumen

Actualmente se considera muy importante el desarrollo del pensamiento científico desde los primeros años de vida y de estudios. Para lograr tal objetivo, en el desarrollo del taller se trató de mostrar a los participantes los procesos que sigue el método de indagación en una clase de matemáticas, a partir del diseño y ejecución de algunas actividades. Dichos procesos son la observación, la predicción, la experimentación, la verificación, la sistematización de lo encontrado en la experimentación, las conclusiones y la comunicación de los resultados, es decir, permitir que sean los niños los que indaguen y descubran su entorno y los secretos del mismo. Así como la metacognición, proceso mediante el cual el niño realiza sus propias reflexiones frente a lo aprendido. Se revaloriza el cuaderno de matemáticas como un registro escrito que representa el pensamiento escrito del niño y como un instrumento de evaluación continua para el docente.

La Academia Nacional de Ciencias del Perú, conjuntamente con la InterAmerican Network of Academies of Sciences (IANAS) o “Red Interamericana de Academias de Ciencias”, están preocupadas e interesadas por el mejoramiento del aprendizaje y la enseñanza de las ciencias en las primeras etapas de estudios de los niños y niñas de los diferentes países de América y, gracias a este interés y preocupación, se ha comenzado a trabajar esta

---

<sup>1</sup> Colegio Nacional de Mujeres Miguel Grau-Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú

mejora en algunos países, con la intención de motivar a los docentes del nivel inicial, primario y secundario a trabajar y mirar a la matemática como una ciencia que evoluciona cada día.

Léna P. *et al.* (2005) consideran que la intersección entre los niños y los científicos es su curiosidad, las ganas de conocer y saber más, de jugar con el mundo que los rodea y de descubrir sus secretos. Ellos creen que más allá de los instrumentos sofisticados y de las ecuaciones inescrutables está el mirar el mundo de otra manera, con otros ojos y eso no es un problema para los niños si lo hacen o se les permite y motiva a hacerlo desde pequeños.

Ellos opinan que, los investigadores de esta época, consideran importante el desarrollo del pensamiento científico desde los primeros años de vida y de estudios. Para ello mencionan como los métodos que favorecen a este desarrollo a aquellos que permiten a los niños y niñas a que puedan seguir ciertos procedimientos que a su vez permitirán el desarrollo de procesos. Estos son: La observación, la predicción, la experimentación, la verificación, la sistematización de lo encontrado en la experimentación, las conclusiones y la comunicación de los resultados, es decir, permitir que sean los niños los que indaguen y descubran su entorno y los secretos del mismo.

Si bien la indagación es un método que nace en las ciencias naturales, este no es lejano a las matemáticas, si vemos en esta última el valor de ser una ciencia en movimiento además de los otros valores que ya se le atribuye. Consideramos que estos valores son, los de, ser un lenguaje que permite la cuantificación de los fenómenos observados o una herramienta para resolver problemas.

Los procesos mencionados en el párrafo anterior son los que pasan a formar parte del método indagatorio, el mismo que dimos a conocer en el taller. Por tanto, uno de los objetivos fue mostrar la bondad de este método dando a conocer que él nos sirve como vía para tratar contenidos matemáticos en forma contextualizada, y que a la vez permite conexiones dentro de los mismos.

En este taller tratamos los “Números Racionales, sus representaciones y sus aplicaciones” contenido que consideramos, genera muchas dificultades de aprendizaje en los estudiantes de los diferentes niveles educativos básicos comenzando a nivel primaria y luego estas dificultades llegan a veces hasta los años de estudios de cuarto o quinto de secundaria. Una de las dificultades que podemos mencionar es, la de conectar las dos representaciones de éstos números (fracciones y expresiones decimales) y sus aplicaciones (porcentaje). Por tanto, nuestra intención era y es motivar a los docentes a involucrarse en su aplicación, ya que a partir de las investigaciones que se han realizado en los diferentes países de la Red Interamericana entre otros, donde ya se ha experimentado su aplicación y se ha observado y comprobado que puede ayudar a mejorar mucho la actitud hacia la matemática, así como el aprendizaje de la misma en los estudiantes tanto del nivel inicial, primario como del secundario.

En las clases planificadas utilizando la indagación como método, realizadas en las escuelas piloto, también hemos podido observar que, esta forma de organizar y presentar los contenidos a los niños les permite captar mejor los mismos y hace ver a la matemática desde un ángulo menos abstracto y más lúdico. Esta presentación hace que muchas veces, estos no relacionen en un primer momento, que lo que están aprendiendo son temas que tienen que ver con la matemática, ya que la idea que muchos de ellos tienen, es que, aprender o hacer matemática es resolver muchas sumas, restas, multiplicaciones o divisiones si se están en el nivel primario y muchas ecuaciones, expresiones algebraicas, problemas simulados de enunciado verbal o gráfico, si están los alumnos en el nivel secundaria. Les cuesta mucho involucrarse en el proceso de observación y predicción.

Este método también nos ha permitido conectar contenidos, tanto matemáticos, como los relacionados con otras áreas del conocimiento, como se muestra en el diseño de la actividad presentada en el Anexo 1, la cual está relacionada con un contenido del área de Biología. Ella nos permitió introducir el acto de medir, la idea de construcción de los sistemas internacionales de medidas, la necesidad de conocer y comprender el sistema de los números

racionales. Así como también la relación que existe entre los diferentes sistemas numéricos y la recta, el plano y el espacio como se muestra en las fotografías N° 2 – III Coloquio Internacional de Enseñanza de la Matemática (Carranza C. et al, 2008).

Un camino natural al que conduce el método también es el de la contextualización de los contenidos matemáticos, pues como ya dijimos, él proviene de las ciencias naturales, por tanto es muy fácil recurrir a ellas para transmitir a los niños y niñas la utilidad de la matemática, por ejemplo, para la cuantificación o sistematización de los resultados de sus fenómenos o problemas a estudiar o estudiados.

En nuestro país, la metodología indagatoria se viene experimentando en las Instituciones Educativas: “Colegio Nacional de Secundaria de Mujeres Miguel Grau”, Colegios Primarios “**Señor de los Milagros**” y “**Jacaranda**” del **Distrito de Magdalena (Lima)**, y Colegios Primarios (N°40307 y N°40440) de Aplao (Arequipa). Además, debemos anotar que esta metodología ya tiene resultados en algunos de los países que integran la Red Interamericana como son: Chile, Colombia, Brasil, Panamá, México, Estados Unidos. También, se conocen experiencias al respecto en Francia con el proyecto La Main à la Pâte y otros países europeos (French Academy of Sciences, 2007).

### Fotografías N° 1



Pasando del espacio al plano, y del plano a la recta “midiendo y comparando sus alturas” (Carranza, C. et al 2008)



Explicando el número mínimo de pestañas utilizando los cubos de Font\*  
Alumnas del CNM “Miguel Grau”

### **Los objetivos que se propuso lograr durante el desarrollo del taller fueron:**

- (1) Compartir con los asistentes al taller a aprender y enseñar matemáticas mediante la indagación, es decir, presentar actividades que permitan observar en la práctica el desarrollo de los procedimientos de esta forma de hacer las clases de matemáticas.
- (2) Presentar la organización de la clase de tal modo que ésta permita a los niños y niñas aprender matemáticas de una manera más natural, es decir, desde la observación de los fenómenos de su entorno y desde sus propias necesidades.
- (3) Valorar el cuaderno de Matemáticas como un espacio donde los niños registran sus ideas y sus formas de mirar y procesar sus conocimientos. Además, como un instrumento de evaluación continua.
- (4) Motivar a los docentes a trabajar el proceso de Metacognición a partir del ¿Qué aprendí?, proceso que permite a los niños reflexionar y tomar conciencia de sus propios aprendizajes.

### **Los procesos de la Indagación en las clases de Matemáticas**

Para tratar sobre los procesos que forman parte del método de Indagación, consideramos presentar el diseño de una de las actividades que se ejecutó en el taller, la misma que esta dividida en tres partes y que describimos a continuación:

En la Parte I de la actividad se presenta la consigna ¡Piensa y Pregúntate!, la misma que permite a los niños poner en evidencia los procesos de:

- 1) **Observación** como primer paso, es momento en que los niños pueden apropiarse del fenómeno que se les proponga o interese y a partir del cual se ira preguntado todo lo que le parezca extraño o familiar. Es muy importante que el docente mediador esté atento a las percepciones que tiene el niño respecto del fenómeno en cuestión y esté abierto a analizar incluso aquellas que les

parezca extrañas pues podría encerrar alguna relación con el problema estudiado.

- 2) **Predicción**, proceso que los niños lo evidencian a partir de realizar sus hipótesis o conjeturas a cerca de lo que observan. Se puede decir que en este proceso, los niños tienen la libertad de imaginar sus resultados, los mismos que luego serán contrastados.

En la Parte II, se presenta al estudiante los fenómenos y los materiales que deben manipular y en ella se desarrollar los procesos de:

- 3) **Experimentación**, momento en que los niños manipulan los fenómenos con sus diferentes sentidos como orientación en este proceso se le presenta la siguiente consigna “Averigua por ti mismo y registra tus resultados”. Cada uno de los procesos anteriores son registrados ya sean en las guías u hojas de experimentación, de preferencia, en el cuaderno de matemáticas, ambos les permitirá tener un registro de sus predicciones y los resultados que obtienen de la manipulación del fenómeno que se les presente como material de investigación, en nuestro ejemplo, la medición de las plantas como un motivo para la introducción de los números racionales y su relación con el acto de medir.
- 4) **Sistematización de lo encontrado**: Etapa en la cual los niños y niñas deben obtener formas de organizar toda la información encontrada en el proceso de experimentación. Esta etapa es muy importante, pues en ella los niños deben encontrar las conexiones entre los diferentes lenguajes que manejan para organizarla. Consideramos que en esta etapa la presencia de la matemática como el lenguaje para la sistematización es muy importante.
- 5) **Conclusión**: Es el momento en que el niño ha encontrado ya un resultado final, el mismo que será

comunicado a sus compañeros en forma sistemática y cuantificada, justificando el por qué de sus afirmaciones.

- 6) **Contraste de sus resultados**, que consta de dos momentos: En un primer momento, el alumno realiza el contraste de su predicción y sus propios resultados de la experimentación para luego proceder a compararlos con los de sus compañeros del grupo y finalmente con todos los grupos formados en la clase.
- 7) **Comunicación de sus resultados**, este proceso se realiza en cada momento que comparte sus resultados tanto entre los compañeros del grupo como con los demás grupos de la clase.

En la Parte III se pretende averiguar sobre el proceso de reflexión y toma de conciencia que realizan los niños a través de la pregunta ¿Qué aprendí?

- 8) **La Metacognición:** En esta parte, que consideramos de vital importancia, los niños aparte de tomar conciencia y reflexionar sobre sus aprendizajes deben registrarlos para luego comunicarlos.

### **El cuaderno como un registro escrito y un instrumento de evaluación continua.**

Como se observará, en el diseño de la actividad, es el niño el que construye sus conocimientos a partir de la observación y experimentación de los fenómenos que se le presentan, eso permite o casi obliga a que todo lo que observe y obtiene como resultados de realizar la manipulación de los mismos fenómenos deben quedar registrados en forma escrita. Por tanto, se hace necesario que ellos cuenten con un cuaderno de matemáticas que no es el que están y estamos acostumbrados a manejar, es decir aquel donde se registran conocimientos acabados que presentamos a los niños ya sea en la pizarra o en otras fuentes de información escrita, sino que éste será uno donde ellos escriban o describan lo que consideren a partir de su observación, por tanto, este cuaderno pasará a ser una fuente de información relacionada con su pensamiento y que

los niños nos darán a conocer a través del lenguaje que ellos decidan utilizar (escrito, gráfico u otro que manejen) en los diferentes procesos que el método permite desarrollar al niño.

De allí que consideremos importante la revaloración del cuaderno de matemáticas en esta forma de enseñar y aprender matemáticas ya que éste, no solo servirá como una fuente importante de información del pensamiento y su relación del mismo con el lenguaje de los niños, sino también como un instrumento de evaluación continua a través del cual se podrá observar el proceso de desarrollo del aprendizaje de los niños, en sus diferentes momentos. Consideramos que es un aporte importante del método a la enseñanza y aprendizaje de las ciencias y que nosotros, particularmente, lo estamos aplicando a la matemática en los años de estudios de primero, segundo, cuarto y quinto grados de estudios del nivel secundario en el Colegio Nacional de Mujeres Miguel Grau de Lima.

### **Comentarios finales**

Como se puede deducir del diseño de la actividad, esta forma de enseñar y aprender matemáticas está relacionada con el enfoque constructivista del conocimiento y sobre todo que enfatiza en uno de sus objetivos, el cual es ubicar al niño como el centro del aprendizaje, al permitir que éste pueda expresar lo que piensa, descubra y verifique por sí mismo sus resultados o explicar con sus propias palabras lo que observa o lo que cree, procesos que ayudarán positivamente al desarrollo evolutivo del niño.

Una de las ventajas que hemos podido obtener de esta forma de presentar los temas es que los participantes de este taller y de otros, han encontrado la necesidad de profundizar en los contenidos matemáticos, tanto para enseñar de esta manera a sus niños, así como para poder diseñar sus propias actividades y desde luego para poder detectar, a partir de la observación del desempeño de los niños, todos los contenidos matemáticos que estos aplican en forma intuitiva.

Presentamos fotografías que muestran la aplicación del método en las instituciones peruanas mencionadas, ellas incluyen contenidos del tema principal “Sistemas de Números Racionales”, el cual se incluye en el Diseño Curricular Básico que propone el Estado Peruano, para los niveles educativos tanto primario como secundario.



**Fotografías N° 2 - III Coloquio de Enseñanza de la Matemática (2008)**

## Referencias

Alexander, P; Bahret, M; Caves, J; Courts, G; D'Alessio, N. (1992) *Biología*. Prentice-Hall. USA.

Charpak G., Léna P., Querré I. (2005) Los niños y la Ciencia. Editorial Siglo XXI – Argentina.

Carranza C. Cardoso R., Molina A., Neciosup H. (2008). Tópicos de Matemáticas para Formadores de Profesores de Educación Primaria. Lima –Perú.

French Academy of Sciences (2007) The International action of “La Main à la Pâte”. Teaching sciences at primary school. Francia.

National Science Resources Center (NSRC). Science & Technology for Children (STC). Comparación y Medida - Libro de preparación de clases. Traducido y adaptado por: Educación en Ciencias Basada en la Indagación (ECBI). Academia Chilena de Ciencias – Mineduc.

Paginas web:

- [http://www.bbc.co.uk/schools/scienceclips/ages/7\\_8/plants\\_grow.shtml](http://www.bbc.co.uk/schools/scienceclips/ages/7_8/plants_grow.shtml)
- <http://www.webpersonal.net/vfont/>\*

## ANEXO 1

### ¿Cómo crece tu planta?

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Parte I



Piensa y pregúntate!!

Contesta las siguientes preguntas basándote en tu experiencia personal.

¿Cuánto crecen las plantas en una semana? (A partir del día de la siembra)

---

---

---

¿Cómo eran sus hojas y sus tallos?

---

---

---

En esta lección aprenderás cómo comparar y medir el tamaño (altura) de tus plantas y cómo graficar su desarrollo.

#### Materiales:

- Macetas con plantas de rabanito
- Cuaderno u hojas de papel
- Sorbetes
- Palitos de dientes
- Tiras de papel
- Tijeras
- Hoja de registro 1

### **Averigua y registra tus resultados:**

1. Mantén un registro de cuánto crece tu planta día a día. Asegúrate de anotar la fecha y la edad de la planta cada vez que la midas (desde el momento en que la sembraste).
2. Mide la altura de las plantas que se te ha entregado.
3. Hay diferentes maneras de medir y graficar: De todos los materiales que has recibido: palitos de dientes, sorbetes, tiras de papel, elige lo que creas conveniente y efectúa la medición.
4. Grafica tus resultados en este espacio
5. Presenta tus resultados o conclusiones.
6. Son muy importantes todos los comentarios que consideres hacer respecto a lo que has realizado. Cuéntanos en el espacio en blanco de esta hoja.
7. Después de finalizada la experiencia únete a los demás compañeros de tu grupo para compartir los resultados de tu grupo con los demás compañeros de tu clase.

### **COMENTARIOS:**



## ANEXO 2

### HOJA DE REGISTRO 1

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Comparando y midiendo el crecimiento

Número de planta	Día de siembra	Día de medición	Observaciones	Altura de hoy
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

## PARTE II

### Materiales

- 1 Hoja de Registro 1
  - 1 maceta con plantas
  - 1 hoja de papel cuadriculado
  - 1 tira de papel cuadriculado recortado en 1 centímetro de ancho
  - 1 par de tijeras
  - 1 regla graduada en centímetros
  - papel milimetrado
  - pegamento
1. Vuelve a verificar que tu medida haya sido correcta. He aquí instrucciones para graficar y medir usando las tiras de papel.
    - Sostén la tira de papel detrás de la planta que estás midiendo. Asegúrate de que la parte inferior de la tira toque la tierra.
    - Dibuja una línea **en la tira de papel** para medir la altura de la planta.
    - Colorea los cuadros debajo de la línea.
    - Vuelve a verificar que tu medida haya sido correcta sosteniendo de nuevo la tira de papel junto a la planta.
    - Luego, recorta los cuadros coloreados como se muestra en la Figura 1.
  2. Pon la tira coloreada en tu gráfico, sobre el dibujo de tus plantas. Verifica que la fecha corresponda al día de la medición
    - Compara tus mediciones y relacionalas con el tiempo que tienen de sembradas las semillas. Presenta tus resultados mediante un **gráfico de barras (estudiados en las anteriores clases de matemáticas)**.
  3. Ponle un título a tu gráfico. Colócalo en tu cuaderno.

### **Ideas para explorar**

1. ¿Fueron del mismo tamaño todas las plantas que se midieron en la clase hoy? ¿Por qué crees que las plantas varían de tamaño?
2. Probablemente hay muchas diferencias de altura entre tus compañeros de clase. ¿Por qué crees que ocurre esto?
3. Calcula las medidas de algunas partes de tu cuerpo. Practica midiendo tu altura con una cinta métrica. Mide tu pie (desde el dedo grande hasta el talón). Luego mide tu antebrazo (desde el codo hasta la muñeca). Compara las dos medidas y también las de tus compañeros.

## ANEXO 3

### HOJA DE REGISTRO 2

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Comparando y midiendo el crecimiento

Número de planta	Día de siembra	Día de medición	Observaciones	Altura de hoy
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				

---

#### PARTE III

**¿QUÉ APRENDI EN ESTA CLASE “COMO CRECEN TUS PLANTAS?”**

Nombre: -----

Sección y Grado: -----

# **Análisis de posibilidades y probabilidad**

Augusta Osorio Gonzales  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## **Resumen**

El tema a desarrollarse será posibilidades y probabilidades. Un objetivo es que el profesor pueda ver cómo se puede mostrar al alumno de dónde nace el concepto de probabilidad, para lo cual se partirá de situaciones de incertidumbre.

Además, se buscará que los profesores manejen ejemplos donde no pueda usarse la idea de la probabilidad clásica o de sucesos elementales equiprobables.

Se usarán actividades que faciliten la introducción a los nuevos conceptos; estas se llevarán a cabo antes de introducir la teoría y se realizarán en parejas o grupos. Se buscará que sea el mismo participante el que llegue a la definición de los conceptos. El objetivo de este taller es que el profesor adquiera un mejor dominio del tema, lo que a su vez les facilitará la trasmisión de estos conceptos a sus alumnos.



**REPORTES  
DE  
INVESTIGACIÓN**



# Un análisis didáctico del software Winplot para la enseñanza del concepto de función

Enrique Huapaya Gómez  
I.E. Scipión E. Llona

## Resumen

La disponibilidad de recursos tecnológicos (applets, graficadores, hojas de cálculo y otros) destinados a facilitar la enseñanza – aprendizaje de la matemática es abundante y diversa, muchos especialistas promueven el desarrollo y difusión de recursos y medios informáticos. Asimismo algunas empresas han desarrollado también diversos programas y calculadoras graficadoras con el fin de innovar las prácticas pedagógicas de los maestros. Esta situación plantea retos y desafíos a los docentes, ya que la integración de estos recursos TIC en la enseñanza – aprendizaje de la matemática no es tan inmediata y transparente (Godino, et al., 2005).

Esta problemática exige asumir enfoques que permitan explicar y comprender mejor como puede integrarse las TIC en la enseñanza aprendizaje de la matemática, el enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática aporta nociones, pautas y criterios que deben ser explorados, investigados y asimilados, para poder mejorar nuestro trabajo con los estudiantes.

**Palabras clave:** Enfoque ontosemiótico, idoneidad mediacional, Winplot, función.

## Marco teórico

El Enfoque ontosemiótico (EOS) considera que es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos:

- 1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- 2) Situaciones – problemas (aplicaciones intra o extramatemáticas, ejercicios).
- 3) Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones), como recta, punto, número, media, función.
- 4) Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
- 5) Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- 6) Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Estos tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas si se adopta un punto de vista institucional, o cognitivas si se adopta un punto de vista personal. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los que surgen, pueden ser vistas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- Personal – Institucional: Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, sus objetos emergentes se consideran institucionales, mientras que si los sistemas son específicos de una persona, los objetos serán personales.
- Ostensivos (gráficos o símbolos) – no ostensivos (entidades que se evocan al hacer matemática, y se representan e forma textual, oral, gráfica o gestual).
- Extensivo – intensivo: Tal dualidad atañe a la relación entre un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (por ejemplo, la función  $y = 2x+1$ ) y una clase más general o abstracta (por ejemplo, la familia de funciones  $y = mx + n$ ).
- Elemental – sistémico: En algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias – que, se supone, son conocidas

previamente-, y en otras como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

- Expresión contenido: Alude al antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

Las facetas aparecen distribuidas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica.

Según el EOS, es necesario tener cuenta las interacciones entre la trayectoria mediacional con las distintas dimensiones implicadas en el estudio de las matemáticas, esto es, las componentes o dimensiones epistémica, cognitiva, emocional, docente y discente (Godino, Contreras y Font, en prensa). La descripción de los criterios los haremos aplicándolos al análisis del recurso Winplot propuesto para la enseñanza del contenido función en el 3ro de secundaria.

### **Descripción del recurso Winplot**

El Winplot es un software libre, puede ser descargado de <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> y constituye una herramienta de apoyo efectiva en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Es un programa graficador de dimensión 2 (ejes X, Y) y dimensión 3 (ejes X, Y, Z). Grafica curvas y superficies, las cuales se pueden visualizar en una variedad de formatos. Está compuesto de menús o ventanas, las cuales se pueden manejar sin dificultad. Cada menú tiene información detallada de las funciones que realiza.

Se pueden analizar a partir de la gráfica, funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, paramétricas, implícitas. Calcular áreas, volúmenes. Determina gráficamente la derivada de una función así como las trayectorias de ecuaciones diferenciales. Winplot permite la integración de los materiales educativos ya existentes (libro o texto de trabajo, batería de ejercicios, etc); retroalimentación efectiva de los temas tratados así como una mejor estética al momento de presentar una clase.

## **Pautas de análisis**

Las pautas de análisis toman en cuenta la complejidad de las interacciones de las diversas dimensiones y factores implicados. Este análisis puede orientar también el diseño de recursos tecnológicos y el estudio de trayectorias didácticas basadas en los mismos, así como identificar conflictos semióticos potenciales.

Para la elaboración de la pauta de evaluación de los recursos se considera la doble faceta, institucional y personal. Dichos conocimientos son analizados teniendo en cuenta los tipos de entidades primarias emergentes de la actividad matemática (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos) y algunos aspectos de las dualidades cognitivas descritas en el marco teórico de referencia.

El EOS introduce nuevas herramientas teóricas que permiten abordar el estudio de los fenómenos de instrucción matemática. Estas nociones se describen como “Teoría de las Configuraciones Didácticas” (Godino, Contreras y Font, en prensa), donde se modeliza la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del

profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las configuraciones cognitivas, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

### **Metodología empleada**

El paradigma de investigación al cual responde esta investigación es de tipo interpretativo<sup>1</sup>, es interpretativo ya que su objetivo es comprender los significados y el impacto que tienen las TIC en la enseñanza – aprendizaje de la matemática. En cuanto al método de investigación, se seguirá el método cualitativo, describiendo situaciones, recogiendo datos, trabajando en equipo para el cruce y triangulación de información, transcribiendo videos y en una segunda etapa analizando toda esta información (análisis de protocolo).

### **Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados**

Clasificaremos las cuestiones de reflexión y análisis teniendo en cuenta las dimensiones epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales) e instruccional (funciones docentes y discentes; patrones de interacción). Para las dimensiones epistémica y cognitiva fijaremos la atención en los tipos de entidades primarias y las facetas cognitivas duales que se proponen en el enfoque ontosemiótico como objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas. Cada una de estas dimensiones interactúa con la tecnología de diferentes maneras (Kaput, 2004, p. 2).

---

<sup>1</sup> Villarreal, M. “La investigación en Educación Matemática”. Universidad Nacional de Córdoba

**a. Dimensión epistémica (conocimientos institucionales de referencia)**

**Situaciones**

**S1) ¿Qué tipo de situaciones-problemas (tareas) específicas permite plantear el recurso?**

Los tipos de cuestiones que se pueden plantear son:

Graficar  $F(x)$  ya sea polinómica, racionales, exponenciales, trigonométrica ó logarítmica.

¿Para qué valores de  $x$  las expresiones  $F1(x) < F2(x)$  (respectivamente  $>, =$ )?

Restringir el dominio de una función, para qué valor de  $x$  la función se hace máxima o mínima.

Realizar operaciones con funciones y resolver ecuaciones por medio de la gráfica de dos funciones, hallando los puntos de intersección de la expresiones gráficas asociadas ejemplo  $F(x) = G(x)$ .

**S2) ¿Sobre qué tipo de situaciones previas se apoyan las nuevas situaciones?**

Este graficador utiliza un entorno muy amigable para introducir expresiones funcionales. Se suponen conocidos, la representación cartesiana de las funciones.

**S3) ¿Qué variables de tarea permiten generalizar la actividad matemática y en qué dirección?**

Las expresiones que se pueden introducir en la ventana de diálogo correspondiente pueden ser no sólo polinómicas, sino algebraicas racionales y trascendentes por lo que las funciones cuyos valores numéricos se pueden comparar son muy generales. Por ejemplo, se pueden plantear cuestiones como: ¿Para qué valores de  $x$  se hace cero la expresión  $y = x^2 - 9$ , o comprobar identidades algebraicas.

El rango de valores de  $x$  e  $y$  que se representan se puede cambiar actuando en la ventana de diálogo inventory opción view. La igualdad de las dos expresiones, que corresponde a la solución de la ecuación se interpreta

también como intersección de las gráficas de las dos funciones.

## **Lenguaje**

### **L1). ¿Se introduce un lenguaje específico en la descripción y uso del recurso? ¿Qué nuevos términos, expresiones, símbolos y gráficos se introducen?**

Se usa la expresión  $y = F(X)$  para introducir la relación de dependencia entre dos magnitudes. En la ventana de diálogo se muestran botones para poder editar la función, así como hallar la gráfica, tabla de valores, expresión simétrica y reflexiones según eje X, eje Y ó  $y=x$ .

- Asignación funcional mediante las gráficas.
- Equivalencia de expresiones cuando las gráficas se superponen.

### **L2) ¿Qué conocimientos lingüísticos previos requiere el uso del recurso?**

Se suponen conocidos los lenguajes funcional, las gráficas cartesianas, y las expresiones algebraicas (\* para la multiplicación, / para la división, ^ para la potenciación). La atribución de valores a la variable mediante la ventana de diálogo inventory, y la interpretación de los valores máximo y mínimo para la X y la Y.

### **L3) ¿Es útil en la progresión del aprendizaje matemático el lenguaje específico introducido?**

Dado el uso cada vez más extendido de recursos informáticos los convenios lingüísticos utilizados pueden aparecer en otros similares (cursores, pulsadores, etc.)

## **Técnicas - acciones**

### **T1) ¿Qué técnicas específicas se requieren para la solución de las tareas?**

Manipulación de la ventana inventory (escritura de expresiones, asignación de valores a x; elección de extremos para los intervalos). La gráfica de una función consiste en

ingresar una expresión polinómica, racional, etc, seleccionar el intervalo, elegir un color dar valores a la variable y observar el comportamiento.

**T2) ¿Qué técnicas previas es necesario dominar para aplicar las nuevas técnicas?**

Manipulación y ejecución de programas informáticos y del hardware necesario.

**T3) ¿Es posible generalizar las técnicas y en qué dirección?**

Aunque la manipulación del graficador Winplot implica el aprendizaje de algunos convenios específicos (escritura en los escalas, restricción del dominio) estos convenios suelen tener un alcance general en este tipo de recursos informáticos. Su aprendizaje puede ser de utilidad para operar esos recursos.

**Conceptos (reglas conceptuales)**

**C1) ¿Qué conceptos específicos se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementadas?**

Gráfica de una función, obtención del dominio y rango de la función, puntos de intersección con los ejes, así como con otras funciones. Obtención de valores máximos y mínimos y solución de una ecuación como valor numérico que iguala ambos miembros y como punto de intersección de dos gráficas.

**C2) ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita y se suponen conocidos?**

El conocimiento del plano cartesiano, par ordenado, relaciones y producto cartesiano. Números reales y operaciones aritméticas; reglas de uso de paréntesis, ejes de simetría y reflexión. Tablas de valores

**C3) ¿En qué dirección se pueden generalizar los conceptos emergentes?**

El recurso está construido como soporte específico y restringido a los conceptos descritos.

## Propiedades

### P1) ¿Qué propiedades se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Dada una función  $y = f(x)$ , al aplicar ciertas transformaciones a la expresión funcional, que ocurre con la representación gráfica asociada, ejemplo que pasa con la gráfica cuando se ingresa en la ventana correspondiente:  $Y = F(x+a)$ ,  $Y = F(x-a)$ ;  $Y = F(x) + a$ ;  $Y = F(x) - a$ ;  $y = F(ax)$  siendo  $a$  diferente de cero.

## Argumentos (justificaciones)

### A1) ¿Qué tipo de justificaciones de las técnicas y propiedades proporciona el recurso?

La justificación de las técnicas y propiedades es de tipo empírico y ostensivo. La gráfica de una función se logra ingresando la expresión correspondiente; el dispositivo calcula y muestra los resultados de manera numérica y gráfica. No hay argumentación deductiva.

## b. Dimensión cognitiva (significados personales)

El análisis a priori de los conocimientos institucionales que potencialmente se ponen en juego en la implementación del recurso proporciona elementos para la elaboración de instrumentos de evaluación de los significados personales de los estudiantes, respecto de los conocimientos previos requeridos, y de los nuevos conocimientos logrados tras el proceso de estudio. Cada uno de los seis tipos de elementos descritos nos puede servir de guía para elaborar ítems de evaluación de los significados personales de los estudiantes.

Asumimos que los estudiantes muestren interés por la manipulación del “Winplot”; el recurso evita tener que realizar cálculos tediosos, escribir tablas de valores y graficar las funciones.

**c. Dimensión instruccional (funciones docentes, discentes y patrones de interacción)**

El análisis epistémico nos proporciona un marco de referencia para elaborar posibles trayectorias didácticas de los contenidos puestos en juego por el recurso. Tales trayectorias se implementarán de acuerdo a unas guías de estudio, o “proyectos de enseñanza-aprendizaje”, en los cuales se hará una selección de los distintos tipos de conocimientos y su secuenciación temporal. En esta fase, la cuestión será la búsqueda de criterios que permitan optimizar la idoneidad epistémica (Godino, Contreras y Font, en prensa) del proceso de estudio, entendida como representatividad de los significados pretendidos respecto de los significados de referencia. Las guías de estudio deben incluir indicaciones sobre el desempeño de las funciones docentes y discentes, así como una previsión de los tipos de configuraciones didácticas que optimicen la idoneidad didáctica del proceso.

A continuación indicamos algunas cuestiones relacionadas con las funciones docentes, discentes y patrones de interacción:

En gran medida el Winplot facilita graficar funciones y permite más tiempo para el análisis de conceptos y otras nociones emergentes (variación, transformaciones, ecuaciones, visualización y aproximación), al ser un graficador amigable, permite que el estudiante aprenda rápidamente su manejo y manipule inventando otros ejercicios y problemas. Este recurso se puede usar tanto en el nivel básico como en el superior.

Cada sesión de trabajo puede durar 80 minutos en los que se puede analizar las principales clases de funciones, operaciones, etc., debe secuenciarse las actividades y tareas para poder optimizar mejor el uso del recurso y mejorar la asimilación del concepto función.

Este graficador facilita la evaluación de los contenidos implementados, así como otros que pudieran emerger,

los estudiantes previo adiestramiento pueden utilizar este graficador de manera autónoma.

Este recurso con ayuda de fichas de trabajo y guías preparadas por el docente permite la autoevaluación de los aprendizajes. Este recurso pone en evidencia los conflictos semióticos de los estudiantes, los que con ayuda del maestro estas dificultades podrán resolverse oportunamente.

Este recurso se puede complementar con un procesador de texto (para comunicar y presentar reportes escritos, presentador de diapositivas en los que se visualiza las gráficas asociadas, así como software de comunicación (Messenger, youtube) para comunicar resultados y compartir información.

## **Referencias**

Falsetti, M., Rodríguez, M., Carnelli, G., Formica, F. “Perspectiva integrada de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática: una mirada a la Educación Matemática” – Unión – Revista iberoamericana de Educación Matemática. Marzo de 2007, número 9. Tomado de [http://www.fisem.org/descargas/7/Union\\_007\\_004.pdf](http://www.fisem.org/descargas/7/Union_007_004.pdf)

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Disponible en [http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm)

Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F., Pareja, J. “Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas”. Universidad de granada. Proyecto EDUMAT. Disponible en [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion_01.pdf)

Mendoza; M., El Winplot como recurso didáctico en la enseñanza de la matemática, Editorial Horizonte, 2003.

Nunes Da Silva, L., Amorin Soares, M. “El uso de las tecnologías mediáticas y digitales en las prácticas pedagógicas”. Tomado de <http://www.cibersociedad.net/congres2006/gts/comunicacio.php?id=449&llengua=es>.

Villarreal, M. “La investigación en Educación Matemática”. Universidad Nacional de Córdoba” tomado de <http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/Monica%20Ester%20Villarreal%20-%2016.pdf>

# Análisis del conocimiento geométrico en estudiantes para profesor de matemáticas. Capacidades y destrezas que lo evidencian

Emma Carreño Peña  
Universidad de Piura

## Resumen

El presente documento describe parte de la investigación realizada sobre el conocimiento geométrico en estudiantes para profesor de matemáticas. En este estudio se analizó el conocimiento que poseían 12 alumnos<sup>1</sup> solo ve los temas de ángulos y polígonos<sup>2</sup> para caracterizarlo en función de las capacidades y habilidades que evidenciaban, tomando como referente el modelo Van Hiele.

**Palabras Clave:** Conocimiento del contenido, formación de conceptos, modelo de Van Hiele, capacidad, habilidad, ángulo, estudiante para profesor de matemática (EPPM).

## Introducción

Lo observado en la formación de pre-grado y en la docencia universitaria de la asignatura de *Geometría Plana* y *Trigonometría*, permitió reparar en la dificultad que tienen

---

<sup>1</sup>Los informante pertenecían al tercer ciclo (segundo año de formación universitaria<sup>1</sup>) de la especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (Perú)<sup>1</sup>, sus edades oscilaban entre los 18 y los 20 años. Estos alumnos estaban iniciando su formación de especialidad y entre las asignaturas que cursaban estaba *Geometría Plana* y *Trigonometría* lo cual permitió recoger los datos necesarios para el desarrollo de la investigación en cuestión.

<sup>2</sup> Se incluye dentro de los polígonos los triángulos.

los alumnos para demostrar un teorema geométrico, elaborar e interiorizar una definición matemática o asociar a esta una representación gráfica coherente. Esto motivó a querer indagar las dificultades conceptuales y gráficas que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas (EPPM) entorno a los temas de ángulos y polígonos. Dichas dificultades fueron analizadas sin tomar en cuenta factores psicobiológicos, ya que lo que interesaba eran las capacidades que se ponen en juego (o que se omiten) al momento de razonar entorno a alguno de los tópicos geométricos señalados.

La relevancia del problema planteado radica en visualizar las dificultades que se evidencian en la formación de conceptos, considerando tangencialmente las limitaciones de enseñanza en el nivel secundario ya que, contrariamente a lo que se propone con las capacidades del área de matemática en el DCN<sup>3</sup>, los contenidos matemáticos, en nuestro caso geométricos, solo se imparten con un matiz numérico y gráficamente estereotipado. De ello que, estudiar la geometría desde un enfoque deductivo-axiomático, suponga una brecha enorme en la actividad matemática de los estudiantes, que es necesario contrarrestar.

El fundamento teórico entorno al conocimiento profesional y dentro de este, el conocimiento del contenido matemático, ha sido tomado de los aportes de Climent (2007). En cuanto a la formación de conceptos, se han considerado los trabajos de Gutiérrez y Jaime (1996), Vinner y Hershkowitz (1983), Fischbein (1993) y Moreira (2002). Finalmente, respecto del modelo de Van Hiele, se ha tomado los aportes de Jaime y Gutiérrez. (1990). Corberán y otros (1994).

## **Metodología**

### **Diseño general**

El estudio en referencia se sitúa dentro del paradigma interpretativo ya que se ha descrito situaciones particulares, sin buscar generalizar las mismas ni hacer una fotografía de

---

<sup>3</sup> Diseño Curricular Nacional Peruano.

lo que sabían los alumnos antes y después de desarrollar los contenidos de geometría euclídea, asignatura en que estaba inmersa la investigación. De las técnicas de recogida de información propuestas por Tenbrink (1997) se seleccionaron *el análisis y el test* como métodos para recabar la información y, como instrumentos de recogida de información se emplearon los *test elaborados por el profesor*<sup>4</sup>(no los estandarizados). Se elaboraron cuatro test: Evaluación sobre el conocimiento a cerca de ángulos y triángulos; ángulos; polígonos; y clasificación de polígonos.<sup>5</sup>

En el análisis y descripción del conocimiento geométrico, se tomó como referencia (no directriz) el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele y se establecieron como categorías de análisis (y descripción) las siguientes: percepción de la figura, descripción de la figura, definición matemática, razonamiento matemático y demostración matemática. Éstas representan capacidades<sup>6</sup> fundamentales y como tales, se considera que la adquisición y desarrollo de aquellas ella permite la asimilación, acomodación y transferencia de los conocimientos en cuestión.

Para el análisis y descripción de resultados se estableció una serie de códigos que permitieron sistematizar la información obtenida y facilitar la interpretación de la misma. Así se determinó que:

- 0 representaba que el indicador estaba ausente en la actividad del EPPM.
- 1 señalaba que el indicador estaba presente en la actividad del EPPM.
- \* indica que la conducta (presente o no) del EPPM tenía un matiz peculiar o anecdótico.

---

<sup>4</sup> TENBRINK, T. (1997). *Evaluación. Guía práctica para profesores*. Madrid: Narcea.

<sup>5</sup> Por motivo de brevedad, solo se hará referencia al test N°2: Ángulos.

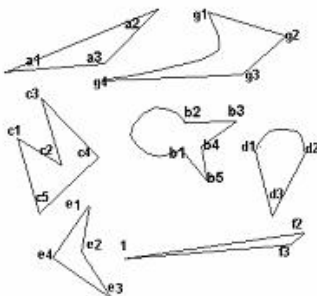
<sup>6</sup> Según Román, M. (2004, p.41) Capacidad es una habilidad general que utiliza o puede utilizar el aprendiz para aprender, cuyo componente fundamental es cognitivo.

- 2 equivalía a que en la conducta (presente o no) del EPPM había un matiz extraño (que cuesta entender o que no es usual que ocurra).

## Test N°2: Ángulos

Fue elaborado tomando como referencia lo trabajado por Matos (1994). Con este test se pretendía conocer la concepción (definición formal e imagen conceptual) que tenían los EPPM respecto de los ángulos, además de observar si diferenciaban entre los ángulos convexos y los cóncavos. El test fue el siguiente:

1. En las siguientes figuras, coloque una "A" en el vértice de cada ángulo. Justifique los casos que no considere como ángulos .



2. Defina que es un *ángulo* .

La siguiente tabla muestra la relación entre las categorías (capacidades) de análisis, las destrezas<sup>7</sup> y los indicadores que se tuvieron en cuenta para interpretar dicho test.

---

<sup>7</sup> Siguiendo a Román, M (2004, p.42), una destreza es una habilidad específica que utiliza o puede utilizar un aprendizaje para aprender. Un conjunto o constelación de destrezas constituye una capacidad. Las destrezas señaladas en la tabla son las que él propone para las personas entre 14 y 18 años.

Test N°2: Ángulos		
Categoría de análisis	Destreza	Indicador de la categoría
1. Percepción de la figura (PF)	-Representación mental.	1. Identifica $b_4, c_2, e_2$ como ángulos cóncavos (internos) de una figura.
	-Observación directa e indirecta.	2. Reconoce que los ángulos se forman por la unión de dos segmentos rectilíneos más no curvos o la combinación de estos.
2. Definición matemática (DM)	-Rigor y precisión.	1. Define ángulo de manera prototípica: “unión de dos rayos con un extremo común”.
	-Uso adecuado del vocabulario.	2. Define de manera completa y correcta “ángulo”.
	-Formulación adecuada y correcta.	3. Utiliza términos correctos y formales al definir.
		4. Señala restricciones para los lados que forman el ángulo.

### Interpretación de los resultados

En general, fue posible observar que algo más de la mitad de alumnos (7 de 12) reconocen que los ángulos se forman por la unión de dos segmentos rectilíneos mas no curvos o alguna combinación parecida. Por otro lado el vértice “g4” ocasionó confusión, tal vez porque la curva  $\overline{g1g4}$ <sup>8</sup> al aproximarse a g4 se hace más rectilínea entonces al unirse con el lado  $\overline{g3g4}$ , los EPPM asumen que es un ángulo. Luego y como caso particular, E8<sup>9</sup> señaló todas las uniones de segmentos rectilíneos, curvos o alguna combinación de ambos con una

<sup>8</sup> Ver test N°2.

<sup>9</sup> A cada estudiante se le asignó como código E y un número el orden alfabético de sus apellidos.

“A” tal vez porque pensó en “vértice de la figura” y no en “vértice del ángulo”.

Respecto del ítem 2 ha de decirse que más que leer un listado de propiedades importaba observar si los EPPM enunciaban las propiedades determinantes del objeto “ángulo”. Así se pudo leer variedad de definiciones de ángulos y cuatro EPPM lo conciben como *unión de dos rayos con un extremo común*, esto coincide con la definición que presentan varios libros de texto.

Entendiendo como definición completa y correcta aquella que se estudia en la asignatura de Geometría Plana y Trigonometría (MGP): “*Unión de dos rayos no colineales con un extremo común*”, puede decirse que solo tres EPPM explicitaron ésta. Respecto al vocabulario empleado, pudo notarse que siete EPPM utilizaron términos formales al definir.

Ahora se comentará brevemente el estudio del caso de una estudiante que mostró un comportamiento bastante coherente en todos los test aplicados. Ocupó el segundo lugar en mayor cantidad de respuestas correctas y no ha vertido respuestas con matiz extraño. Asimismo, dio el mayor número de respuestas incorrectas peculiares<sup>10</sup> y el menor de respuestas incorrectas extrañas, así como de respuestas extrañas a secas.

#### **Estudio de un caso: Modelo mental del estudiante 4**

##### **A. *Conocimiento geométrico***

La concepción que tiene entorno a los ángulos es la clásica y común, ya que considera que para formarlos bastan dos rayos que parten de un punto. Con esto dejó claro que los lados de un ángulo son rectos. En coherencia con su respuesta, reconoció perfectamente los vértices de cada ángulo de las siete figuras mostradas.

---

<sup>10</sup> El matiz peculiar, tanto en las respuestas correctas e incorrectas, hace que sea un caso interesante para el análisis.

En cuanto a la clasificación de ángulos<sup>11</sup>, reconoció todas las clases: convexos, cóncavos, rectos, obtusos y “llanos”<sup>12</sup>, aunque sin estructurar un esquema inclusivo.

Respecto a la medida de ángulos, a pesar de que asignó las medidas correctas a cada uno, al momento de escribir el valor de la medida siempre lo hizo en la región convexa, aunque el ángulo era cóncavo. Esto puede ser una consideración irrelevante; sin embargo, si lo acostumbrado es escribir la medida en la región determinada por cada ángulo en cuestión, para los ángulos cóncavos debió escribir su medida en la región cóncava y no en la convexa.

## B. Capacidades y habilidades matemáticas

### ◆ *Percepción de la figura*

Es correcta aunque no completa puesto que al clasificar los ángulos de manera independiente, se observa que estableció redes simples entre ellos. Esto, según el modelo de Van Hiele, ocurre en el segundo nivel de razonamiento o nivel de análisis.

En cuanto a las destrezas relacionadas con esta capacidad puede decirse que la observación directa e indirecta se realizó de manera detallada porque identificó correctamente los vértices de los ángulos de las figuras mostradas; sin embargo, la representación mental y la identificación de los elementos reales y matemáticos se notaron un poco confusa porque al indicar el vértice de “e2” lo hizo en la región convexa, siendo éste un ángulo cóncavo.

### ◆ *Descripción de la figura*

Describió las figuras utilizando un vocabulario elaborado, correcto y específico.

---

<sup>11</sup> Las propiedades, clasificación y medida de ángulos fue trabajada en el test N°1.

<sup>12</sup> Ya se ha explicado lo que acontece respecto de este “ángulo”.

### ◆ *Definición matemática*

Aunque definió de manera prototípica, utilizó los términos apropiados, evitó las redundancias e identificó las características necesarias de cada clase. Según el modelo de Van Hiele, se notaron destrezas de rigor y precisión (no solo utilizó palabras sino también símbolos matemáticos), usó adecuadamente el vocabulario y realizó formulaciones pertinentes y correctas<sup>13</sup>.

### **Referencias**

Climent, N (2007). El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Documento de trabajo del curso de desarrollo profesional del profesorado. Máster en investigación la enseñanza y aprendizaje de las ciencias sociales, experimentales y matemáticas.

Corberán, Gutiérrez y otros (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Estudio financiado con cargo a la convocatoria de ayudas a la investigación del C.I.D.E. Madrid: centro de publicaciones del Ministerio de educación y ciencia.

Jaime y Gutiérrez (1990) Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de l geometría: el modelo de Van Hiele. en S. Llinares y M.V. Sánchez, (eds), *Teoría y práctica en la educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: alfar.

Jaime; Gutiérrez; Chapa, (1992) Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. Epsilon n°23.

Latorre; Del Rincón y Arnal (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado.

---

<sup>13</sup> Aunque ya se ha indicado que la definición de ángulo dada es el que suele encontrarse en la mayoría de los libros de texto.

Matos, J.M. (1994) Cognitive models of the concept of angle. proceedings of the xviii international conference for the psychology of mathematics education. vol. III (pp. 263-278). University of Lisbon. Portugal. 29july-3august.

Moreira, M (2002) La teoría de los campos conceptuales de vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. enseñanza de las ciencias, 7(1).

Moriena y Scaglia (2003) Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. Educación matemática, abril, año/vol.15, número 001. Distrito Federal, México.

Román, M., Diez, E. (2004) Diseños curriculares de aula. un modelo de planificación como aprendizaje-enseñanza. Argentina: Novedades educativas.

Tenbrink, T. (1997). Evaluación. guía práctica para profesores. Madrid: Narcea.

Zapata, M. (2006) Una revisión al diseño curricular nacional de educación básica regular del Perú en el nivel secundario y del área de matemática. campo abierto, vol. 25 n°2, pp 101-128.



# La identificación de las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje en los estudiantes para profesores de Matemáticas

Marcos Augusto Zapata Esteves  
Universidad de Piura

## Resumen

El pensamiento del profesor y su actividad en la clase son un medio para comprender la enseñanza. La interpretación de este pensamiento es una de las bases para diseñar propuestas de formación y perfeccionamiento del profesorado en los centros de formación inicial y permanente del profesorado. El trabajo presentado es de una investigación llevada a cabo con estudiantes para profesores de la especialidad de Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Piura-Perú. El estudio se realiza con la finalidad de identificar sus concepciones sobre las Matemáticas y su enseñanza aprendizaje. A este respecto, la investigación puede tomarse como línea de base para un curso de práctica profesional con la finalidad de mejorar el desempeño en el aula de los futuros profesores y para elaborar programas de formación continua.

**Palabras claves:** concepciones, formación inicial, enseñanza de las matemáticas, papel del profesor.

## Introducción

Las tendencias actuales en formación del profesorado indican que la calidad profesional de los profesores está directamente relacionada con los centros donde se realiza su formación inicial. Estos centros deben trabajar para que sus estudiantes adquieran capacidades y competencias que sean adecuadas para que los futuros profesores puedan desempeñarse sin

dificultades en aula y logren los aprendizajes esperados en sus alumnos.

### **Las concepciones en la formación inicial de los profesores**

Publicaciones recientes sobre la formación inicial del profesorado (Thompson (1992), Ponte (1992), Blanco, Mellado y Ruiz (1995), Mellado, Blanco y Ruiz (1997), Camacho (1995), Blanco (1998), Carrillo (1998), Flores (1998), Contreras (1999)) coinciden en señalar la importancia del estudio de las concepciones si queremos promover nuevas ideas que puedan ser llevadas al aula. Es más, consideramos que “la formación del profesorado es una de las piedras angulares imprescindibles de cualquier intento de renovación del sistema educativo a niveles cualitativos, con decisivas y claras proyecciones sobre la calidad de la enseñanza” (Gimeno, 1982a, 77). Asumimos, en primer lugar, el significado que se le da al término concepciones como un conjunto de “creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes” (Thompson, 1992, 132) y como “conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones y respuestas a preguntas sobre su práctica.” (Carrillo, 1998, 42).

Las concepciones son importantes para la formación de los profesores, ya que influyen en su comportamiento y en el clima de la clase. Thompson (1992), en su síntesis sobre las investigaciones de las creencias y concepciones de los profesores concluye que es necesario explicitar las ideas de los profesores si queremos intentar promover una transformación de éstas y si queremos comprender la actuación del profesor en el aula.

En el trabajo que realizamos hemos acotado las variables sobre las cuales podríamos haber investigado y que tienen relación con la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas y con el proceso de formación de los profesores. A este respecto, desde el inicio de la investigación teníamos dos referencias para determinar sobre qué aspectos queríamos trabajar: el currículo de matemáticas en la enseñanza secundaria en Perú (Zapata, 2006) y el cuadro descriptivo de

las tendencias didácticas (Carrillo, 1998, Contreras, 1999 y Climent, 2002). Contreras y Carrillo (1995) realizan una propuesta de un modelo mental categorizando el estilo de enseñanza de los profesores. Se establece una relación entre: las concepciones que posee un profesor y su tendencia didáctica de enseñanza de las matemáticas.

Otros de los aspectos que hemos considerado en esta investigación son: la metodología de enseñanza, Las teorías de aprendizaje, El papel del alumno para el aprendizaje de las matemáticas. El papel del profesor en la enseñanza de las matemáticas y la evaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

### **Metodología de investigación**

Hemos optado por una metodología de tipo cualitativa que nos permite estudiar y analizar las concepciones de los estudiantes para profesores interpretando sus respuestas. La investigación que realizamos también podemos clasificarla como Ideográfica porque estudia a cada uno de los estudiantes para profesores no pretendiendo llegar a leyes particulares. El diseño general de la metodología fue el siguiente: selección de las categorías y de las subcategorías para los dos cuestionarios; selección de la población; elaboración, validación y aplicación de los cuestionarios; análisis de los cuestionarios; elaboración de entrevista semiestructurada; aplicación de entrevista; discusión de los resultados de los dos cuestionarios y entrevista; muestra de resultados y conclusiones. En este documento sólo queremos mostrar el trabajo desarrollado con el segundo cuestionario, de carácter cualitativo, describiendo su elaboración y aplicación.

### **Sistemas de categorías para la clasificación de las concepciones**

Zapata (2007), justifica la elección de cada una de las categorías y la construcción de las subcategorías correspondientes a cada una de ellas. En el Cuadro N° 1 presentamos las categorías con sus respectivas subcategorías.

<p><b>CATEGORÍA: Metodología de trabajo del profesor.</b> Subcategorías: Programación, Praxis, Recursos y materiales.</p>	<p><b>CATEGORÍA: Sentido de la asignatura.</b> Subcategorías: Finalidad, Naturaleza.</p>
<p><b>CATEGORÍA: Aprendizaje.</b> Subcategorías: Obtención del aprendizaje, Organización del aprendizaje Manifestación del aprendizaje, Actitudes hacia las matemáticas.</p>	<p><b>CATEGORÍA: Papel del alumno.</b> Subcategorías: Participación en la programación, Actividad del alumno en la sesión de aprendizaje.</p>
<p><b>CATEGORÍA: Papel del profesor.</b> Subcategorías: Concepción de la enseñanza, Coordinación en el área, Actividad del profesor en el aula.</p>	<p><b>CATEGORÍA: La evaluación.</b> Subcategorías: Concepción de evaluación, Criterios de evaluación, Programación de la evaluación, Instrumentos de evaluación.</p>

**Cuadro N° 1** Categorías y subcategorías del segundo Cuestionario aplicado en la investigación

### **Tratamiento inicial de la información recogida en el segundo instrumento**

Después de recoger la información en el cuestionario, instrumento de análisis de las tendencias didácticas, hemos procedido a la obtención de los datos y al tratamiento de la información de la siguiente manera: hemos buscado la convergencia de las distintas respuestas para organizarlas dentro de cada categoría y jerarquizarlas ubicándolas en cada subcategoría. El elemento básico para el comienzo del estudio son las unidades de análisis. A continuación se enumeran las unidades de análisis de cada alumno. A partir de esas unidades de análisis se han elaborado las ideas núcleo. A continuación, se establece una codificación para favorecer el proceso de análisis. Describimos los códigos para poder identificar las ideas núcleo de cada estudiante. Luego, pasamos a codificar las ideas núcleo de cada uno de los estudiantes. Luego se realiza el estudio y análisis del conjunto de las ideas núcleo. Estas ideas nos darán información sobre las concepciones de

cada uno de los estudiantes. Como producto se obtienen las concepciones de cada uno de los estudiantes. Estas concepciones están organizadas de acuerdo a las categorías y subcategorías. Luego se realiza el estudio y análisis de las concepciones de cada estudiante, reforzadas con las manifestaciones que realizan los estudiantes mediante la entrevista y los resultados obtenidos en el primer cuestionario. Hemos obtenido como producto información sobre las concepciones del conjunto de estudiantes.

### **Resultados obtenidos**

A continuación presentamos algunas de las concepciones que tienen los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza aprendizaje.

Para los estudiantes la programación debe ser elaborada por el conjunto de profesores del área que son los que determinan el orden y la dosificación de los contenidos. Afirman que la programación es una declaración previa de lo que se piensa hacer y evita la improvisación de la tarea docente. Así por ejemplo, VM afirma que “la programación es prescrita en cuanto prevee cómo se realizarán las actividades de aprendizaje”; RB dice que la programación “prevee lo que quiero realizar, me ayuda a dirigirme y para; para CF la organización de la programación es inicial y es lo que se espera alcanzar. También enumeran los componentes que la conforman pero observamos no existe un conocimiento claro sobre sus características principales como son: coherencia, contextualización, utilidad, realismo, colaboración, flexibilidad y diversidad. La finalidad de las matemáticas debe ser formativa y debe desarrollar capacidades que permitan a los alumnos ser autónomos en su aprendizaje. Existen discrepancias entre las concepciones de los estudiantes sobre la obtención del aprendizaje. De acuerdo a sus concepciones los hemos podido clasificar en tres grupos. El primer grupo que afirma que el mejor aprendizaje se obtiene cuando el profesor explica correctamente de manera clara y ordenada. El segundo grupo que afirma que el aprendizaje se fija mejor por las experiencias que vive el alumno, éste debe ir descubriendo de manera activa los contenidos que debe

aprender. El tercer grupo de estudiantes afirman que los alumnos deben aprender por medio de la explicación del profesor y luego complementar lo que el profesor ha enseñado pero descubriendo los nuevos contenidos.

## **Conclusiones**

Los fundamentos epistemológicos de las matemáticas deben ser considerados en el programa de formación de docentes de Matemáticas, ya que estos profesionales no tienen una cultura matemática que los ayude a comprender cómo se han originado los contenidos y las estructuras de esta materia. La discrepancia que tienen los estudiantes sobre el uso de los métodos para la enseñanza de las matemáticas, permite afirmar que dentro de los cursos de didáctica de esta asignatura debemos planificar estrategias que incorporen el uso de los métodos deductivos, inductivos y empíricos o heurísticos, para que los estudiantes puedan contar con estos tipos de herramientas y lograr aprendizajes en los alumnos.

Con la manifestación de las concepciones también hemos podido conocer que estos estudiantes tienen un conocimiento claro de la programación y la metodología que se debe aplicar en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, no describen las técnicas y estrategias específicas que se aplican en esta ciencia. Estas herramientas deben ser proporcionadas en los cursos de didácticas de las matemáticas y en las prácticas profesionales. De acuerdo a las respuestas de los estudiantes podemos afirmar que ellos conocen sobre la finalidad, manejo y el buen uso, de los materiales didácticos ya que manifiestan que deben utilizarse para conseguir en los alumnos el cambio de un pensamiento concreto a un pensamiento abstracto.

Hemos podido identificar que existen discrepancias en sus opiniones sobre la obtención del aprendizaje. Esta concepción puede definir el estilo de enseñanza de los estudiantes para profesores, los que afirman que el aprendizaje se debe obtener por recepción posiblemente utilicen técnicas expositivas para la enseñanza, para los que piensan que el aprendizaje se debe

obtener por descubrimiento utilizarán técnicas y recursos donde los alumnos tengan como actividad principal la exploración de los materiales para elaborar sus definiciones y llegar a construir el conocimiento y, para los que manifiestan que el aprendizaje se debe obtener por recepción y descubrimiento respectivamente utilizarán estos dos tipos de recursos. El aprendizaje para estos estudiantes, se manifiesta cuando los alumnos explican lo que han aprendido con sus propias palabras y cuando aplican estos conocimientos a contextos diferentes; es decir, cuando pueden realizar una transferencia del nuevo conocimiento. Este sería un aspecto a observar por el formador de profesores cuando el estudiante realice sus conducciones. Pues es un indicador que nos informará si los alumnos han asimilado el nuevo contenido.

Analizando de forma general las tendencias de los estudiantes podemos afirmar que se orientan hacia una tendencia tecnológica que es la que más aparece en las distintas categorías, aunque con rasgos espontaneístas e investigativa y las menos veces tradicionales. Esta investigación, representa una línea de base que servirá para una nueva investigación que realizaremos mas adelante. Analizaremos si estos resultados se mantienen cuando los estudiantes actúan como profesores, es decir si los resultados se reflejan en la práctica del aula.

## **Referencias**

Barrantes, M. y Blanco, L. (2006). A Study of Prospective Primary Teachers “Conceptions of Teaching and Learning School Geometry”. *Journal of Mathematics Teachers Educations*. 9, 411-436

Blanco, L. (1991). *Conocimiento y Acción en la Enseñanza de las Matemáticas de Profesores de E.G.B. y Estudiantes para Profesores*. Cáceres. Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.

Blanco, L. J. Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en Ciencias Experimentales y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación*, 307, 427– 446.

Blázquez, F. y Lucero, M. (2002). Los Medios y Recursos en el Proceso didáctico. En Medina, A. y Salvador, F. (Eds.) *Didáctica General*. Madrid. Prentice Hall, 185 – 217.

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las Matemáticas ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos. En Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (coords.). *Matemáticas y Educación Retos y Cambios desde una Perspectiva Internacional*. Barcelona. Editorial GRAÖ de IRIF, S.L. 35-56

Blanco, L. J. (1998). Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar Matemáticas. *Cultura y Educación*, 9, 77-96.

Camacho, M., Hernández, J. y Socas, M. (1995). Concepciones y actitudes de Futuros profesores de secundaria hacia la matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. En

Blanco, L. y Mellado, V. (1995). *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal*.

Badajoz. Imprenta de la Excma. Diputación de Badajoz. 81 – 97.

Contreras, L. y Carrillo, J. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación de Matemática*. 7, 3, 26 – 37

Contreras, L. y Carrillo, J. (1998). Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. *Educación de Matemática*. 10, 1, 26 – 37

DINFOCAD (2003). Currículo de Formación Docente Especialidad Matemática Secundaria. MED. Lima.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Granada. Comares.

Gallego, L. y Salvador, F. (2002a) “Metodología de la acción didáctica.” En Medina, A. y Salvador, F., (eds.). *Didáctica General*. Madrid. Prentice Hall, 157–217.

LLinares, S. (1994a). Los Aprendices y las Matemáticas: el

Proceso de Aprendizaje Matemático. En Víctor García Hoz. *La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Madrid. Ediciones Rialp, S.A. 183- 223.

LLinares, S. (1994b). La Enseñanza de las Matemáticas, Perspectivas, Tareas y Organización de las Actividad. Víctor García Hoz.. *La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Madrid.. Ediciones Rialp, S.A., 249 - 295.

MEC (1992). *Secundaria obligatoria. Área de Matemáticas*. Madrid.

MED (2004). Guía de Evaluación del Aprendizaje. Lima. MED.

Mellado, V. Ruiz, C. y Blanco, L. J. (1997). Aprender a enseñar ciencias experimentales en la formación inicial de maestros. *Bordon*, 49 (3), 275-288.

Montero, L. (2001). *La construcción del conocimiento profesional docente*. Rosario-Santa Fé. Homo Sapiens Ediciones.

Pérez, P. (2000). *Psicología Educativa*. Lima. Industrial Gráfica S.A.

Ponte, J.P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. En Brow, M.; Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> PME Conference*, Lisboa. (1), 195-201.

Pozo, J. (1996). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Madrid. Morata.

Reglamento de la Ley General de Educación 28044 Promulgada 28 de Julio del (2003) por el Presidente Constitucional de la República Doctor Alejandro Toledo Lima.

Sánchez, V. (1994): Currículo y Educación Matemática. En Víctor García Hoz. *La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Madrid, Ediciones Rialp, S.A. 154 -182.

Sántalo, L. (1994): La enseñanza de la matemática en la educación *intermedia*. En Victor García Hoz. *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*. Madrid. Ediciones Rialp, S.A., 19 -142.

Thompson, A. G. (1992): Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En Grouws, D.A. (ed.): *Handbook of research on Mathematics teaching and learning.*, Nueva York. MacMillan, 127-146.

Valiente, S. (2000) Didáctica de la matemática el libro de los recursos. Madrid. Editorial la Murralla. S. A.

Zapata, M. (2006). Una revisión al Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú en el nivel secundario y del área de matemática. *Campo Abierto* 25, 2, 101-128

Zapata, M. (2007). Identificación de las Concepciones de los Profesores en Formación sobre las Matemáticas y su Enseñanza-Aprendizaje en Perú. Memoria para la obtención del diploma de estudios avanzados DEA, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura Badajoz.

Zapata, M. y Blanco L.J. (2007) Las Concepciones sobre las Matemáticas y su Enseñanza Aprendizaje de los Profesores de matemáticas en Formación. *Campo Abierto* 26, 2 , 83-108

# Matemáticas realistas con alumnos del primer ciclo de la Universidad San Ignacio de Loyola

Juan Carlos Sandoval Peña  
Universidad San Ignacio de Loyola

## Resumen

El aprendizaje de la matemática se hará significativo en la medida que los alumnos vean su aplicación a situaciones cotidianas, por ello esta investigación pretende que el estudiante aprenda matemática a través de la contextualización de situaciones de la vida diaria. Esto implicaría una estrategia metodológica que considere las siguientes etapas:

1. Exploración, manipulación y conjeturación de situaciones
2. La formalización, es decir estudiar los conceptos y nociones matemáticas en problemas que involucren contenidos intra y extra matemáticos.

Este enfoque se sustenta en una concepción que considera a las matemáticas como una generalización de la experiencia y se puede aprender recurriendo a nuestra experiencia y saberes previos.

**Palabras clave:** Matemática Realista, contextualización, procesos matemáticos.

## El problema de investigación

Es de conocimiento general que un elevado número de estudiantes, al pasar de la secundaria a la universidad, fracasa en el primer curso de estudios de Matemática con el que se enfrenta. Los alumnos terminan su secundaria con pocos

saberes y capacidades fundamentales, a esto le agregamos los últimos reportes nacionales e internacionales sobre rendimiento en Matemática, que arrojan estadísticas nada alentadoras.

Ante la situación presentada se propone la siguiente investigación “propiciar en el aula una educación matemática realista a través de presentación de situaciones y fenómenos contextualizados, a si como de contenidos intra y extra matemáticos en alumnos del primer ciclo de la USIL”.

En efecto, el trabajo de contextualización implica:

- La capacidad para resolver problemas reales con una actitud crítica y reflexiva.
- Una comprensión más amplia de la aplicabilidad de los conceptos.
- El desarrollo de la creatividad para integrar los conceptos y realizar conexiones.
- La capacidad para apreciar el poder de la matemática.

La enseñanza tradicional y el rechazo al área de matemática generan en los alumnos desalientos y desmotivaciones pues no evidencian la aplicación de la matemática en la vida diaria. “En la enseñanza de las matemáticas es necesario sustituir el formalismo por el pensamiento intuitivo y las matemáticas han de estar en contacto con situaciones de la realidad” (Uno, revista de Didáctica de las matemáticas número 31, pág. 7).

Se propone desarrollar un proceso de instrucción donde se han enseñado objetos matemáticos necesarios para la resolución de problemas. El objetivo será consolidar los conocimientos matemáticos adquiridos, y por otra parte, que los alumnos vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. (Font, 2006; Ramos y Font, 2006).

Es importante señalar que los problemas de contextualización permitirán integrar diversos tópicos del curso por lo que los alumnos podrán integrar conceptos y apreciar la matemática desde otra perspectiva.

## Marco teórico

Los problemas denominados contextualizados se proponen a los alumnos como una descripción escrita de una situación real. (Font, V. II coloquio Internacional de Enseñanza de las matemáticas, PUCP).

También podemos señalar la contextualización como la presentación de problemas con un texto asociado a los intereses de los alumnos. Será de interés para alumnos porque reflejan realidades de su entorno, están de acuerdo con sus gustos, ideas, sentimientos o responde a realidades de su comunidad con lo cual, se supone que están plenamente identificados. (Palacios, J. Didáctica de la matemática, Fondo Editorial de San Marcos, 2003).

Se pone en practica las actividades tanto de alumnos como la del docente y sus posibles combinaciones (docente- alumno, alumno- alumno, docente – grupo, docente- colectivo). Este procedimiento incide en la metacognición de los alumnos, que consiste en el proceso “pensar sobre el pensamiento”, más preciso tiene que ver con el conocimiento sobre la cognición. (Schraw y Rayne, 1994).

Los problemas sobre contextualización a través de la matemática realista no pretende ser una teoría general del aprendizaje, sino una teoría global (o una “filosofía” según Freudenthal) que se concretiza en teorías locales de enseñanza de tópicos de la matemática y que se basa en las siguientes ideas centrales:

- Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina matematización) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Desde el punto de vista curricular, la reinención guiada de la matemática en tanto, actividad de matematización, requiere de la fenomenología didáctica como metodología de investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.

### **Metodología empleada**

En esta primera parte de la investigación se eligieron en forma aleatoria 20 alumnos del curso matemático del primer ciclo de la USIL. Los alumnos resolvieron de 1 a 2 problemas sobre contextualización en sus prácticas programadas por la universidad, estas son corregidas por un jefe de práctica, el investigador recoge el desarrollo de dichos problemas y elabora un portafolio registrando el progreso de cada alumno, con el portafolio se desarrollan entrevistas para mejorar el tratamiento de las preguntas matemáticas.

Los contenidos matemáticos han cambiado en las últimas décadas y también la manera de hacer matemáticas. La matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias. Las actividades como observar, explorar, utilizar discernimientos intuitivos, hacer predicciones, probar hipótesis, conducir ensayos, controlar variables, simular situaciones reales son cada vez más frecuentes. El profesor debe incluir en sus clases métodos de trabajo de exploración y descubrimiento, la matemática se ha de presentar como una ciencia viva y en pleno desarrollo y no como una serie de recetas y conocimientos acabados.

Proponemos una asignatura en la que los futuros profesores vean contenidos en acción para llevar al aula. Queremos integrar el contenido matemático con los métodos de forma que el futuro profesor se vea profesionalmente activo.

El trabajo se desarrollará en pequeños grupos y de forma individual. El trabajo se dará a conocer al resto de los compañeros ya sea mediante fotocopias o con exposición

para toda la clase. Los trabajos tomarán siempre como referente básico la comprensión de cada uno de los temas estudiados.

### **Evaluación**

Para la calificación final se tendrá en cuenta:

- Asistencia y participación en clase.
- Elaboración y exposición de al menos un trabajo personal.
- Promedio de las calificaciones de los temas relativos a la contextualización

Para los alumnos que no hayan cumplido alguno de los puntos anteriores se realizará un examen final.

### **Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados**

Cada prueba que se toma oficialmente en la universidad contiene de uno a dos preguntas relacionadas con la contextualización, a continuación se presentan algunas de ellas:

**PREGUNTA N ° 1      CICLO VERANO 2008**

1. Una empresa obtiene utilidades que varían entre 50 000 y 100 000 dólares. Sus costos fijos son de 20 000 dólares, el costo unitario de \$5 y el precio de venta de 10 dólares. Hallar entre que valores debe estar comprendido el número de artículos que se produce.

**PREGUNTA N ° 2      CICLO VERANO 2008**

2. El dueño de una discoteca lo ofrece en alquiler y para ello da a elegir dos opciones para que le paguen: o le pagan una sola cuota de \$1500 o le pagan \$420 más el 12% de los ingresos recaudados por la venta de entradas. Si el precio de la entrada es de \$9, ¿cuántas personas deberán asistir para que la segunda opción le resulte más conveniente al dueño de la discoteca?

**PREGUNTA N ° 3      CICLO VERANO 2008**

3. Un editor puede vender 12 000 ejemplares de un libro al precio de \$25 cada uno. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares. ¿Qué precio máximo deberá fijarse a cada ejemplar con objeto de lograr ingresos por lo menos de \$300 000?

**PREGUNTA N ° 4      CICLO VERANO 2008**

4. Una compañía elabora dos productos A y B, en dos máquinas I y II. Se ha determinado que la compañía logrará una ganancia de \$3 por cada unidad del producto A y \$3 por cada unidad del producto B. Para producir una unidad del producto A se necesitan 6 minutos en la máquina I y 5 minutos en la máquina II y para producir una unidad de B, se necesitan 9 minutos en la máquina I y 4 minutos en la máquina II. Se cuenta con 5 horas de tiempo para utilizar la máquina I y 3 horas de tiempo para utilizar la máquina II, en cada turno.
- a) ¿Cuáles son las variables que es necesario analizar para maximizar la ganancia de la compañía?
  - b) ¿Cuál es la función que nos permite obtener la máxima ganancia?
  - c) ¿Cuáles son las restricciones del problema?
  - d) ¿Cuál es el gráfico que representa el conjunto solución?
  - e) ¿Cuántos productos de cada tipo se deben de producir para maximizar la ganancia?

La capacidad de resolver situaciones contextualizadas puede tener para cada individuo un determinado desarrollo por lo que hablaremos de niveles de desarrollo que se determinaran por la identificación que el estudiante hará de las características relevantes de la situación, el establecimiento de relaciones identificando un modelo matemático y el uso que hace del modelo para conseguir el objetivo pretendido. El esquema de análisis considera, para la capacidad de contextualizar, cuatro niveles de desarrollo. Las

características en general de estos niveles se recogen en la siguiente tabla:

NIVELES DE DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE CONTEXTUALIZAR	
NIVEL 0	Nada. No hay intento de solución
NIVEL 1	Identifica algunos aspectos
NIVEL 2	Identifica aspectos relevantes y establece relaciones del texto
NIVEL 3	Construye un camino eficaz y utiliza este camino para la toma de decisión adecuada

Los resultados son alentadores, los alumnos van adquiriendo responsabilidad en la resolución de problemas sobre contextualización de un 10% inicial a un 30 a 40% final.

### Referencias

Falsetti, M. y Rodríguez, M. (2005). Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: *¿Qué perciben los alumnos?* Revista latinoamericana de Investigación en matemática Educativa Núm 3. 2005, 319- 338

Font, Vicenc. (2007, febrero) II coloquio Internacional sobre la enseñanza de las matemáticas. Clasificación de los problemas contextualizados. pp. 42-43 Lima, Perú

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Disponible en [http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm)

Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F., Pareja, J. “Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas”. Universidad de granada. Proyecto EDUMAT. Disponible en [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion_01.pdf)

Grupo Patagónico. Matemática realista. InstitutoFreudenthal: [www.fi.uu.nl](http://www.fi.uu.nl)  
<http://www.gpdmatematica.org.ar/matrealista.htm>

Palacios, Joaquín (2003). Didáctica de la matemática. Fondo editorial de pedagógico San Marcos.

Pisa 2003. Aprender para el mundo del mañana.  
<http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003resumenocde.pdf>

Roig, A. y Llenares, S. Dimensiones de la competencia matemática al finalizar la educación secundaria obligatoria. Caracterización y análisis. Departamento de Innovaciones y formación Didáctica. Universidad de Alicante

# Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE

Cerapio Quintanilla Córdor  
Universidad de Huancavelica

## Resumen

En la década de los 90, se inicia en los Estados Unidos un fenómeno ligado a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, ampliamente investigado y reportado por investigadores como: Dubinsky, Harel (1992); Yerushalmy y Schwars (1993); David Tall, Mercedes McGowen y Phil DeMarois (1996); Daniel Breidenbach, et al., (1992) quienes ilustraron en el campo matemático para llevar adelante investigaciones en el proceso educativo desde la óptica epistemológica de una función. Al respecto, Daniel Breidenbach, et al (1992, 247) manifiesta, pese a que los estudiantes universitarios llevan varios cursos de matemáticas, aun no tienen una comprensión adecuada del concepto de función.

El trabajo de investigación consiste en el *estudio de la concepción de las funciones* en los estudiantes del nivel universitario de la especialidad de Matemática y Física bajo la perspectiva de la Teoría APOE. Los estudiantes que participan en el trabajo de investigación cursan el VIII y X ciclo, equivalente al 4to y 5to año de Facultad, en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Huancavelica. La principal problemática que atiende este proyecto consiste en la ausencia de significados del concepto de función, en las clases de matemática básica y análisis matemático. En la actualidad, la enseñanza y el aprendizaje de concepto de función se centra en los aspectos formales y algebraicos, dejando de lado aspectos epistemológicos desde una visión más amplia.

Consideramos relevante el tema de funciones porque es el eje central en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (análisis matemático o cálculo), por lo que se requiere crear situaciones que equilibren los diferentes acercamientos teóricos y metodológicos.

### **Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte**

La investigación es cualitativa y permite realizar **un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE**, en los estudiantes de la Universidad Nacional de Huancavelica. La teoría APOE desarrollada por el Dr. Ed Dubinsky y RUMEC permite ver las construcciones mentales (acción proceso, objeto y esquema) llamados abstracciones reflexivas (desde un punto de vista cognitivo). Por otra parte, dentro de la teoría APOE Asiala, et al (2004, 5) considera un aspecto importante la descomposición genética “una descomposición genética de un concepto es un conjunto estructurado de constructos mentales, el cual podría describirse como el concepto que puede desarrollarse en la mente de un individuo”, para el desarrollo de la investigación se ha desarrollado la descomposición genética del concepto de función. Finalmente, se ha presentado situaciones a priori (examen de entrada) para verificar en qué condiciones se encuentran los estudiantes, para luego pasar al ciclo ACE expuesto en la metodología.

### **Metodología empleada**

De acuerdo al tipo de investigación emprendida, la investigación es cualitativa pues pretende investigar la comprensión por parte de los estudiantes sobre la noción de función. Su desarrollo comprende tres etapas: la primera es realizar una presentación a priori, un conjunto de 33 situaciones a 20 estudiantes; la segunda (en ejecución), una actividad desarrollada de conceptualización denominado **ACE** (actividad, discusión en clases y ejercicios) por Dubinsky; y tercero, será una presentación de resignificación.

Para el proceso del trabajo de investigación se ha tomado el lenguaje de programación **ISETLW** (Interactive Set Language window), programa que permite desarrollar la conceptualización del concepto de función. El tratamiento educacional se basa en la teoría constructivista del aprendizaje desarrollado con trabajos en el laboratorio de computación orientado al desarrollo de la concepción de función por parte de los estudiantes. Se realizará varias observaciones a los estudiantes, antes, durante y después del desarrollo del tratamiento educacional para verificar la aparente comprensión del concepto de función.

### **Implementación Didáctica**

Dubinsky (1996) afirma que el método pedagógico que sustenta sus investigaciones, con el fin de alcanzar sus objetivos, está conformado por tres grandes principios: el primer componente es el análisis teórico desde la perspectiva de la teoría APOE; el segundo componente describe el tratamiento instruccional incluyendo el ciclo de enseñanza ACE (actividades con ordenador, discusiones en clases y ejercicios de afianzamiento), aprendizaje cooperativo y el uso del lenguaje de programación ISETLW y finalmente la recolección de datos.

El diseño del ciclo ACE hará que los estudiantes logren reflexionar sobre su trabajo y sobre los conceptos de función. Las sesiones de trabajo se realizarán por semanas y se alternará con el trabajo de laboratorio de cómputo con el trabajo en el aula, así como el trabajo fuera de clase; la naturaleza del trabajo será de pequeños grupos, de dos y tres estudiantes. El ciclo de enseñanza se realiza a través de tres componentes:

- i. **Actividades.** Este componente el estudiante podrá desarrollar sus actividades en equipo (grupos de dos), el equipo tendrá que discutir sobre las actividades propuestas y cuando el caso lo requiera utilizando el lenguaje de programación ISETLW sobre el concepto de función. Las actividades están diseñadas con la

finalidad de inducir a los estudiantes a efectuar las construcciones mentales específicas de acciones, proceso, objeto y el nivel de esquema.

- ii. **Discusiones en Clases.** En esta etapa los estudiantes trabajarán la parte teórica en grupos de tres, bajo el principio de cooperación y la dirección del profesor que, en algún momento, deberá de puntualizar cuando sea necesario, además de resumir los temas puntuales con el fin de llegar al consenso de conclusiones sobre el concepto de función.
- iii. **Ejercicios Complementarios.** El estudiante podrá desarrollar de manera individual o grupal los ejercicios complementarios dejados como tarea, tanto los aspectos teóricos como los de taller en el laboratorio de cómputo. El propósito de los ejercicios es reforzar las ideas que tienen construido y aprendido en matemática por los estudiantes acerca de situaciones.

### Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados

- i. Se tiene el análisis respectivo de Yiersey sobre la situación 1

$$S_{01}: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2$$

quien considera que  $f(x)$  y  $g(x)$  son iguales, cuando realmente no son iguales. Desde la teoría APOE significa que el estudiante tiene una construcción mental de *prefunción*. Es decir, que el estudiante no tiene casi nada de conocimiento acerca del concepto de función, por lo que no identifica la discontinuidad de la función.

Situación 1

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} \quad \left. \begin{array}{l} y(x) = x+2 \\ x+2=0 \\ x=-2 \end{array} \right\}$$

$$f(x) = (x+2)$$

$$x+2=0$$

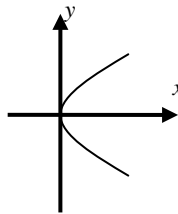
$$x=-2$$

Son iguales.

Figura 1.

ii. El estudiante William en la situación 2

S<sub>02</sub>:



afirma que no es una función, porque indica que un valor  $x$  que pertenece al dominio tiene dos imágenes  $y$  y  $y_1$ . En este caso el estudiante, para la situación, tiene una construcción mental *acción* porque conoce la definición de función de variable real; sin embargo el estudiante no va más allá de dicha definición.

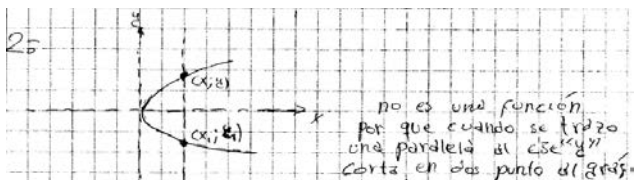


Figura 2

iii. El estudiante Fredy en la situación 10

$$S_{10}: f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 > 0. \\ 0, & \text{si } x^2 - 2x + 1 = 0 \\ -1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 < 0 \end{cases}$$

considera que no es una función, aduciendo que en el dominio la función tiene agujeros, es decir que la intersección de los intervalos es vacío. En este caso el estudiante tiene una prefunción con respecto al contexto real del dominio.

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 0, & \text{si } x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -1, & \text{si } x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^2 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$

Tampoco es una función en vista de que  
 $x > 1 \cap x = 1 \cap x < 1 = \emptyset$

Figura 3.

iv. En la situación 12,  $S_{12}$ : “REMDTJKFMAWO” el estudiante Miguel tiene una idea de función de variable real y relaciona ésta que para que sea una función necesariamente tiene que estar en un plano o estar en el espacio.

120 - no es una función. Para que sea función debe estar en el plano o el espacio.

Figura 4

Para la situación 12, el estudiante Edison también trata de relacionar con el orden alfabético del abecedario, sin embargo no tiene no noción de acción, porque

inicialmente debería de haber evaluado por lo menos el orden de las letras.

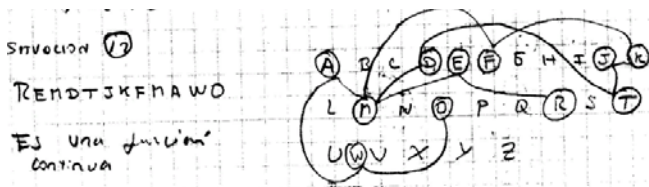


Figura 5

v. El estudiante Edison a la situación 16

$$S_{16}: \{ 2^n > n^2 + 3n : n \text{ en } [1, 2, 3, \dots, 20] \}$$

trata de evaluar en algunos valores de  $n$ , en esta situación ha intentado y no logró relacionar dicho resultado para expresar cual es el dominio y cual es el rango. El estudiante se encuentra en la construcción mental de acción.

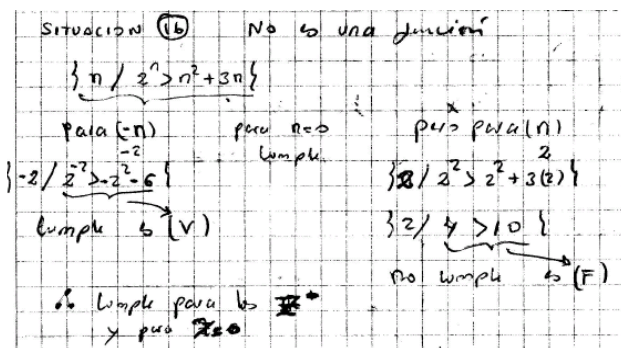


Figura 6

## Referencias

Gerd Unterstenhöfer. (2001). Revista Calidad y Excelencia. Lima, Perú. pp. 16.

Orellana Manrique, Oswaldo. Revista Pedagógico Cultural Palabra de Maestro, Lima 2002; 11(34): 17.

Orellana Manrique, Oswaldo. (2002). Revista Pedagógico Cultural Palabra de Maestro, Lima. 11(34): 22.

Valdez Coiro, Eréndira. (2000). Rendimiento escolar y actitudes hacia las matemáticas. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.

André Antibi. (2005). La constante macabra o Cómo se desalienta a generaciones de alumnos. Perú: Fondo Editorial PUCP Lima.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2000). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. II, 1-32.

Daniel Breindenbach, E. Dubinsky, Julie Hawks y Devilyna Nichols. (1992). "Development of the conception of function" *Educational Studies in Mathematics*. 23.. pp. 249.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2004). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education*. pp.5.

Youschkevitch, AP. (1976). The concept or function up to the middle of the 19th century (traducción: Dra Rosa María Farfan). *Srie: Antologías I* Mexico: Cinvestav IPN (Programa Editorial, Area de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa). pp. 99 – 145.

Carl B. Boyer. (1986). Historia de la Matemática. Alianza editorial S.A. Madrid España.

Daniel Breindenbach, E. Dubinsky, Julie Hawks y Devilyna Nichols. (1992). "Development of the conception of function" Educational Studies in Mathematics. 23. pp. 247 – 285.

Acylina Coelho Costa. (2004). Conhecimentos de Estudantes Universitarios sobre el Concepto de Função Matemática. Tesis de Maestría publicado. PUC/SP . Sao Paolo. Brasil.

Ignacio Domínguez García. (2003). La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría. México.

William E. Fenton, Ed Dubinsky. (19996). Introduction to Discrete Mathematics with ISETL. USA: Springer – Verlag New York.



# **Funciones reales: una manera de explorar la conversión entre registros, trabajando en la modalidad de aprendizaje colaborativo**

José Chiroque Baldera  
Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

## **Resumen**

Los estudiantes que ingresan a la universidad y que siguen las carreras de humanidades siempre reciben, como parte de su formación, curso o cursos de Matemáticas.

La forma como los programas de estudio y los libros de texto, abordan los temas de matemáticas es, en general, el “método tradicional”. Con este método se exponen en primer lugar las definiciones y propiedades generales para luego ir a la resolución de problemas como aplicaciones de los distintos conceptos mediante un procedimiento algorítmico y posteriormente se continúa cada vez con ejercicios más complejos.

Pensamos que la enseñanza de las matemáticas con el “método tradicional” presenta un problema en la preparación de mejores estudiantes universitarios y que la aplicación de éstas, a las distintas ramas de la ciencia, no se hace de manera creativa, es decir no se promueve una enseñanza de la matemática acorde con el campo en el cual el estudiante busca desempeñarse.

Las tareas individualizadas de resolución de problemas aplicando algoritmos no despiertan el interés del estudiante y hacen que éste piense que las matemáticas no les son útiles en el campo para el cual se prepara.

En ese sentido, en la Facultad de Estudios Generales Letras de la PUCP se implementó un curso de matemáticas donde una de las variantes, respecto a los cursos tradicionales, es la

metodología empleada pues este curso se desarrolló bajo la modalidad del aprendizaje colaborativo, que es la metodología en la cual una o más personas aprenden e intentan aprender algo en forma conjunta Dillenbourg, 1999.

Es así, que realizamos un estudio exploratorio que considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular el concepto de función real, que ha sido estudiado bajo la modalidad del aprendizaje colaborativo.

El análisis realizado evidencia no sólo la importancia de presentar esta noción mediante distintas representaciones sino el papel que juegan los distintos registros semióticos para reconocer este objeto en diversas situaciones problemáticas.

### **Objetivos de la Investigación**

- Analizar si los estudiantes identifican una función real a partir de distintos registros de representación semiótica, después de un aprendizaje colaborativo.
- Analizar si los estudiantes identifican funciones elementales (función lineal, cuadrática y exponencial: propiedades) y algunas de sus características, a partir de los distintos registros de representación semiótica.
- Analizar la comprensión del concepto de función real y funciones elementales (función lineal, cuadrática y exponencial: propiedades), a través de la articulación entre diversos registros de representación semiótica.

### **Marco teórico**

Duval, R. (1998) sobre registros de representación semiótica, indica que la conversión es una actividad cognitiva necesaria para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos.

Este enfoque cognitivo ha sido desarrollado por Raymond Duval y se apoya en la noción semiótica de registro.

En nuestro estudio se consideraron registros gráfico, analítico (algebraico), numérico y tabular con los estudiantes del primer año de humanidades, respecto a nociones relativas de funciones reales y el sentido que estas nociones cobran para ellos.

En particular, se favorecerá una aprehensión perceptiva de las gráficas de las funciones, aprehensión operatoria y conceptual. Del mismo modo, se privilegiará la actividad del estudiante como medio para promover su aprendizaje; puesto que este es un trabajo exploratorio en el que se analiza la comprensión del concepto de función real de un conjunto de actividades que fueron desarrolladas colaborativamente.

### **Metodología**

La metodología que se utiliza en esta investigación es el estudio de caso.

El trabajo se hizo con un grupo de 55 estudiantes de humanidades, que cursan el primer año de estudio en la Pontificia Universidad Católica del Perú, al finalizar el ciclo académico 2007 – 2.

### **Resultados**

En general, los estudiantes mostraron una comprensión conceptual del objeto bajo estudio ya que lograron una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones.

En estas condiciones los estudiantes pueden utilizar con éxito la función real y las funciones elementales (función lineal, cuadrática y exponencial: propiedades) como herramienta para resolver problemas relacionados a su vida cotidiana y profesional.

Así por ejemplo, en las respuestas ofrecidas sobre gráficos de funciones reales, hemos podido determinar que los alumnos identifican con mayor frecuencia los registros gráficos, debido, posiblemente, a que resultan más intuitivos; con lo que podemos inferir que se produce una comprensión del concepto a un nivel que podríamos llamar “intuitivo”, a pesar que siempre logran establecer las coordinaciones correctas

entre los diversos tipos de registros, se podría afirmar que se ha logrado una comprensión a nivel de abstracción.

También se ha podido determinar que los alumnos identifican con mayor frecuencia los registros: gráfico y algebraico.

Como consecuencia de estos resultados, consideramos que para diseñar secuencias de enseñanza con la metodología aprendizaje colaborativo, sobre el concepto de función es importante que se tengan en cuenta los distintos medios de representación y expresión involucrados así como las conversiones entre los distintos registros de representación.

### **Referencias**

Duval, R (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación entre dos registros, Antología de educación matemática, Sección Matemática educativa del Cincestav-IPN.

Duval, R (1993) Semiosis et Noesis. En Lectura en Didáctica de las Matemática: Escuela Francesa. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV –IPN.

Godino, J & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques.

Hitt, E (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R (1998): Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., México.

Hitt, F (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior.

Ruiz, L (1998) La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones.

Dillenbourg, P. (1999) What do you mean by collaborative learning?. In P. Dillenbourg (Ed) Collaborative-learning: Cognitive and Computational Approaches. Oxford: Elsevier

De la Rosa, A (2000): El concepto de función en secundaria: Conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario, Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN, México.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España.

Vigotsky, L. (1996). Pensamiento y lenguaje. México: Ediciones Quinto Sol.

Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Medellín, Colombia: Universidad del Valle.

Collazos, C (2003) Una metodología para el apoyo computacional de la evaluación y monitoreo en ambientes de aprendizaje colaborativo. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Escuela de Postgrado. Universidad de Chile.

Ibarra, S & Fernández, L (2007) La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente. Universidad de Sonora. México.

Malaspina, U (2005) Problemas: Oportunidades de aprendizaje para alumnos y profesores. Coloquios sobre matemática educativa 2005. Departamento de ciencias Pontificia Universidad Católica del Perú

Chevallard, Y (1991) Dimension instrumentale, dimension Sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Peralta, J (2003) Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: El caso de la función lineal. Instituto Tecnológico de Sonora. México.

García, J (2005) La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Janvier, C. (ed.) (1987), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.

Stewart, J. (2001) Precálculo. Thomson. México D. F.

Zañartu, L (2002). Educar a jóvenes marginales con ordenadores en red. Comunicar, 18/ Disponible en: [www.2uhu.es/comunicar/revista](http://www.2uhu.es/comunicar/revista)

# Un acercamiento socioepistemológico a los problemas de optimización en el pre cálculo

David Esteban Espinoza  
I.E. San Luis 1128

## Introducción

La optimización es una práctica cotidiana. En el entorno cotidiano se presentan problemas como minimizar los gastos para finalizar el mes sin deudas, empresas que tienen que optimizar materias primas minimizando costos en su producción para obtener el máximo beneficio, problemas de este tipo surgen en todas las áreas de negocios, de ciencias físicas, químicas y biológicas, de ingeniería, arquitectura, economía y administración.

Este tipo de problemas en las escuelas secundarias se trata desde el punto de vista de la Programación Lineal y en el nivel superior (primeros años de la universidad) como una aplicación del Cálculo Diferencial (Máximos y Mínimos).

Una de las dificultades de la enseñanza de la Matemática radica en que se entiende que los objetos y procesos matemáticos como acabados, en el que ya no hay nada por hacer, esto se agudiza si se promueve una matemática estática en el que las definiciones y ejemplos son sujetos a procesos de repetición o memorización.

El tratamiento de los problemas de optimización usando Programación Lineal en la secundaria crea obstáculos en los alumnos por la cantidad de variables que se utilizan; el problema persiste en el nivel superior al resolver estos problemas por medio de las técnicas del cálculo diferencial donde el algoritmo empleado hace que el problema se vea rutinario. En ambos casos se deja la impresión al alumno y

también a los profesores, que su tratamiento es exclusivo a través de la Programación Lineal o del Cálculo Diferencial.

Investigaciones recientes en Matemática Educativa dan cuenta de marcos teóricos que, básicamente, recomiendan tratar que estos conceptos y ejemplos matemáticos desde un enfoque centrado en las prácticas sociales más que en los conceptos. En particular, nos referimos a la Socioepistemología como marco de referencia.

### **Objetivos de la investigación**

- Identificar problemas de optimización entre los siglos XX A.C. y VII D.C.
- Identificar qué prácticas sociales estaban asociadas a los problemas de optimización entre los siglos XX A.C. y VII D.C.
- Describir los fenómenos didácticos relacionados a los problemas de optimización en la escuela secundaria
- Analizar de qué manera se podría aportar al discurso matemático escolar luego de identificar las prácticas sociales asociadas a los problemas de optimización entre los siglos XX A.C. y VII D.C.

### **Marco teórico**

La construcción del conocimiento matemático en la visión socioepistemológica se explica en el siguiente párrafo:

*“Para explicar la construcción del conocimiento matemático desde la visión Socioepistemológica se propone a las prácticas sociales como metáfora en la explicación de construcción del conocimiento matemático. Ese énfasis en el aspecto social del saber reformula las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica, pues se reconoce que el conocimiento se construye y reconstruye en el contexto mismo de la actividad que realiza el individuo al hacer matemáticas (Arrieta, 2003).”*

## **Fenómenos didácticos relacionados a los problemas de optimización**

- Los problemas de optimización en el programa escolar.
- Los problemas de optimización en los textos escolares.

## **Metodología**

La investigación Socioepistemológica debe reconocer y estudiar científicamente los mecanismos sociales de construcción del saber matemático. En consecuencia estudiamos la evolución de los problemas de optimización en su contexto de origen esto nos permitirá encontrar las circunstancias, los escenarios y los medios que posibilitaron la emergencia de dicho conocimiento, analizar las prácticas sociales asociadas. Luego analizamos los fenómenos didácticos relacionados a los problemas de optimización para ello revisamos tanto el programa escolar como los textos escolares de secundaria. Finalmente se analiza de qué manera los problemas de optimización encontrados y las prácticas sociales asociadas pueden incidir en el discurso matemático escolar.

Los pasos a seguir serán los siguientes:

- Se estudiarán los problemas de optimización entre los siglos XX A.C. y VI D.C.
- Se analizará el discurso matemático escolar y los aportes que se pueden hacer desde la socioepistemología.

## **Referencias**

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en marco de prácticas sociales. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática. Alianza Editorial, S.A. Madrid.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Volumen 13, 54-62). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics educations a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53(3), 255-270.

Cantoral & Farfán (2003). Desarrollo conceptual del cálculo. México: Thomson.

Cantoral, R. et al (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas. México.

Castañeda (2004). Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Cen & Cordero (2006). El uso de las gráficas de los alumnos en el Bachillerato. *Acta Latinoamericana de Educación Matemática*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Casey, J. (1885). *The first book of the Elements of Euclid*, Longmans, Green and Co.

Courant, R & Stewart (2002). *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica. México.

Collete, J. (1986). *Historia de las matemáticas I. Siglo XXI* Editores S.A. México.

Covian, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya. Tesis de Maestría. Cinvestav – IPN, México, DF, México.

De Lorenzo, J. (1977). La matemática y el problema de su historia. Editorial Tecnos, S. A. Madrid.

Doroteo P. & Gálvez P. (2005). Matemática – Quinto de Secundaria.

Douady, R. (1984). Dialectique outil-objet et jeux de cadres: une réalisation dans tout le cursus primaire. Unpublished Doctoral Dissertation, Université Paris 7.

Dolores et al (2006). Matemática Educativa – Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización del aula. Ediciones Díaz de Santos. México.

Gonzáles, Mariano (2006). Solución de problemas de optimización usando Geometría Dinámica. Trabajo presentado en el III Congreso Iberoamericano de Cabri IBEROCABRI – 2006, Junio, Bogotá.

Gonzáles, M. & Sánchez, R. (2005). Situaciones Didácticas con Geometría Dinámica. Reporte de Investigación. Coloquios Sobre Matemática Educativa 2005. Pontificia Universidad Católica del Perú, 18(2), 67 – 85.

Hersh, Reuben, Zubieta Badillo, Gonzalo. (2004). Probar es convencer y explicar. Memorias de la IV Jornada Sobre la Enseñanza de Geometría.

Heat, Thomas (1956). The Thirteen books of Euclid Elements. Ed. Dover

Heat, Thomas (1921). A History of Greek Mathematics. Oxford at the Clarendon Press

Lezama, A. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Malaspina. Uldarico (2006, Marzo) El rincón de los problemas. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 5(1), 117-120. Extraído el 31 de Mayo de 2007 desde [http://www.fisem.org/descargas/5/Union\\_005\\_011.pdf](http://www.fisem.org/descargas/5/Union_005_011.pdf)

Montiel, Gisela (2005). Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Morris, K (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial, S.A. Madrid.

Pelletier, J. (1958) Etapas de la matemática. Editorial Losada, S.A. Buenos Aires.

Ríos, Martín (2004). Problemas de optimización a través de un software de geometría dinámica como una experiencia previa al cálculo. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Ríbnikov, K. (1974). Historia de las matemáticas. Editorial Mir. Moscú.

Rosado, M. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

Schulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching a contemporary perspective. En M. C. Wittrock (Ed) Handbook of research on teaching. London: Macmillan. [Traducción castellana en: La investigación de la enseñanza, I, Paidós – MEC, 1989].

Schurmann, P. (1945). Historia de la física. Editorial NOVA. Buenos Aires.

Smogorzhevski, A.S. (1978). Acerca de la geometría de Lovachevski. Editorial MIR. Moscú.

Tikhomirov, V. (1990) Stories about Maxima and Minima, American Mathematical Society

Vera F. (1946). Breve historia de la matemática. Editorial Losada S.A. Buenos Aires.

# **Noción de distribución Estadística en una muestra de estudiantes secundarios en el marco de la estructura curricular**

Wilfredo Huayanca Ramos  
I.S.P. San Juan Bosco

En un mundo tan cambiante como en el que vivimos nos vemos en la necesidad de adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados”. Ligados muchas veces por las telecomunicaciones, como por ejemplo la economía y la política

La educación primaria y secundaria incluyen contenidos estadísticos, aunque en la realidad estos contenidos no se enseñan con la profundidad que merecen. En el mejor de los casos, la enseñanza de la Estadística es un pretexto para aplicar otros temas matemáticos y ejercitar la capacidad de cálculo o representación gráfica, olvidando el trabajo con datos reales y los aspectos de razonamiento estadístico. Dentro de las aulas, la situación no es la adecuada ya que los profesores proponen estos temas para ser enseñados en los últimos programas y meses del año sin darle la importancia debida y a veces sin llegar a ser tratada.

Aunque la Estadística es una materia obligatoria en la mayor parte de los estudios básicos propuestos por el Ministerio de Educación o de formación profesional, es una asignatura considerada difícil y poco interesante tanto por los docentes como de los alumnos, quienes presentan unas actitudes negativas que dificultan su aprendizaje. Parte de esta situación puede deberse a la falta de preparación estadística previa de los docentes que llegan a impartir una inadecuada enseñanza de la Estadística en la educación.

Una forma que ayude a comprender este proceso a los estudiantes es “la forma experimental” que proporciona una experiencia estocástica y una comprensión correcta de un concepto, que lamentablemente no suele suceder a la hora de transmitirse los conceptos. La educación secundaria muestra como resultado a través de ¿cómo los estudiantes responden a situaciones planteadas en diversos problemas?, donde intervienen la ejecución de estas ideas, referente a una situación de su vida habitual. Si bien es cierto la intencionalidad de la curricula se busca un aprendizaje significativo con una utilidad también significativa en los estudiantes, Es por ello que realizamos este estudio que muestre la forma en que se viene cumpliendo la finalidad de la curricula en nuestro país sobre las nociones en estadística en los estudiantes de secundaria.

Por otro lado, el número de investigaciones sobre la Didáctica de la Estadística es muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas. Por ello, no se conocen aun cuales son las principales dificultades de los alumnos en muchos conceptos importantes. Sería también preciso experimentar y evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza específica de la estadística, a la que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de las matemáticas. Las investigaciones existentes no son muy conocidas por los profesores, ya que falta todavía mucha labor de difusión, especialmente de trabajos realizados fuera de nuestro país. Por ello presentamos este trabajo para contribuir a otras investigaciones

### **Objetivos de la investigación**

- Analizar la componente de Probabilidad de la estructura curricular básica en la Educación secundaria.
- Revisar los libros de textos del nivel secundario
- Adaptar el instrumento ad-hoc propuesto por Bazán (1996) para la evaluación de la noción de distribución estadística
- Reconocer la noción de distribución estadística en los estudiantes a través de la observación por medio de un

instrumento ad hoc en una muestra de escolares secundarios

- Contrastar los resultados de este estudio con los resultados encontrados por Cohen (1974) y Bazán (1996) en los estudiantes de secundaria.

### **Construcción del conocimiento matemático en la visión constructivista**

El enfoque constructivista en el aprendizaje y en el currículo en diversos países y en el nuestro. Plantea que los currículos son o deben ser constructivistas.

Es por ello que analizaremos la componente de probabilidad de la curricula de la educación básica. Este Diseño Curricular Nacional (DCN) constituye un documento normativo y de orientación válido para todo el país, que sintetiza las intenciones educativas y resume los aprendizajes previstos. Da unidad y atiende al mismo tiempo a la diversidad de los alumnos.

El DCN está sustentado sobre la base de fundamentos que explicitan el qué, el para qué y cómo enseñar y aprender.

En este sentido, el docente necesita conocer los estilos y ritmos de aprendizaje, las experiencias y conocimientos previos del estudiante, cuáles son sus modos de pensamiento, su desarrollo afectivo y su concepción del mundo, entre otros aspectos, que le permitan seleccionar las estrategias más adecuadas para que los estudiantes aprendan. En todas las materias que se enseñan las instituciones debe cumplirse tales intenciones pero lo cierto es que no se cumple en los contenidos estadísticos.

### **Metodología**

El alumno construye estructuras a través de la interacción con su medio y los procesos de aprendizaje, es decir de las formas de organizar la información, las cuales facilitarán mucho el aprendizaje futuro y los profesores deben hacer todo lo posible para estimular el desarrollo de estas estructuras. Por ello se aplico una experiencia probabilística con los

estudiantes que permitiera estructurar las nociones sobre la probabilidad.

Se mostrarán resultados de esa experiencia.

Se contrastarán los resultados con la interpretación de la finalidad del Currículo.

## Referencias

Bazán, J (1996) “Noción de Distribución Estadística en una muestra de escolares. Una aproximación”. Más Luz. Revista de Psicología y Pedagogía. Colegio D.F. Sarmiento. En impresión.

Batanero, C. (1990) ¿Hacia donde va la educación estadística? *Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*

Batanero, C. (2005) “*significados de la Probabilidad en la educación secundaria*”, *Relime*, vol. 8, Núm, 3, noviembre 2005, pp, 247, 263

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz, (comps) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Editorial Paidós, pp. 65-94.

Coombs, C; Dawes, R, y Tversky, A. (1988) *Introducción a la Psicología matemática*. Madrid: alianza editorial.

Cohen, J (1974) “*probabilidad Subjetiva*” en *matemáticas en las ciencias del comportamiento*. Madrid Alianza editorial.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Edit. Aique. Argentina.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 18, No. 1, pp. 7- 34.

Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11 -16*. Sloug: Foulsham Educational

Inhelder, b. y Piaget, j. de la logique de l=enfant a la logique de l=adolescent. essai sur la construction des structures operatoires formelles. paris: puf, 1955. trad. cast. de m.t. cevasco: de la lógica del niño a la lógica del adolescente. buenos aires: paidos, 1972

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Dr Jerome Kirk, Marc L. Miller Reliability and Validity in Qualitative Research.

Oerter, R (1975) psicología del pensamiento. Editorial Herder. Barcelona, España

Ortiz, J. J. (2002). La Probabilidad en los Libros de Texto. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN 84-699-6841-6. Resumen actualizado de la Tesis Doctoral: Ortiz de Haro, J. J. (1999). Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato.

Pozo, j.i. teorías y reglas de inferencia en la solución de problemas causales. tesis doctoral no publicada. uníversidad autónoma de madrid, 1985

Taylor, S. & Bogdan, R. (1986). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona: Paidós.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of fuction. En Ed Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*, pp. 25-58. Washington, Dc: MAA.

Serrano, L. (1996). *Significados personales e institucionales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Ph. D. University of Granada.

# Propuesta didáctica para las funciones sinusoidales en el contexto de los circuitos eléctricos

Juan Accostupa Huamán  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## Resumen

En las carreras de Ingeniería, los temas de matemáticas son presentados a los alumnos con la formalidad y el contexto de la misma matemática. La falta de vinculación de estos temas matemáticos con el contexto de la carrera provoca en los alumnos desinterés y falta de motivación. Al no percibir la aplicación de sus cursos de matemáticas, estos se convierten en cursos que sólo se tienen que aprobar; de esta manera se condicionan sus aprendizajes, pues no se logran aprendizajes significativos, sino memorísticos; repercutiendo en su rendimiento académico.

Dentro de la problemática descrita, la investigación toma de manera particular el modelo matemático representado por la función  $f(x) = A + B\text{sen}(C x + D)$  con  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  constantes y la problemática se sitúa en los primeros ciclos de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Se ha podido percibir que los alumnos tienen dificultades en la representación gráfica de esta función. El problema radica en la interpretación de las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  cuando estas cambian. Por lo general los alumnos tienden a memorizar los cambios que cada una de estas constantes en forma individual, provocan la función  $g(x) = \text{sen } x$ . Pero cuando estas constantes afectan a la función  $g(x)$  en forma simultánea y se les pide la graficación, es cuando ellos se confunden. Es decir, no se logra un aprendizaje significativo con los métodos tradicionales de enseñanza de la matemática.

Los alumnos no aprenden esta función de manera significativa con los métodos tradicionales de la enseñanza de la Matemática, por lo que se hace necesario buscar alternativas didácticas. Es así que la investigación presenta una propuesta didáctica de una matemática contextualizada con la finalidad de mejorar los aprendizajes. Esta propuesta sigue una metodología de contextualización, mediante 9 pasos, según la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias*.

La matemática contextualizada ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento de una matemática con significado; refuerza el desarrollo de habilidades matemáticas, mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses de los alumnos (Camarena, 1999).

Cabe mencionar que, la función sinusoidal tiene una enorme importancia dentro del contexto de la carrera de Ingeniería Electrónica., tal como nos detalla Dorf Richard & Svoboda James (2001, p. 493)<sup>1</sup>:

*"En la ingeniería eléctrica, las funciones sinusoidales tienen gran importancia, puesto que las señales de fuente de poder y de comunicación se transmiten generalmente en forma de sinusoides o sinusoides modificadas".*

### **Marco teórico**

Esta propuesta didáctica sigue una metodología de contextualización, según la *teoría de la Matemática en el contexto de las ciencias*. Esta teoría fue iniciada por el doctor Jesús Riestra Velásquez en 1982, en el Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN) y desarrollado en la Escuela Superior de Ingeniería

---

<sup>1</sup> Dorf Richard & Svoboda James(2001)*Introducción al análisis y diseño*(3rd ed.)México, D.F.: alfaomega.

Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional (ESIME-IPN) en México. Desde 1984 la Dra. Patricia Camarena Gallardo coordina dicha línea de investigación.

## **Metodología**

La investigación se desarrolló íntegramente en el ámbito de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), la cual es de tipo proyectivo dado que implica una propuesta de cambio. Se siguió los siguientes pasos:

1. Se justificó el tratamiento del tema teniendo en cuenta el marco teórico definido.
2. Se determinaron los cursos de la carrera de Ingeniería electrónica para su análisis según el siguiente criterio:
  - Los cursos del área de matemáticas y física, que hacen uso del modelo matemático de la investigación
  - Los cursos de especialidad, del área de circuitos eléctricos, que hacen uso del modelo matemático de la investigación.Para ello se analizó información del plan de estudios y programas curriculares.
3. Se determinó las habilidades, según el perfil del egresado de la carrera de Ingeniería Electrónica de la PUCP, a las cuales la propuesta didáctica aportará para su desarrollo en el estudiante.
4. Se analizó el tratamiento que se le dio al modelo en estudio, en las asignaturas determinadas por el ítem 2. Para ello, se consideró los programas curriculares de dichos cursos y textos recomendados por la bibliografía respectiva.
5. Se realizó la vinculación de las funciones sinusoidales con el área de la ingeniería electrónica mediante la metodología de la *matemática en el contexto* (Camarena,2004a):

6. Se diseñaran de actividades de aprendizaje según la vinculación mencionada en el ítem anterior, en el marco de la teoría de situaciones didácticas.
7. Se implementaran las actividades propuestas y evaluación de los conocimientos adquiridos, para lo cual se trabajará con un grupo de alumnos recién ingresados a las carreras de Ingeniería de la Universidad Católica.
8. Se determinaron los conocimientos previos que deberá tener el alumno, para lograr un aprendizaje satisfactorio del tema.
9. Se plantearán nuevos problemas de investigación basados en los resultados obtenidos.
10. Se presentarán organizadamente los resultados encontrados con su adecuado fundamento.

### **Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.**

Se menciona brevemente cómo se desarrolló el primer paso de la contextualización.

La estrategia didáctica de las Matemáticas en Contexto, con sus nueve pasos, en donde el primer paso es “*análisis de textos de las demás asignaturas que cursa el estudiante*”, busca problemas de la vida cotidiana o de la futura actividad del egresado.

Con fundamento en este paso se procederá a analizar los principales textos de consulta recomendados en los cursos de Circuitos Eléctricos 1 y 2 para los alumnos de la carrera de Ingeniería Electrónica según el plan de estudios de la universidad donde se inicia esta investigación.

Para el análisis de textos se tomará cuenta las siguientes preguntas orientadoras:

- ✓ ¿En que capítulos se encuentran las funciones sinusoidales dentro del texto analizado?
- ✓ ¿Qué hace el autor con las funciones sinusoidales de la forma  $f(t) = A + B\sin(Ct + D)$  ?

- ✓ ¿Cómo relaciona las gráficas de las funciones sinusoidales con el contexto de los circuitos eléctricos?

Además, de presentará conclusiones o interpretaciones al texto como parte del análisis a modo de *observaciones* y se responderá a la pregunta:

- ✓ ¿Qué es lo que debe saber el alumno para comprender lo que el autor le propone?

Luego de análisis previo se concluyó que los libros de la especialidad ha analizar son:

- Circuitos Eléctricos de James W. Nilsson
- Circuitos de corriente alterna de Ketchner, Russel & Corcorán, George
- Análisis introductorio de circuitos de James W. Boylestad y James Svoboda

Y se procedió a su análisis. Más detalles en la tesis de investigación

## Referencias

Camarena, G. P.(2000)reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la Ingeniería*. ESIME-IPN, México D.F.

Camarena G. P.(2001). *Las funciones generalizadas en Ingeniería. Construcción de una alternativa didáctica*. Premio ANUIS 2000. Biblioteca de la educación superior, serie investigaciones.

Camarena G. P.(2001a). *Las funciones generalizadas en Ingeniería. Construcción de una alternativa didáctica* (fracción del artículo correspondiente a la tesis). "Premio a la Mejor Tesis de Doctorado en Contribución a la Educación Superior", Colección: Biblioteca de la Educación Superior, Serie: Investigaciones, Editorial ANUIS, México.

Camarena G. & Muro A.(2002). Revista Científica, The Mexican Journal of Electromechanical Engineering: La serie

de Fourier en el contexto de proceso de la transferencia de masa, Vol. 6, Num 4, pp. 159-164. México.

Camarena, G. P.(2003). Memorias de la XI Conferencia Interamericana de Educación Matemática:*La matemática en el contexto de las ciencia :fase didáctica*. Blumenau, Brasil.

Camarena, G. P.(2003a). Memorias de la XI Conferencia Interamericana de Educación Matemática: *Desafíos para el siglo XXI en la enseñanza de la matemática universitaria*. Blumenau, Brasil.

Camarena Patricia y Herrera Javier (2003b). Acta Latinoamericana, Vol. 16, Tomo 2, Pág. 571-578. Cuba.

Camarena, G. P.(2004). Acta latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 17, tomo I: "*La transferencia del conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales parciales*".

Camarena, G. P.(2004a). Memorias del 3° Congreso Internacional "Retos y expectativas de la universidad": *Desarrollo de competencias profesionales del futuro Ingeniero*. México

Pinet, R. (2005). Matemáticas en contexto. Entrevista con Patricia Camarena Gallardo. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 7 (2). Recuperado el 10 de octubre del 2006, de: <http://redie.uabc.mx/vol7no2/contenido-camarena.html>

# Manipulación simbólica de funciones B-splines con Mathematica versión 6.0

Andrés Iglesias Prieto  
Universidad de Cantabria

Robert Ipanaqué Chero  
Universidad Nacional de Piura

Yesenia Saavedra Navarro  
Universidad Alas Peruanas

## Resumen

Las curvas y superficies B-spline son las más comunes y más importantes entidades geométricas en muchos campos, como el diseño y la fabricación computarizada (CAD / CAM) y gráficos por ordenador. Sin embargo, hasta donde conocemos no hay sistema de cálculo simbólico especializado que incluya rutinas para tratar con Bsplines en forma simbólica hasta el momento. En el presente trabajo se describe un nuevo programa en Mathematica para calcular las funciones Bspline simbólicamente. Además, con este paquete, también es posible calcular las curvas Bsplines y Bsplines racionales simbólicamente. El rendimiento del código, junto con la descripción de los principales comandos, se examina utilizando algunos ejemplos ilustrativos.

## Definición de funciones Bspline.

Sea  $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+k}\}$  una sucesión no decreciente de números reales llamados *nodos*.  $\xi$  es llamado el *vector nodo*. La *i*-ésima función base B-spline  $N_{i,k}(t)$  de orden

$k$  (o equivalentemente, grado  $k - 1$ ) esta definida por las relaciones recursivas

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq t < x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k} - t}{x_{i+k} - x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t),$$

$$i = 1, \dots, n - (k - 1).$$

### Metodología

Se hace uso de la definición recursiva de Carl de Boor para funciones Bspline. En base a esta definición se implementa un algoritmo para obtener las expresiones simbólicas de las funciones Bspline y posteriormente de las curvas Bspline y Bspline racionales. Los códigos de los programas se implementan en el sistema de cálculo simbólico (SCS) Mathematica v6.0. Además la interpretación geométrica de las pruebas obtenidas se efectúa aprovechando la potencia gráfica del referido SCS.

*Un paquete en Mathematica para manipular simbólicamente las funciones Bspline.*

El paquete de comandos implementado se llama SymbolicBsplines y se inicializa mediante:

`<<SymbolicBsplines``

Este paquete incorpora el comando: `N`.

### Funciones Bspline

---

```

: □□Uniform| $, 3 |
: | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |

```

---

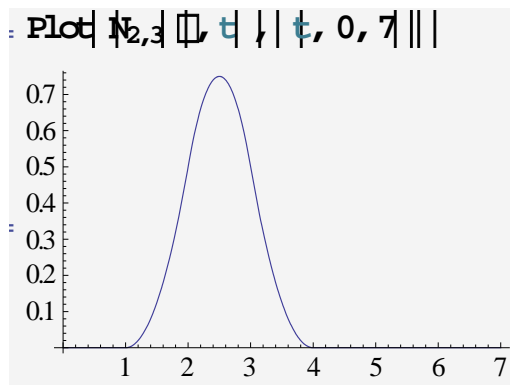
Definición de un vector nodo uniforme.

```

:= N_{2,3} [ t ]
[
  0
  1/2
  1/2
  1/2
  0
  0
  0
  0
]
[
  1 t
  1 t
  10 t^2 t^2
  4 t^2
]
[
  0 t^1
  1 t^2
  2 t^3
  3 t^4
  4 t^5
  5 t^6
  6 t^7
  True
]

```

Función B-spline de orden 3, simbólica.

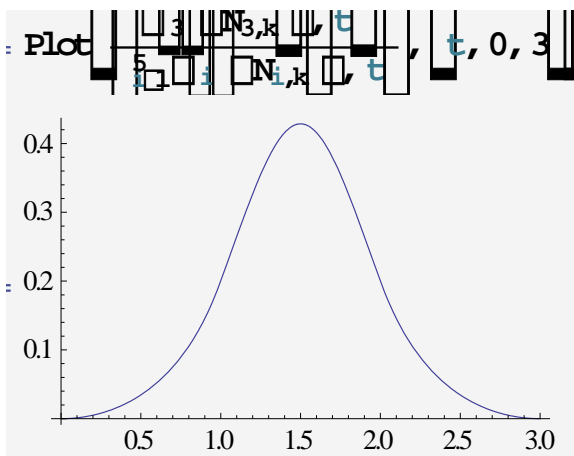


Gráfica de la función B-spline de orden 3.



$$\begin{aligned}
 & \frac{t^2}{81t^2} && 0 \leq t \leq 1 \\
 & \frac{36t^2t^2}{1718t^2t^2} && 1 \leq t \leq 2 \\
 & \frac{3t^2}{1918t^2t^2} && 2 \leq t \leq 3 \\
 & 0 && \text{True}
 \end{aligned}$$

Función B-spline racional simbólica.



Gráfica de la función B-spline racional.



y curvas B-spline racionales. Este paquete ha sido utilizado con éxito por nuestros alumnos durante el octavo semestre en el curso de introducción al diseño geométrico en el nivel universitario. Sin embargo, el paquete también se puede aplicar en los cursos de Postgrado.

### **Referencias**

Choi, B.K., Jerard, R.B. (1998). *Sculptured Surface Machining. Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Echevarría, G., Iglesias, A., Gálvez, A. (2002). Extending neural networks for B-spline surface reconstruction. *Lectures Notes in Computer Science*, 2330, 305-314

Iglesias, A., Echevarría, G., Gálvez, A. (2004). Functional networks for B-spline surface reconstruction. *Future Generation Computer Systems*, 20(8), 1337-1353

Maeder, R. (1991). *Programming in Mathematica*, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA.

Patrikalakis, N.M., Maekawa, T. (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer Verlag.

Piegl, L., Tiller, W. (1997). *The NURBS Book* (Second Edition). Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

Rogers, D.F. (2001). *An Introduction to NURBS. With Historical Perspective*. Morgan Kaufmann, San Francisco.

Wolfram, S. (1999). *The Mathematica Book*, Fourth Edition, Wolfram Media, Champaign, IL & Cambridge University Press, Cambridge.



# **Un estudio de los significados institucionales del objeto función en cuarto y quinto de secundaria de instituciones educativas estatales**

Jacqueline Huanqui Astocondor  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## **Resumen**

En la investigación se contempla la perspectiva epistemológica del objeto función, dentro del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de Godino; centrándose en el análisis de los significados institucionales (significados de referencia, pretendidos, implementados y evaluados) del objeto función en el Programa Curricular Nacional en la enseñanza escolar de cuarto y quinto grado de secundaria en las instituciones educativas estatales, analizando para el significado de referencia los textos de matemática para cada grado respectivo proporcionados por el Ministerio de Educación. Del análisis de los significados institucionales obtendremos configuraciones epistémicas, la cual nos brindara un panorama de la educación actual en nuestro país, haciendo algunos contrastes.

## **Justificación**

Los resultados de la IV Evaluación Nacional del rendimiento estudiantil 2004 de los estudiantes: solo el 2,9% de los estudiantes de quinto grado de secundaria pertenece al nivel suficiente, nivel considerado como el esperado para todos los estudiantes del grado. Lo preocupante de esta situación es que el resto de estudiantes (97,1%) muestra no haber desarrollado las capacidades matemáticas requeridas para terminar su escolaridad.

A fines del 2005 se puso en marcha un nuevo Diseño Curricular Nacional con el fin de mejorar la enseñanza y resolver algunas de las dificultades encontradas, entre los que figuraba el enfrentar problemas contextualizados.

Además se debe señalar la importancia de analizar los nuevos libros de texto distribuidos a fines del 2005, teniendo presente el Diseño Curricular Nacional en marcha, para generar el objeto función en los estudiantes de cuarto y quinto de secundaria, pues influyen en el aprendizaje del estudiante y además podremos conocer el contexto que emplea.

Y por ultimo, se tiene en cuenta la evaluación realizada a los profesores en nuestro país en el año 2007, la cual arrojó como resultado que alrededor del 70% de ellos en Lima y Callao deben recibir capacitación, para reforzar su preparación y así elevar la calidad de enseñanza.

### **Objetivos**

Identificar, describir y explicar los significados institucionales, del objeto función, implicados en el proceso de estudio en la enseñanza escolar de cuarto y quinto grado de secundaria, en las instituciones educativas estatales, construyendo la configuración epistémica de cada significado.

Establecer la relación de los significados institucionales del objeto función analizando la configuración epistémica de cada uno de ellos.

### **Marco teórico**

En diferentes trabajos, Godino y colaboradores han desarrollado un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) que considera a los objetos matemáticos (tanto los institucionales como los personales) como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas. De esta forma, se ofrece un punto de vista pragmático, semiótico y

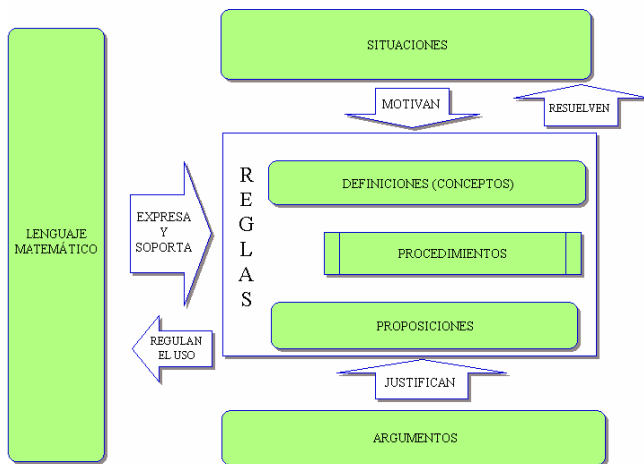
antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En una unidad didáctica (o en cada secuencia de actividades) se introduce un determinado tipo de lenguaje, se proponen una serie de situaciones problemas, se introducen determinados conceptos y también se argumentan determinadas propiedades y acciones (procedimientos, técnicas, etc.). Por tanto, las unidades didácticas (o secuencias de actividades) propuestas en los libros de texto (o en la práctica matemática) se pueden considerar como la presentación, organizada y estructurada, en un determinado periodo de tiempo de *lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, argumentos y acciones*.

En este trabajo se describirá los significados institucionales intervinientes en la práctica del objeto función, para la cual se utiliza diversos elementos del EOS señalando la siguiente tipología de significados institucionales en el cual se centra la investigación:

- **Referencial:** sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.
- **Pretendido:** sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- **Implementado:** en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- **Evaluable:** el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Además se obtienen **configuraciones epistémicas** para cada significado; entendiéndose por configuración epistémica a la organización de los seis tipos de objetos que se puede observar en cada unidad didáctica (o secuencias de actividades).



## Metodología

La metodología que se empleará en la presente investigación será bajo un enfoque:

**Cualitativo:** pues el objeto de investigación no es algo que se pueda observar y cuantificar.

**Interpretativa:** pues se tiene en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos.

**Ontosemiótica:** pues las prácticas discursivas y operativas de los sujetos investigados se analizan teniendo en cuenta la ontología de objetos intervinientes y de las relaciones semióticas que se establecen entre ellos.

**Descriptiva:** pues se ha generado informes narrativos a partir del análisis realizado.

La metodología desarrollada se aplica en el área de didáctica de las matemáticas para analizar el objeto función en la enseñanza en cuarto y quinto de secundaria de las

instituciones educativas estatales. La elaboración del sistema de códigos y relaciones se basa en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Como en toda investigación cualitativa, el proceso seguido no es lineal, sino que siguen diferentes etapas de diseño, análisis, y reformulación del diseño. Sin embargo, podemos diferenciar dos grandes etapas en el desarrollo del trabajo de campo, una vez completado el primer trabajo de revisión bibliográfica del tema objeto de estudio. En una primera fase se llevo a cabo un estudio cualitativo del contenido teórico, realizando un estudio empírico de los términos y expresiones del lenguaje específico que se presenta en los libros que constituyen la muestra para una parte de los conceptos que se incluyen en el estudio completo. Y en una segunda fase la construcción epistémica de los significados institucionales analizando los objetos matemáticos encontrados.

Posteriormente analizamos de acuerdo con el enfoque ontosemiótico la relación entre los significados pretendidos, de referencia, implementados y evaluados. En el enfoque ontosemiótico se considera que la idoneidad global de un proceso de estudio (planificado o bien efectivamente implementado).

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado aquellas unidades en las que se tratan temas relacionados con nuestro estudio. Una vez hecha la selección de capítulos, se ha realizado un análisis de contenido de los mismos, en el que se han llevado a cabo los siguientes pasos:

- En primer lugar, se ha realizado una lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones e intentando determinar los elementos de significado que contienen: Campos de problemas, contextos, definiciones, algoritmos de cálculo, propiedades, etc. Todo ello como guía para establecer el significado que, desde la institución escolar, se da a estos conceptos.

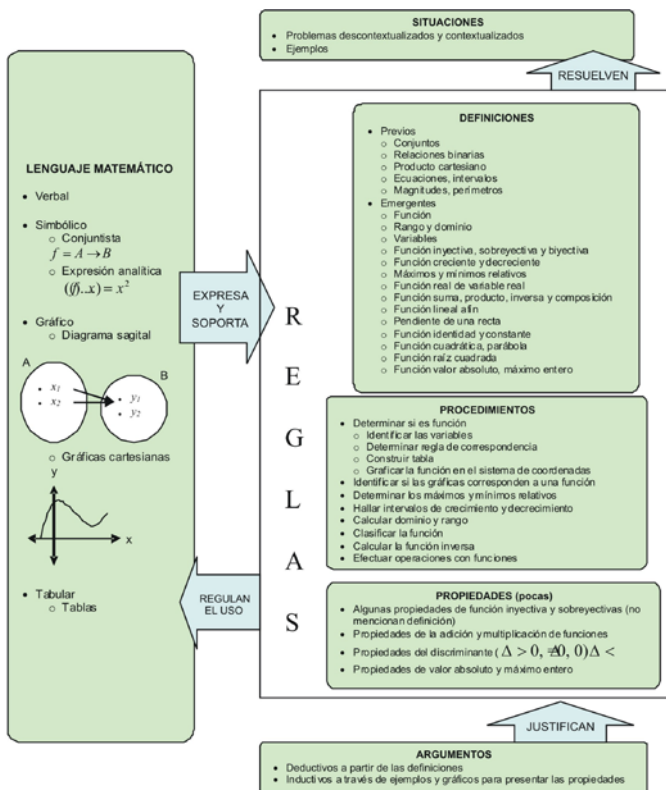
- Para determinar los elementos de significado hemos partido del análisis epistémico, que constituye nuestro significado institucional de referencia y hemos ido determinando cuáles de ellos aparecen en el libro de texto.
- Posteriormente, se ha elaborado la configuración epistémica que recogen los elementos de significado presentes en el texto. Esta presentación de la información nos facilitará el análisis y la extracción de conclusiones al respecto.

Del mismo modo analizaremos un cuaderno diario, donde se observa los significados pretendidos por un docente de una institución educativa estatal siguiendo el Programa Curricular Nacional; un cuaderno del alumno, observando los significados implementados en las sesiones de clase del profesor; y las evaluaciones, donde analizaremos los significados de evaluación que el profesor utilizó para el objeto función en un determinado período de tiempo. Al final se tendrán las configuraciones epistémicas de cada significado institucional.

### **Significados de referencia de cuarto grado de secundaria**

Para los significados de referencia se analizaron los textos proporcionados por el Ministerio de Educación, pues se reconoce a éste como texto guía por el docente y los alumnos, así mismo se tuvo en cuenta que ambas prácticas matemáticas se trabajaran con este material. En cuarto grado se trabajó con el texto Matemática 4, la unidad 1: Funciones y progresiones. Se reconoce también como un significado de referencia para el docente el Diseño Curricular Nacional, pero en ésta investigación no se evalúa dicho elemento.

La organización de la unidad de funciones propuesta en este libro Matemática 4 (titulada “Funciones y progresiones”) se puede representar mediante la siguiente *configuración epistémica*:



El concepto de función se define como un caso particular de correspondencia: “una función de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y”.

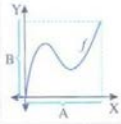
Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el **dominio** de la función. Para cada elemento  $x$  en X, el elemento correspondiente en Y es el **valor** de la función en  $x$ , o la **imagen** de  $x$ . El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

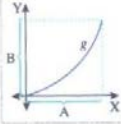
Figura 1

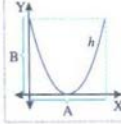
Se presenta de una manera descontextualizada y las situaciones problemas se presentan como ejemplos cuyo objetivo es facilitar al lector la comprensión de las definiciones (en un 10%) y también son presentadas después de ciertos contenidos (90%) como problemas descontextualizados con el objetivo de que los alumnos apliquen las definiciones dadas (ver los ejercicios de refuerzo de lo aprendido del texto escolar). Es decir, las situaciones problema sólo tienen la función de reforzar el concepto de función, en ningún caso sirven para que se construya dicho concepto a partir de ellas.

**Ejemplo 3**

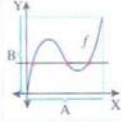
Clasificamos cada una de las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ , definidas de  $A$  en  $B$ , dadas por las siguientes representaciones gráficas.

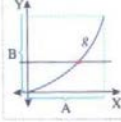


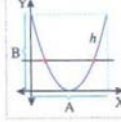




- Trazamos rectas paralelas al eje  $X$  y observamos si interseca en uno o más puntos a cada gráfica.







- $f$  no es inyectiva, pues la recta trazada por un  $y$  que pertenece a  $B$  tiene más de un punto de intersección con la gráfica.
- $f$  es sobreyectiva, pues cualquier recta horizontal trazada por un  $y$  que pertenece a  $B$ , interseca a la gráfica.
- $g$  es inyectiva, pues cualquier recta horizontal trazada por un  $y$  que pertenece a  $B$ , interseca en un solo punto a la gráfica.
- Se observa también que  $g$  es sobreyectiva.
- Al ser  $g$  inyectiva y sobreyectiva a la vez, se concluye que  $g$  es biyectiva.
- $h$  no es inyectiva, pues la recta trazada por un  $y$  que pertenece a  $B$  tiene más de un punto de intersección con la gráfica.
- $h$  es sobreyectiva, pues cualquier recta horizontal trazada por un  $y$  que pertenece a  $B$ , interseca a la gráfica.

Figura 2

El lenguaje utilizado es variado. Para la representación de funciones se utilizan enunciados, tablas, gráficas y expresiones simbólicas, según el concepto que se quiera presentar. Se contemplan las conversiones entre diferentes formas de representación y que por lo general es la conversión de expresión simbólica a gráfica.

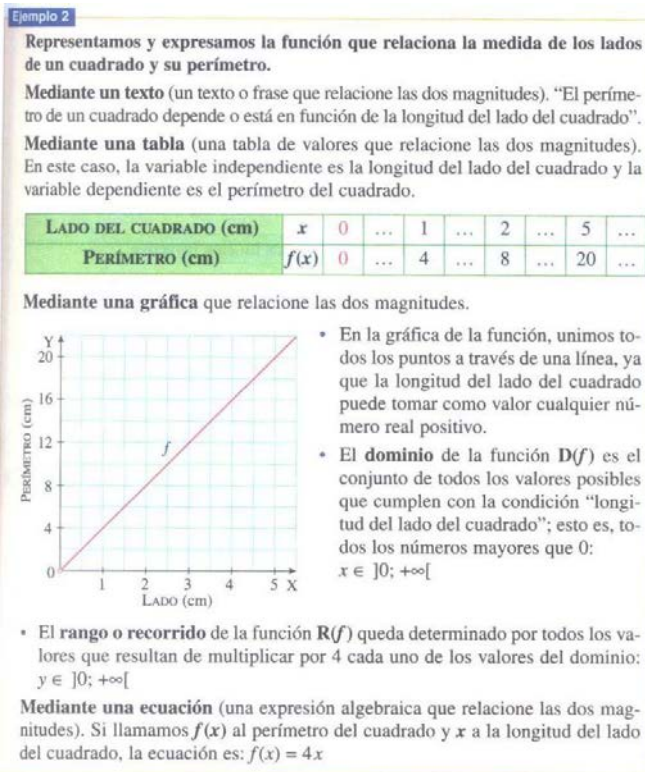


Figura 3

La metodología implícita es la siguiente: el texto presenta las definiciones de los conceptos generales, muestra ejemplos, propone ejercicios descontextualizados encontrando algunas propiedades (de manera inductiva). Posteriormente el lector ha de aplicar dichos conceptos y propiedades a la resolución de problemas en su mayoría descontextualizados, cuyo objetivo es la aplicación de los objetos matemáticos introducidos en la unidad (de manera deductiva). Solo en pocos casos (un 10%) introduce una propiedad a través de ejemplos donde se supone que el lector debe observar las características de éstas, definiéndola posteriormente. Veamos la figura 4 donde se aprecia que un ejemplo sirve de refuerzo de la definición, pero este a su vez sirve para introducir una propiedad.

**Definición:**

► Función identidad

La **función identidad** se define como el conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  cuya segunda componente,  $y$ , es igual a la primera componente. Esta función es de la forma  $f(x) = x$ .

**Ejemplo:**

Ejemplo 18

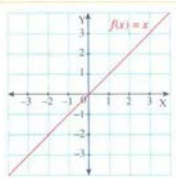
Graficamos  $f(x) = x$ .

- Elaboramos una tabla de valores y graficamos.

$x$	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(x)$	...	-2	-1	0	1	2	...

- La imagen de cada número es igual a su preimagen.

$D(f) = \mathbb{R}$  y  $R(f) = \mathbb{R}$



El gráfico de la función identidad es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Figura 4

Algunas de las propiedades se “demuestran” a través de un par de ejemplos; es el caso de las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas las cuales solo se presentan a través de ejemplos señalando algunas de las características que deberían tener, pero no se las define posteriormente. (ver figura 5)

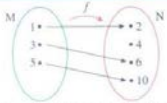
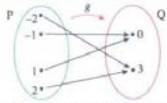
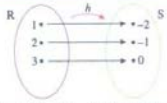
<p>Dados <math>M = \{1; 3; 5\}</math> y <math>N = \{2; 4; 6; 10\}</math>, establecemos la relación: <math>f: M \rightarrow N</math>, definida por <math>f(x) = 2x</math>.</p>	<p>Dados <math>P = \{-2; -1; 1; 2\}</math> y <math>Q = \{0; 3\}</math>, establecemos la relación: <math>g: P \rightarrow Q</math>, definida por <math>g(x) = x^2 - 1</math>.</p>	<p>Dados <math>R = \{1; 2; 3\}</math> y <math>S = \{-2; -1; 0\}</math>, establecemos la relación: <math>h: R \rightarrow S</math>, definida por <math>h(x) = x - 3</math>.</p>
		
<p><math>f: M \rightarrow N = \{(1; 2), (3; 6), (5; 10)\}</math> Observamos que a los elementos del rango de la función le corresponde una, y sólo una, preimagen.</p>	<p><math>g: P \rightarrow Q = \{(-2; 3), (-1; 0), (1; 0), (2; 3)\}</math> Observamos que los elementos del rango de la función coinciden con los elementos del conjunto de llegada.</p>	<p><math>h: R \rightarrow S = \{(1; -2), (2; -1), (3; 0)\}</math> Observamos que la función es inyectiva y sobreyectiva a la vez.</p>
<p><math>f</math> es una función inyectiva.</p>	<p><math>g</math> es una función sobreyectiva.</p>	<p><math>h</math> es una función biyectiva.</p>

Figura 5

Las situaciones problemas se presenta en gran cantidad a través de ejercicios de refuerzo de lo aprendido donde se aplica las técnicas (procedimientos) enseñadas pudiendo aplicar diversas operaciones estudiadas; además estos ejercicios que refuerzan lo aprendido se presentan en 3 niveles específicos: básico, intermedio y avanzado.

Esta unidad es seguida de otras unidades en Matemática 5 tituladas “Funciones exponenciales y logarítmicas” y “Funciones trigonométricas”. En los aprendizajes previos se identificaron los conceptos de correspondencia, relaciones binarias y ecuaciones.

## Referencias

Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 99-114.

Fernández, T., Cajaraville, J. A. y Rodino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial.

Font, V. (2005). Funciones y derivadas.

Font, V. y Godino, J. D. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos

matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa* (en prensa)

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Disponible en: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04\\_enfoque\\_ontosemiotico.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf)

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_1mayo06.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_1mayo06.pdf)

Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Inglada, N. y Font, V. (2003) Significados Institucionales y Personales de la Derivada. Conflictos Semióticos Relacionados con la Notación Incremental. Córdoba. [http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba\\_2003/IngladaFont.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/IngladaFont.pdf)

Kirk, J. y Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research*. London: Sage.

Luque, H. (2007). Lo que saben los alumnos a partir de las evaluaciones nacionales de rendimiento.

Ortiz, J. J. (2002). La probabilidad en los libros de texto.

Ramos, A. (2005). Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios Institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. Tesis doctoral. Barcelona.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2): 133-162.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular.

<http://destp.minedu.gob.pe/secundaria/nwdes/pdfs/disenocurricularnacional.pdf>

Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004 en el área de matemática en tercer y quinto grado de secundaria. Ministerio de Educación.

[http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MatematicaS3\\_5.pdf](http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MatematicaS3_5.pdf)



# **Influencia de la formación profesional y pedagógica de los docentes de matemática en el rendimiento académico de los alumnos de quinto grado de educación secundaria en los colegios públicos de Piura y Castilla**

Luis Alvarado Pintado  
Universidad de Piura

## **Resumen**

En los últimos años, el rendimiento de los estudiantes de las escuelas públicas de Piura ha obtenido un desempeño bajo en Pruebas Estandarizadas de Matemática, así lo muestra los resultados de la última evaluación nacional de matemática. Las razones de este suceso han sido poco examinadas, pero entre ellas se podría citar la formación o la calidad de desempeño del docente, ya que actualmente, se aprecia un cierto consenso con la idea de que el fracaso o el éxito de todo sistema educativo dependen fundamentalmente de esta variable. Se podrán revisar los planes de estudio, programas, textos escolares; constituir magnificas instalaciones; obtener excelentes medios de enseñanza, pero sin docentes eficientes difícilmente se conseguirá el perfeccionamiento real de la educación.

Hoy en día las políticas educativas han concentrado sus intereses y esfuerzos en mejorar, principalmente, los programas de capacitación de los docentes. Sin embargo, existe una variable que se sobrepone a dichos programas, se trata de la relación profesor – alumno, donde la formación

profesional y pedagógica del docente explicarían, en un porcentaje no menor, el rendimiento del alumno.

Por esta razón, el presente trabajo se llevó a cabo debido a la inquietud por identificar la relación entre la formación profesional y pedagógica del docente, cuantificada en niveles de desempeño, con el rendimiento académico de los alumnos de quinto grado de educación secundaria en los colegios públicos de Piura y Castilla, y más precisamente en determinar el grado en que estas variables se relacionan. Por lo tanto, es en esta área donde se concentró la investigación, estableciendo finalmente, cómo y cuánto se relacionan.

El análisis estadístico de los datos indicó que: La evaluación total del docente se correlaciona con el rendimiento académico de los alumnos, sin embargo predomina el factor académico de los docentes, formación matemática, es decir altas calificaciones en la validación docente se relaciona positivamente y fuertemente ( $r = 0.817$ ) con altos rendimientos académicos de los alumnos. Asimismo, la prueba de regresión lineal aplicada a la variable independiente sobre la dependiente, arrojó como resultado que ésta estaría explicando un 68.6% de la variable dependiente. Este porcentaje de explicación estaría dando una señal clara de cuanto influye en el rendimiento de los alumnos la formación profesional y pedagógica del docente.

### **Planteamiento del problema**

Esta investigación aborda la problemática de la capacitación profesional y personal del docente de matemáticas y su influencia en el rendimiento de los alumnos de los colegios públicos de Piura y Castilla. Hoy en día, las matemáticas se usan con mayor frecuencia para: analizar información; tomar decisiones; dar soluciones a problemas de la industria y el comercio, etc. Por esta razón, todo ciudadano debe tener un mínimo de conocimientos matemáticos que le permita comprender situaciones cuantitativas. Frente a esta relevancia de las matemáticas, el problema de la capacidad profesional del profesor toma mayor importancia con la intención de elevar el nivel académico de los alumnos.

En ese sentido se enunció el siguiente problema de investigación:

¿De qué manera influye el nivel de formación profesional y pedagógica de los docentes en el índice de rendimiento académico de los alumnos de quinto grado de educación secundaria en los colegios públicos de Piura y Castilla?

### **Marco teórico**

*El profesor y la clase de matemática.* Se considera de gran importancia la figura del profesor para obtener una educación de elevada calidad. En la secundaria, donde está centrado este estudio, el papel del profesor es elemental su calidad se centra en la preparación y desenvolvimiento en el aula. El profesor es un modelo para sus alumnos no sólo en cuestiones de estilo y patrones de solución de problemas sino también en los aspectos de creación y tratamiento de las cuestiones temáticas.

El profesor de matemática, a diferencia del resto de docentes, se enfrenta al problema de la enseñanza – aprendizaje desde otra perspectiva. Se trata de dar a conocer a los alumnos ciertos hechos, hacerles comprender determinadas reglas o relaciones. Por lo tanto su enseñanza consiste casi exclusivamente en familiarizar a los alumnos con el método deductivo.

En clase el profesor ha de conseguir una atmósfera relajada que facilite a los alumnos la oportunidad de descubrir, por ellos mismos, aspectos matemáticos. Para ello, debe estimular el dialogo y el respeto entre ellos, proveniente de la combinación de varios factores:

- El reconocimiento por parte del estudiante del conocimiento que el profesor tiene del tema.
- El reconocimiento por parte del estudiante del interés que tiene el profesor en que el primero logre los objetivos del curso.

Por esta razón, el profesor de matemática no debe olvidar que su tarea fundamental no es explicitar lo que sabe, sino

construir unas situaciones apropiadas de aprendizaje para el alumno. Es decir, además de matemáticas el profesor debe conocer los procesos de aprendizaje de la matemática en la mente humana.

### **Metodología**

Se ha utilizado el método empírico-analítico, modalidad descriptiva correlacional de corte transversal.

**Muestra.** Se seleccionaron aleatoriamente 12 colegios secundarios de los distritos de Piura y Castilla. Para el caso de los profesores se trabajó con 12 profesores. Asimismo, de los alumnos se consideró una muestra probabilística, la cual quedó acotada a 418 alumnos(as) de un universo de 6019 aproximadamente.

### **Definición de Variables**

Variable independiente: Formación profesional y pedagógica del profesor de matemática

Variable dependiente: Rendimiento académico de los alumnos

**Técnica para recolectar información.-** Por la naturaleza de la investigación se han aplicado dos tipos de instrumentos: pruebas de rendimiento y cuestionarios. Las primeras evalúan el nivel de dominio de contenido, las estrategias empleadas y la forma de enfocar un problema por parte del docente y alumno. Las segundas, el cuestionario diseñado para los alumnos, tienen como objetivo la obtención de la información referente a los diferentes elementos del proceso enseñanza-aprendizaje que realizan los profesores de matemática en los colegios públicos de Piura y Castilla. Así entregamos a cada alumno de la muestra seleccionada un cuestionario para su llenado respectivo.

En cambio, el cuestionario diseñado para los profesores recoge información acerca de sus aspiraciones como docente de matemática, su actitud hacia las capacitaciones, etc.

## Análisis de datos e interpretación de resultados

Como se aprecia en la tabla 1, existe una clara influencia del nivel de desempeño del docente respecto al interés mostrado por sus alumnos. Es decir, los alumnos con profesores de buen desempeño son los que mejores resultados obtienen y viceversa. La prueba “chi cuadrado” refuerza lo antes descrito.

		Nivel de desempeño del docente			
		Insatisfactorio	Básico	Competente	Destacado
Nivel de Desempeño del alumno	Previo	78.3%	60.3%	47.5%	20.0%
	Básico	17.6%	29.4%	46.5%	70.0%
	Suficiente	4.1%	10.3%	6.1%	10.0%
Total		100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Tabla 1 Nivel de desempeño del alumno de acuerdo al nivel de desempeño del docente.

La prueba “chi cuadrado” indicó asociación entre los niveles de desempeño del alumno con los del docente, pero no el grado de la relación. Por esta razón se utilizó la prueba estadística “*r de Pearson*”, arrojando los siguientes resultados:

		Evaluación total del docente	Rendimiento del Alumno
Evaluación total del docente	Correlación de Pearson Sig. (bilateral)	1	.845** .001
Rendimiento del Alumno	Correlación de Pearson	-----	1

\*\* La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Tabla 2 Correlaciones variables principales.

Estos resultados, indican que la relación entre la evaluación total del docente, formación matemática y pedagógica, y el rendimiento del alumno es positiva y fuerte,  $r = 0.845$  y significativa al 0.01. Esta información nos permite establecer que, los profesores con una alta formación matemática y pedagógica se relacionan positivamente con los rendimientos altos de sus alumnos. Esto quiere decir que aquellos

profesores que tienen altas calificaciones en la evaluación total, se relacionan positivamente y fuertemente con aquellos alumnos de buen rendimiento académico, lo mismo sucederá para el caso contrario.

También con los datos se pudo establecer un modelo de regresión lineal entre la formación profesional del docente y el rendimiento académico del alumno. Este modelo establece el efecto que tiene el desempeño del docente sobre el rendimiento académico de los alumnos. El modelo viene expresado según:

$$\text{rendimiento académico} = \text{formación profesional del docente} \times 0.76 - 1.234$$

## Referencias

Alcazar, Lorena; Balcazar, Rosa Elena. (2001). Oferta y Demanda de formación docente en el Perú. Programa Especial de Mejoramiento de la Calidad de la Educación Peruana. Ministerio de Educación. Documento de trabajo.

Arnal, Justo. (1996) Elaboración y validación de un test de instrucción: Un estudio sobre rendimiento en matemáticas. Valencia: Promolibro.

Asmand, Falcón; Boccio, Úrsula y Karim Zúñiga. (2005). Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004, Informe pedagógico de Resultados. Unidad de Medición de la Calidad Educativa. Ministerio de Educación. Documento de trabajo.

Casanova, M. (1995). Manual de la Evaluación Educativa. Madrid La Muralla.

Castelnuovo, Emma. (1999). Didáctica de la matemática Moderna. 2º ed. México .DF: Trillas.

Cueto, Santiago; Ramírez, Cecilia; León, Juan y otros. (2003). Oportunidades de Aprendizaje y Rendimiento en Matemática en una muestra de estudiantes de sexto grado de primaria de Lima. GRADE, Lima. Documento de trabajo.

Fox, David J. (1981). El proceso de Investigación en Educación. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra S.A.

García Hoz, Víctor. (1981). La tarea Profunda de Educar. 5<sup>a</sup> ed. Madrid: Rialp S.A.

García Hoz, Víctor. (1966). Principios de Pedagogía Sistemática. Madrid: Rialp. S.A.

García Hoz, Víctor y Ramón Pérez Juste. (1983). La investigación del Profesor en el Aula. Madrid: Escuela Española S.A.

Gómez, Pedro. (1995). Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de la matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Guaylupo, Carlos; Vásquez, Alberto (2006) Estadística Educativa 2004-2005. Dirección de Gestión Institucional. Dirección Regional de Educación – Piura.

Hanushek, E. (1992). The Trade off Between Child Quanta and Quality and Quality. Washington DC.

La Torre, Antonio, Del Rincón, Delio y Arnal, Justo. (2005). Bases Metodológicas para la investigación Educativa. Barcelona: Jordi Hurtado Mompeó- Editor.

Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe. Declaración de La Habana, 2002.



# **SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS**



# El plano traza-determinante de un sistema dinámico lineal $\dot{X} = AX + B$

Armando Blanco Del Rosario  
Pontificia Universidad Católica del Perú

Rosa Fabiola Jabo Bereche  
Pontificia Universidad Católica del Perú

Luis Bustamante Donayre  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## La ecuación característica

La clave para obtener la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es determinar los valores propios de  $A$ . Para encontrarlos, necesitamos establecer el polinomio característico de  $A$ ,

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

El valor  $T = a + d$  es la suma de los elementos de la diagonal de la matriz  $A$ . Llamamos a esta cantidad la *traza de*  $A$  y escribimos  $\text{Tr}(A)$ . De hecho,  $D = \det(A) = ad - bc$  es el determinante de  $A$ .

## Proposición 1

Si una matriz  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  tiene valores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , entonces la traza de  $A$  es  $\lambda_1 + \lambda_2$  y  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ .

El polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - T\lambda + D,$$

y los valores propios de  $A$  son

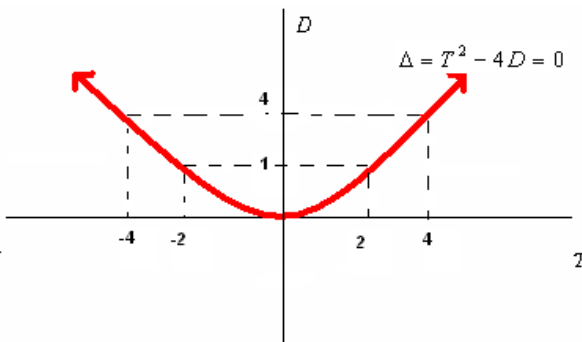
$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

donde  $\Delta = T^2 - 4D$ , recibe el nombre de discriminante.

- i) Si  $\Delta = T^2 - 4D > 0$ , tenemos dos valores propios de valor real distintos.
- ii) Si  $\Delta = T^2 - 4D < 0$ , tenemos dos valores propios complejos, los cuales son conjugados.
- iii) Si  $\Delta = T^2 - 4D = 0$ , tenemos dos valores propios reales repetidos.

### 1. El Plano Traza-Determinante

Si  $\Delta = T^2 - 4D = 0$  o equivalentemente si  $D = T^2/4$ , tendremos valores propios repetidos. En efecto, podemos representar aquellos sistemas con valores propios repetidos mediante la gráfica de la parábola  $D = T^2/4$  sobre el plano- $TD$  o plano Traza-Determinante.



Los puntos sobre la parábola corresponden a sistemas con valores propios iguales; los puntos por encima de la parábola ( $\Delta = T^2 - 4D < 0$  ó equivalentemente  $D > T^2/4$ ) corresponden a sistemas con valores propios complejos y los puntos debajo de la parábola ( $\Delta = T^2 - 4D > 0$  ó equivalentemente  $D < T^2/4$ ) corresponden a sistemas con valores propios reales distintos.

**Proposición 2** La traza y el determinante de una matriz  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ , son invariantes bajo un cambio de coordenadas. Esto es,  $\det(C^{-1}AC) = \det(A)$  y  $Tr(C^{-1}AC) = Tr(A)$  para cualquier matriz  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  y la matriz cambio de base  $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ .

La proposición 2 nos hace notar que sólo necesitamos considerar sistemas  $\dot{X} = AX$ , donde  $A$  es una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

## 2. Valores Propios Complejos

El sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} X, \quad \beta > 0$$

tiene valores propios  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . La solución general a este sistema es


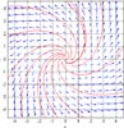
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de equilibrio son *foco estable* ( $\alpha < 0$ ), *foco inestable* ( $\alpha > 0$ ) o *centro* ( $\alpha = 0$ ). El tipo del punto de equilibrio depende de la parte real del valor propio. Sin embargo, como los valores propios de  $A$  están dados por

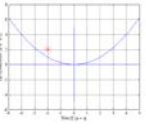
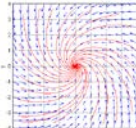
$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

y el signo de la parte real está determinada solamente por  $T$ , tendremos que, si  $T > 0$  el punto de equilibrio es foco inestable, si  $T < 0$  el punto de equilibrio es un foco estable y si  $T = 0$  el punto de equilibrio es un centro.

### Foco Inestable

Valores Propios	Traza-Determinante	Plano Traza-Determinante	Diagrama de fase
$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  $\alpha > 0, \beta > 0$  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) > 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

### Foco Estable

Valores Propios	Traza-Determinante	Plano Traza-Determinante	Diagrama de fase
$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  $\alpha < 0, \beta > 0$  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

<b>Centro</b>			
<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  $\alpha = 0, \beta > 0$  $\alpha \in R, \beta \in R$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) = 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

### 3. Valores Propios Reales distintos

El sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} X,$$

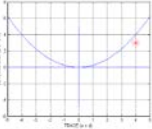
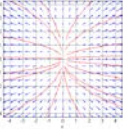
con valores propios reales distintos  $\lambda$  y  $\mu$ , tiene como solución general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

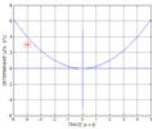
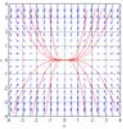
Pueden ocurrir los siguientes casos:

- i) Ambos valores propios son positivos (nodo inestable)
- ii) Ambos valores propios son negativos (nodo estable)
- iii) Un valor propio es negativo y el otro es positivo (silla)
- iv) Un valor propio es cero y el otro positivo (crestas)
- v) Un valor propio es cero y el otro negativo (valles)

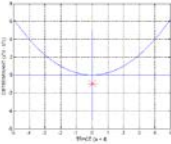
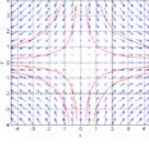
### Nodo Inestable

<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$0 < \mu < \lambda$  $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) > 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

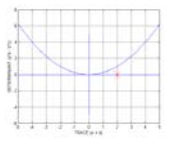
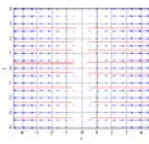
### Nodo Estable

<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\mu < \lambda < 0$  $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

### Silla

Valores Propios	Traza-Determinante	Plano Traza-Determinante	Diagrama de fase
$\mu < 0 < \lambda$  $\lambda \in R, \mu \in R$	$\begin{cases} Tr(A) \in R \\ \det(A) < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

### Crestas

Valores Propios	Traza-Determinante	Plano Traza-Determinante	Diagrama de fase
$0 < \lambda$ $\mu = 0$  $\lambda \in R, \mu \in R$	$\begin{cases} Tr(A) > 0 \\ \det(A) = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

<b>Valles</b>			
<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\lambda = 0$ $\mu < 0$	$\begin{cases} Tr(A) < 0 \\ \det(A) = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$		
$\lambda \in R, \mu \in R$	<p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		

#### 4. Valores Propios Repetidos

a) El sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} X$$

con valores propios reales e iguales.

La solución general a este sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Pueden ocurrir los siguientes:

- i) Los valores propios son positivos (Nodo estrella inestable)
- ii) Los valores propios son negativos (Nodo estrella estable)
- iii) Los valores propios son cero (Infinitos puntos de equilibrio)

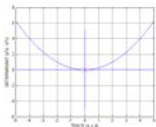
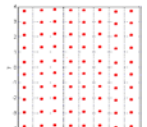
### Nodo Estrella Inestable

<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\lambda > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) > 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		
$\lambda \in \mathbb{R}$			

### Nodo Estrella Estable

<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\lambda < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		
$\lambda \in \mathbb{R}$			

## Infinitos Puntos de Equilibrio

<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\lambda = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) = 0 \\ \det(A) = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;"><math>\Delta = 0</math></p> <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		
$\lambda \in R$			

b) El sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} X$$

con valores propios reales e iguales.

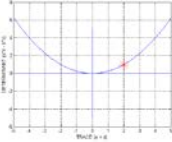
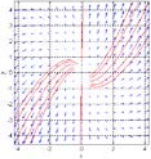
La solución general a este sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

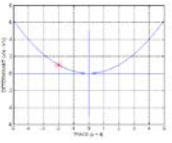
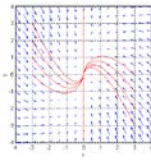
Pueden ocurrir los siguientes:

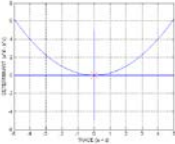
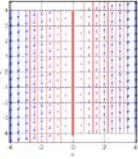
- i) Los valores propios son positivos (Nodo impropio inestable)
- ii) Los valores propios son negativos (Nodo impropio estable)
- iii) Los valores propios son ceros (Flujo)

### Nodo Impropio Inestable

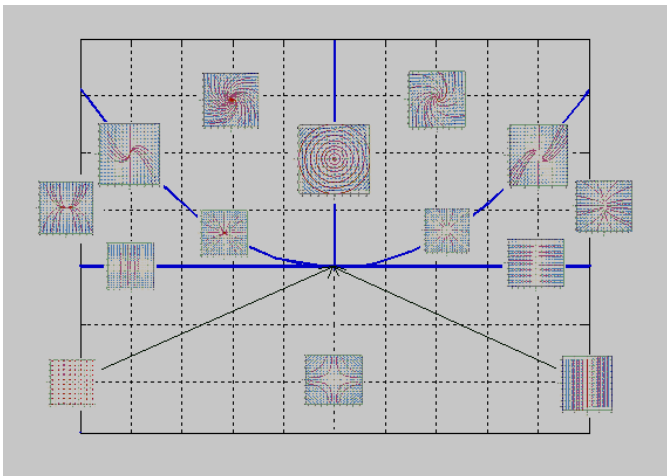
Valores Propios	Traza-Determinante	Plano Traza-Determinante	Diagrama de fase
$\lambda > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) > 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		
$\lambda \in R$			

### Nodo Impropio Estable

Valores Propios	Traza-Determinante	Plano Traza-Determinante	Diagrama de fase
$\lambda < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		
$\lambda \in R$			

<b>Flujo</b>			
<u>Valores Propios</u>	<u>Traza-Determinante</u>	<u>Plano Traza-Determinante</u>	<u>Diagrama de fase</u>
$\lambda = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\begin{cases} \text{Tr}(A) = 0 \\ \det(A) = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ <p><b>Ejemplo:</b></p> $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		
$\lambda \in R$			

## 5. El Plano Traza-Determinante



**Fig. 1: El Plano Traza-Determinante**

El plano traza-determinante está determinado por la gráfica de la parábola  $D = T^2/4$  sobre el plano- $TD$ . Los puntos sobre el plano traza-determinante corresponden a la traza y al determinante de un sistema lineal  $\dot{X} = AX$  (generalizada a  $\dot{X} = AX + B$ ). Desde que la traza y el determinante de una matriz determinan los valores propios de  $A$ , podemos usar el plano Traza-Determinante para parametrizar el retrato de fase de un sistema lineal (Figura 1). El plano traza-determinante es también muy utilizado para estudiar bifurcaciones.

### **Análisis de resultados**

Es práctico para los alumnos, aprender a hacer el análisis detallado de los 14 casos, comprendiendo cómo surge cada uno de ellos, esto les llevará posteriormente a poder entender cualquier sistema lineal dado. Cabe recordar que estos resultados serán útiles nuevamente cuando estudien sistemas de ecuaciones no lineales y recurran previamente a la linealización de estos.

### **Referencias**

Pecha, Arsenio. (2005) Optimización estática y dinámica en economía. UNIBIBLOS-Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Lomelí, Héctor y Rumbos, Beatriz. (2003) Métodos Dinámicos en economía. Internacional Thompson Editores, S.A., México.

Pemberton, Malcolm; Rau, Nicholas. (2001) Mathematics for economist. Manchester University Press, Great Britain.

García Cobián, Ramón. Notas de clase.

## ANEXO 1

**Programa en MatLab para graficar el Plano Trazado-Determinante y los diagramas de fase de un sistema**

**dinámico lineal  $\dot{X} = AX + B$**

**% Linear\_System.m**

**% Analysis of system of autonomous linear first-order ODE's:**

**%  $dx/dt = a*x + b*y + e$**

**%  $dy/dt = c*x + d*y + f$**

**% AM 41**

**% Fall 2007**

**% PARAMETERS**

**a = 0;**

**b = 0;**

**c = 1;**

**d = 0;**

**e = 0;**

**f = 0;**

**% Matrix form:**

**A = [a b**

**c d];**

**non\_homogeneous\_term = [e;f];**

**% THEORETICAL ANALYSIS**

**% Eigenvalue Analysis:**

**[Eigenvectors,Eigenvalues] = eig(A);**

**eigenvalue\_1 = Eigenvalues(1,1);**

**eigenvalue\_2 = Eigenvalues(2,2);**

**eigenvector\_1 = Eigenvectors(:,1);**

**eigenvector\_2 = Eigenvectors(:,2);**

**% Trace-Determinant Analysis:**

**T = a + d;     % trace of matrix A**

```

D = a*d - b*c; % determinant of matrix A
% Visualize the parameter set in the T-D plane:
figure(1)
plot(T,D,'*r','MarkerSize',20)
% We also plot the two axes, and the parabola of
equation D = .25*T^2,
% since the qualitative behavior of the system is
determined by
% the position of (T,D) w.r.t. these 3 lines:
hold on
min_T = -5;
max_T = 5;
min_D = -5;
max_D = 5;
plot([min_T max_T],[0 0])
plot([0 0],[min_D max_D])
T_axis = min_D:.01:max_D;
plot(T_axis,.25*T_axis.^2)
hold off

xlabel('TRACE (a + d)')
ylabel('DETERMINANT (a*d - b*c)')
disp(['First Eigenvalue : ',num2str(eigenvalue_1)])
disp(['First Eigenvector : ',num2str(eigenvector_1')])
disp(' ')
disp(['Second Eigenvalue : ',num2str(eigenvalue_2)])
disp(['Second Eigenvector :
',num2str(eigenvector_2')])

grid

% DIRECTION FIELD
% Display setup (will work in most cases, but you
may have to adjust it):
min_x = -4;
max_x = 4;
step_x = .5;

```

```

min_y = -4;
max_y = 4;
step_y = .5;

% open new figure:
figure(2)

% Define the grid points:
[x,y] =
meshgrid(min_x:step_x:max_x,min_y:step_y:max_y);

% Compute the derivatives at each grid point:
dx = a*x + b*y + e;
dy = c*x + d*y + f;

% Put the (dx,dy) arrow at each grid point (x,y):
quiver(x,y,dx,dy)
axis([min_x max_x min_y max_y])
axis image
xlabel('x')
ylabel('y')
hold on
grid

% TRAJECTORIES

% To create a new trajectory, click mouse on desired
initial point in (x,y) plane.

% To end simulation (e.g. to change parameter
values),
% click mouse in grey margin, i.e., outside of
permissible area.

dt = .001;    % time step
t_max = 10;   % length of simulation

time_axis = 0:dt:t_max;
n_time_steps = length(time_axis);

X = zeros(2,n_time_steps);
    % this array will contain an entire trajectory

```

```

while (X(1,1)>min_x & X(1,1)<max_x &
X(2,1)>min_y & X(2,1)<max_y)
    % will create a new trajectory until mouse is
    clicked in margin

    X(:,1) = ginput(1); % click mouse on desired
    initial weight vector

    for i = 2:n_time_steps
        X(:,i) = X(:,i-1) + (A*X(:,i-1) +
non_homogeneous_term)*dt;
    end
    plot(X(1,:),X(2:,:), 'r')
end
hold off

```



# Aplicación de la función lineal

Maritza Luna Valenzuela  
Pontificia Universidad Católica del Perú

## Resumen

Diferentes problemas o situaciones que se presentan en la vida diaria (economía, finanzas, medicina, etc.) pueden ser modeladas usando funciones. En este trabajo se considerarán solo funciones lineales y se desarrollarán actividades que requieren un trabajo cooperativo.

## Objetivos de la experiencia

- Interpretar y analizar los datos del problema solicitado.
- Modelar las funciones lineales solicitadas.
- Representar las funciones mediante gráficos.
- Interpretar los gráficos.
- Analizar e interpretar la solución planteada.

## Marco teórico

El trabajo cooperativo constituye un tipo de aprendizaje. Para que la cooperación funcione, el trabajo solicitado debe ser estructurado considerando cinco componentes esenciales dentro de cada lección.

- Primeramente debe generar la interdependencia positiva entre los integrantes del equipo.
- En segundo lugar la interacción fomentadora que incluye explicar verbalmente cómo solucionar el problema vinculando el aprendizaje presente con el aprendizaje pasado.
- El tercer componente fundamental del aprendizaje cooperativo consiste en la responsabilidad individual, es

decir aprender juntos para desenvolverse mejor de manera individual.

- El cuarto consiste en habilidades interpersonales y en grupos pequeños. De modo que el aprendizaje cooperativo es más complejo que los demás tipos de aprendizaje tales como competitivo o individualista.
- El quinto es el procesamiento por el grupo. El procesamiento en grupo se da cuando los integrantes del grupo manifiestan el éxito que han tenido en lograr sus metas y en mantener relaciones de trabajo eficaces.

### **Metodología**

- Se obtuvieron soluciones a problemas de producción, costos y finanzas, optimizando ingresos, utilización de recursos y beneficios, y participando activamente en equipo mostrando interés y responsabilidad.
- Se reconoce la importancia de las funciones en la representación, comprensión y modelación de situaciones reales.
- Se identifica el valor instrumental de la matemática en el desarrollo cognitivo.
- Se elabora e interpreta cuadros y gráficos utilizados en la tarea diaria de su desempeño laboral.
- Se mejora el rendimiento académico.

### **Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados**

#### **Ejemplo 1: Actividad**

**Pareja 1 (30 min.):** El precio por la conexión a Internet mediante Comas Online es de S/. 100. El costo de servicio durante los primeros 6 meses es de S/. 200 mensuales. Después del sexto mes se reduce a S/. 150 mensuales.

- a) Determinar la ecuación de costo por el servicio mensual.

- b) Determinar el costo de los primeros 12 meses y representélos en una tabla.
- c) Graficar estos valores obtenidos.

**Pareja 2 (30 min.):** El precio por la conexión a Internet mediante Olivos Online es de S/. 50. El costo de servicio durante los primeros 6 meses es de S/. 250 mensuales. Después del sexto mes se reduce a S/. 120 mensuales.



- a) Determinar la ecuación de costo por el servicio mensual.
- b) Determinar el costo de los primeros 12 meses y representélos en una tabla.
- c) Graficar estos valores obtenidos.

**Parte grupal (30 min.)**





Las empresas del cono norte de Lima necesitan diferentes tipos de sistemas de información para apoyar la toma de decisiones y manejar actividades de diversos niveles y funciones organizacionales. Muchas pueden requerir sistemas que integren la información y los procesos de negocio de diversas áreas funcionales. Por ejemplo, MODIPSA, una cadena de ropa femenina, desean sistemas de información con los que pudiera coordinar con toda precisión su cadena de abastecimiento. Para ello requiere estar interconectada con todos sus proveedores y es esencial el uso de Internet en la organización. Para lo cual solicita el apoyo de los estudiantes de administración de la Universidad César Vallejo, quienes deberán decidir qué empresa proveedora de Internet elegir.

### Contrato: Hasta 6 meses

Empresa	Costo de conexión (soles)	Costo mensual (soles)
<b><i>Comas Online</i></b> 	100	200
<b><i>Olivos Online</i></b> 	50	250

### Después de los seis meses

Empresa	Costo de conexión (soles)
<b><i>Comas Online</i></b> 	150
<b><i>Olivos Online</i></b> 	120

- ¿Cuál de las dos compañías conviene contratar para la conexión y servicio de Internet?
- ¿Qué empresa recomendarían contratar y hasta qué mes?
- Finalmente si se desea contratar el servicio por más de un año, ¿qué recomendarían?

## **Referencias**

Arya, Jagdish. (1994). Matemáticas aplicadas a la Administración y Economía. Ed. Prentice Hall, México. 3ra edición.

Stewart, J(2006). Pre Cálculo. Mexico. 5ta edición.

Tan, S.T. (2001). Matemáticas para Administración y Economía. Ed. Thomson editores.

Johnson, Dietal. (1995) Los nuevos círculos de aprendizaje. Capítulo 3: Los componentes esenciales del aprendizaje cooperativo. Pág. 26-36.



# Un aprendizaje razonado a partir de la gráfica de inecuaciones

Olimpia Castro Mora  
Colegio América del Callao

## Resumen

En gran parte de nuestra tarea como docentes de matemática, se enfatiza el cálculo operativo, la rutina de procesos y las fórmulas aprendidas de memoria, sin encontrar aplicaciones de las Matemáticas que resulten útiles en la vida. Por este motivo, a muchos alumnos no les gusta el curso de matemática ya sea porque no lo entienden, o porque lo consideran muy tedioso al no encontrarle sentido.

Lo importante en esta etapa de formación escolar es estimular el razonamiento y la creatividad en el alumno, que le permita resolver diversas situaciones problemáticas que se presentan en lo cotidiano. Se busca que el alumno aprenda con gusto, con situaciones de la vida real y que a su vez desarrolle su pensamiento lógico y capacidad de comunicación.

Con el presente trabajo se quiere resaltar la importancia de la formación matemática con el álgebra en los grados de educación secundaria. En ella se busca desarrollar capacidades en los alumnos atendiendo a su proceso cognitivo, a la comprensión y aplicación de los contenidos que aprende y dando énfasis al aspecto formativo así como a las actitudes positivas hacia la matemática. Se proponen actividades que llevan a los alumnos a explorar, investigar, elaborar hipótesis, validar, para así alcanzar un aprendizaje significativo. Asimismo, hace uso de diversos tipos de estrategias como numéricas mentales, de algoritmos, de representación gráfica con uso de graficador, en contextos que integran la matemática y la conectan con otras áreas.

El trabajo se centra en la aplicación de inecuaciones a partir de situaciones reales y de aplicación de algunas estrategias de cálculo y análisis de gráficas de funciones. Esta propuesta pone de manifiesto las habilidades desarrolladas en el alumno al interpretar situaciones, establecer relaciones, elaborar conjeturas, verificarlas, realizar generalizaciones como parte de su quehacer cotidiano.

### **Actividades con la computadora**

- En Internet Explorer cargar <http://gcalc.net/>
- Hacer click en GCalc3 para iniciar
- Seleccionar Inequalities Plugin

### **TEMA: Resolución de Problemas con gráfica de Inecuaciones en el plano cartesiano**

*Para cada ejercicio:*

- a) Escribe el sistema de inecuaciones correspondiente a cada problema.*
- b) Realiza la gráfica en GCalc para verificar los datos.*
- c) Responde a las preguntas del problema.*

1. Un jugador de básquet anota dos puntos por una canasta simple y un punto si es de tiro libre. Si Jaime anota por partido máximo 10 puntos

¿Cuántas canastas de cada una pudo haber hecho?

¿Si anota igual cantidad de canastas de cada tipo, cuáles son estas posibilidades?

Si el número de canastas simples es el doble de las de tiro libre, indica las posibilidades.

### **Solución gráfica**

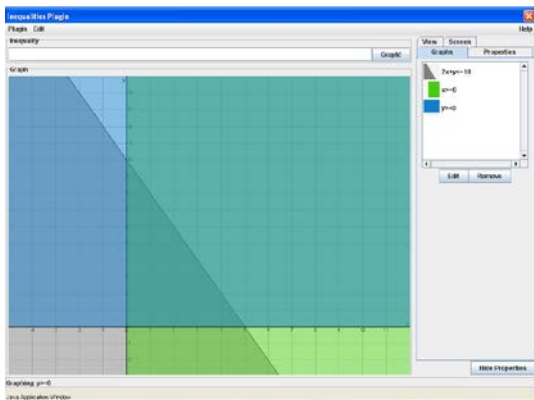
Sistema de inecuaciones

$$2x + y \leq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Se responden las preguntas a partir del gráfico



2. El ascensor de un pequeño edificio tiene capacidad sólo para 280 kg. Si un niño pesa un promedio de 40 kg. y un adulto pesa un promedio de 70 kg.

¿Cuántos niños y cuántos adultos pueden ir en el ascensor?

¿Cuál es el mayor número de adultos que pueden subir?

¿Cuál es el mayor número de niños que pueden subir?

¿Cuántos niños como máximo subirían con un adulto?

Si hay un asensorista permanente, ¿podrá subir junta la familia Torres?

### Solución gráfica

Sistema de inecuaciones

$$40x + 70y \leq 280$$

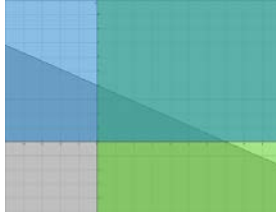
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



Familia Torres

Se responden las preguntas a partir del gráfico



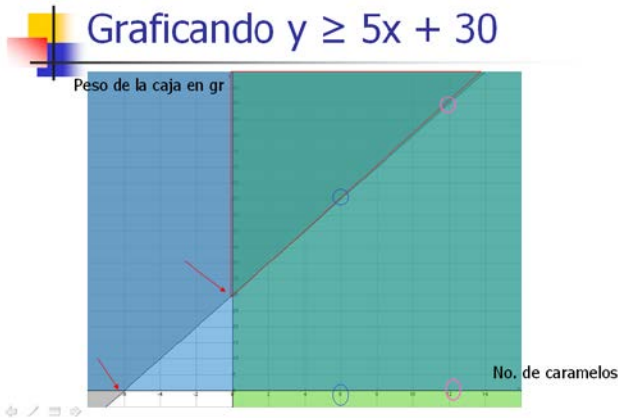
3. Una fábrica de caramelos elabora caramelos de cereza. La caja vacía pesa 30 gramos. Cada caramelo pesa como mínimo 5 gramos. Representa gráficamente el peso de la caja conteniendo  $c$  caramelos.

**A**  $p \geq 30c + 5$

**B**  $p \geq 30c - 5$

**C**  $p \geq 5c + 30$

**D**  $p \geq 5c - 30$



$P$  es el peso total de la caja:  $y$

$C$  es el número de caramelos:  $x$

Indican qué significan los interceptos.  $(-6,0)$  ;  $(0,30)$

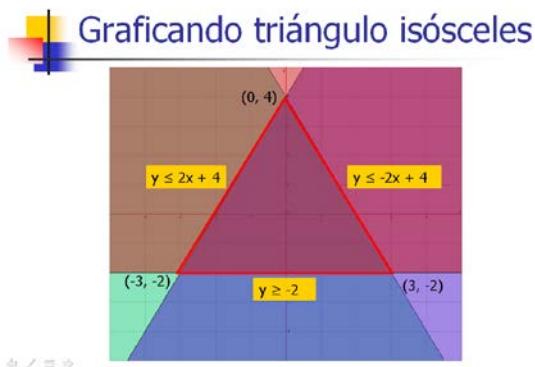
Se responden las preguntas a partir del gráfico

¿Cuánto pesa la caja con seis caramelos? Mínimo 60 gr

¿Cuánto pesa la caja con doce caramelos? Mínimo 90 gr

Hacer mención que no es proporcional.

4. Grafica en el plano cartesiano, con vértices enteros, un triángulo isósceles. Calcular el área y su perímetro



### Ejemplo de solución

$$y \leq -2x + 4 ; y \leq 2x + 4 ; y \geq -2$$

$$\text{Perímetro} \quad 6\sqrt{5} + 6 \text{ u.}$$

$$\text{Área} \quad 18 \text{ u}^2$$

### Dinámica de trabajo

Se realiza en parejas o individual.

Emplean lápiz y papel, y computadora con graficador de funciones GCalc-3 (Software libre, se trabaja en Internet).

- Se presentan por escrito los problemas propuestos.
- Los alumnos definen las variables a utilizar (indican el significado en el problema).
- Plantean la inecuación a utilizar o el sistema de inecuaciones.
- Representan gráficamente la solución del problema.

- Responden oralmente a preguntas que implican análisis de la gráfica.
- Presentan por escrito la solución del problema.

### **Ventajas del trabajo**

Se priorizan las tres capacidades de la estructura curricular:

- a) El razonamiento y la demostración  
Al analizar problemas y formular conjeturas.  
Al representar sus conclusiones lógicas.  
Cuando evalúan relaciones de elementos.
- b) La comunicación matemática  
Al aplicar expresiones algebraicas para las inecuaciones.  
Al discriminar, inferir, evaluar representaciones gráficas y expresiones simbólicas.  
Al representar resultados.
- c) La resolución de problemas  
Valorar el proceso de solución al igual que el resultado.  
Al formular problemas  
Organizar datos  
Elaborar estrategias de solución

### **Conclusiones**

Con esta metodología se logra:

- Desarrollar competencias matemáticas en el alumno (el conocimiento matemático, la comunicación, la formulación y resolución de problemas)
- Aprender una matemática partiendo de situaciones de la vida real.
- Utilizar eficazmente los recursos tecnológicos
- Favorece el análisis y generalización de situaciones ayudando a la toma de decisiones

- Familiariza al alumno con trabajo de ejercicios de aplicación, de razonamiento y transferencias a diversos contextos
- Integra a la matemática en sí misma con aplicaciones de números y operaciones, algebra, geometría, etc.)

### **Referencias**

National Council of Teachers of Mathematics (2000) Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Giménez, J. y Santos Leonor, J. (2004) La actividad matemática en el aula. Barcelona: Editorial GRAÓ.

Godino, J.; Batanero, C.; Font, Vicenç (2003) Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros.

Foresman, S. (1998) The University of Chicago School Mathematics Project. Advanced Algebra, Addison Wesley.

Holliday M. et al. (2003) Algebra 1. Glencoe McGraw-Hill Companies.



# Elaboración de materiales de enseñanza usando LaTeX

Rubén Agapito Ruiz  
Pontificia Univesdidad Católica del Perú

## Resumen

Se da una pequeña comparación de LaTeX con respecto a otros editores, se señalan sus ventajas, y se mencionan algunos ejemplos en donde su aplicación ha sido exitosa e imprescindible no sólo en Matemáticas, sino en las ciencias e ingeniería.

A lo largo de mis años de formación como estudiante de Matemáticas a nivel de bachillerato y doctorado ha sido imprescindible para entender esta fascinante ciencia aprender una notación adecuada, usar los símbolos correctos y expresar coherentemente los razonamientos matemáticos.

La opción de presentar trabajos escritos a mano ha quedado relegada a tareas de clase, resolución de ejercicios en un examen, o cualquier tipo de trabajo en donde la labor de un editor no se aplique. En contraposición, la elaboración de libros de matemáticas, presentación de reportes de investigación en revistas arbitradas de prestigio, elaboración de resúmenes o mini-clases para proyectos de educación a distancia, y en general, cualquier tipo de trabajo en donde la calidad de presentación es uno de los requisitos primordiales, ha de hacerse con ayuda de un software.

Es común a nivel de colegio y bachillerato el uso de MS Word y MS Powerpoint por parte de profesores y alumnos cuando deciden presentar su trabajo con ayuda de la computadora. En contraste, en el ámbito científico universitario es el uso del lenguaje LaTeX (lá-tek) el que predomina en la elaboración de libros y trabajos de investigación. LaTeX no es una opción más, sino que es usado por su versatilidad, costo cero, disponibilidad en todos

los sistemas operativos, generación automática de bibliografía, índice, lista de contenidos y demás bondades que no pueden ser encontradas en editores de texto. Software como MS Word, Openoffice Writer, Adobe Indesign, Adobe Framemaker, por citar unos cuantos, adolecen de la vasta lista de símbolos matemáticos que posee LaTeX, y de la incomparable forma en que LaTeX acomoda los símbolos matemáticos con el texto circundante.

Citemos ejemplos concretos del uso de LaTeX:

1. Elaboración de textos matemáticos de alta calidad en formato electrónico e impreso. Con diversas opciones como colores de fondo para destacar párrafos importantes, inclusión de figuras en formato rasterizado (jpeg, png, tiff) o formato vectorial (emf, wmf, ps, pdf), creación automática de lista de contenidos, figuras, tablas, y creación automática de índices y bibliografía.
2. Colaboración a distancia de temas matemáticos entre profesores ubicados en distintos países.
3. Tutoría a distancia entre profesores y alumnos.
4. Elaboración de prácticas y exámenes usando la notación correcta. Aquí me refiero a evitar notaciones como poner en negrita las letras  $N$ ,  $Z$ ,  $R$ ,  $C$ , para denotar los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente. En general se evita el uso de la fuente en negrita o en itálica para diferenciar símbolos matemáticos del texto circundante.
5. Elaboración de reportes de investigación, los cuales una vez concluidos, se mandan a una revista arbitrada en formato TeX. Muchas revistas internacionales de prestigio, sólo aceptan un reporte en formato LaTeX para que sea publicado.
6. Elaboración de tesis de grado.

Cabe señalar que recientemente, he estado impartiendo laboratorios de LaTeX a alumnos de la PUCP. En tan sólo una sesión de laboratorio de una hora los alumnos lograron redactar un pequeño artículo matemático mostrando todas sus partes principales. Lo más importante fue que se dieron cuenta que una vez conocidas las partes básicas del funcionamiento de LaTeX, ellos podían elaborar artículos más avanzados con ayuda de los manuales gratuitos que abundan en la internet.

Por último, ¿cuáles son las desventajas de LaTeX? La respuesta es subjetiva, y depende mucho si una persona está muy acostumbrada a ver los resultados en pantalla al instante cuando digita un trabajo. LaTeX es un lenguaje que a primer vistazo parece un lenguaje de programación de aquellos que usan los ingenieros informáticos, y que necesita ser compilado para poder apreciar el documento tal como aparecería impreso en papel. Si bien muchas personas critican esto, es justamente este paso de compilación el que da a LaTeX su poder de estructuración (kerning, espaciado, alineamiento, etc.) de símbolos matemáticos con texto circundante.



# **Desarrollo de la idea intuitiva del concepto de límite de una función real**

Luis Masgo Lara  
Universidad Católica Sedes Sapientiae

## **Resumen**

La siguiente experiencia ha sido realizado con los alumnos del curso de Análisis I, correspondiente al tercer ciclo de la UCSS en las horas que práctica que están designadas para dicho curso; y que surge luego de haber llegado al convencimiento de la poca efectividad de las propuestas tradicionales para la enseñanza y aprendizaje del cálculo en general, lo que a su vez trae como consecuencia, la dificultad de los alumnos para la adquisición de los diferentes conceptos matemáticos. En esta experiencia se busca que los alumnos introduzcan el concepto matemático límite de una función real, de una manera intuitiva, buscando a su vez, caracterizar los factores que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto, para que por medio de él se puede formular una metodología que permita interiorizar el concepto y lograr así, un aprendizaje significativo. El trabajo tiene como sustento teórico lo desarrollado por Godino Y Batanero (1994) en cuanto al significado personal e institucional de los objetos matemáticos, la teoría de la transposición didáctica desarrollado por Chevallard (1985), la teoría del constructivismo, la heurística, la resolución de problemas; el papel de los errores en la construcción del conocimiento, las nuevas tecnologías y el trabajo colaborativo. Esta experiencia, consiste en dos actividades de aprendizaje que contienen situaciones problemáticas para ser desarrolladas en aula individualmente y grupalmente por los alumnos, que les permitirán descubrir el concepto de límite de una función real de una manera intuitiva, siendo ellos los verdaderos

participes de su propio aprendizaje dejando al profesor en un rol de guía y facilitador.

### **Problemática**

Los profesores de matemáticas de enseñanza superior (universidad) al presentar el concepto de límites generalmente siguen la forma tradicional y en otros casos al buscar simplificar las dificultades del aprendizaje del concepto, cometen errores que muchas veces son difíciles de erradicar en los alumnos. Entre las principales dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos podemos mencionar:

- a) Los alumnos ven el concepto de límite como una barrera, llegar a un máximo valor
- b) Los alumnos creen que el concepto de límites es una simple sustitución
- c) Los alumnos piensan que el signo  $=$  en el concepto de límites es porque el límite es alcanzado.
- d) Los alumnos realizan una mala lectura de gráficas con respecto al límite.
- e) Los alumnos creen que las funciones discontinuas no tienen límite.

### **Justificación**

El concepto de límites es uno de los primeros conceptos del cálculo que involucra **procesos infinitos** y que sirve de base para otros conceptos como derivadas e Integrales, por lo tanto los conflictos de aprendizaje en los alumnos se presentan inmediatamente al inicio del Cálculo, por lo tanto el aprender el concepto de LÍMITES es importante porque:

- Permite describir funciones con propiedades específicas, como su comportamiento a determinados valores que se le da a la variable independiente.
- Es la noción fundamental del Cálculo, ya que los límites aparecen en la definición de casi todos los conceptos importantes del cálculo, desde la continuidad, hasta las

derivadas, las integrales definidas, las sucesiones, las series.

- Es un tema que se encuentra en todos los silabo de Análisis I de las universidades peruanas.
- Forma parte del currículo de la enseñanza del bachillerato internacional.

### **Marco teórico**

El marco teórico que da soporte a mi trabajo esta basado en:

#### **A) El significado personal e institucional se los objetos matemáticos**

En este trabajo trato de aplicar las nociones teóricas desarrolladas en los artículos de **Godino y Batanero (1994; 1998a, en prensa)** sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Godino y Batanero plantean una reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, adoptándose un punto de vista pragmático en el que el significado de los objetos matemáticos depende del contexto en que se usan, es así que ellos han encontrado que la práctica realizada por las instituciones en el manejo de un concepto determina el aprendizaje del mismo. Los autores no reducen el significado de un objeto matemático a su definición, sino que además se debe tener en cuenta las situaciones–problemas en las cuales interviene como herramienta de resolución y los medios de expresión correspondientes.

#### **B) El Objeto Matemático y la Teoría de la Trasposición Didáctica**

La teoría de la transposición didáctica fue introducida por **Chevallard (1991)**, él introdujo el término para referirse a los cambios que experimenta el conocimiento matemático especializado; es decir, cuando este conocimiento es adaptado para pasar a ser objeto de

enseñanza por medio de un contenido curricular al alcance de los aprendices. La noción de transposición didáctica puede interpretarse **como proceso**, ya que es visto como el conjunto de transformaciones que experimenta un conocimiento para que pueda ser introducido en un sistema de enseñanza ó puede ser interpretado **como resultado**, en donde la transposición didáctica se refiere a las diferencias que podemos observar entre un conocimiento matemático dentro de la institución matemática y este mismo conocimiento dentro de una institución educativa dada.

### C) La teoría Constructivista

Esta teoría parte de los estudios elaborados por Piaget y se basa en que el conocimiento es una construcción que realiza el individuo a partir de su experiencia previa y mediante su interacción con el medio circundante. Los puntos centrales del constructivismo son las siguientes:

1. El aprendizaje es un proceso de **construcción del conocimiento** (no es una copia o absorción de la realidad).
2. El aprendizaje **depende del conocimiento previo** (la gente usa su conocimiento para construir nuevos conocimientos).
3. El aprendizaje está fuertemente **influenciado por la situación en la que tiene lugar** (qué aprendemos, depende del contexto en que lo hacemos).

Las teorías del aprendizaje desarrolladas bajo la influencia del psicólogo soviético Lev Vygotsky (1896-1934), conocidas como **corrientes socioculturales**, agregan a estas tres puntos, una cuarta:

4. El aprendizaje tiene lugar, primordialmente, en la **interacción social**.

A diferencia de la enseñanza tradicional la perspectiva constructivista reivindica el papel activo del alumno y su

responsabilidad en el aprendizaje, pero no despojando al maestro de su papel central en este proceso. Si bien el alumno construye su propio saber, el maestro tiene la misión de guiarlo hacia el conocimiento socialmente aceptado [el conocimiento científico], poniéndolo en contacto con situaciones y problemas interesantes que le permitan desarrollar distintos medios para elaborar los conceptos científicos.

#### **D) La heurística y la resolución de problemas**

La heurística se identifica como el arte o la ciencia del descubrimiento. En matemáticas el pionero fue **George Poyla** quien desarrollo una teoría heurística para la resolución de problemas en matemáticas y dar descripciones detalladas de varios métodos heurísticos. La investigación educativa actual ha mostrado que las llamadas **situaciones problemáticas**, constituidas por problemas no rutinarios, son capaces de movilizar los conocimientos previos del estudiante y le resultan tan atractivos que los considera un reto intelectual, por lo tanto son importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Estas situaciones problemáticas pone al alumno a prueba sus saberes previos, establece sus límites y alcances y elabora modificaciones encaminadas hacia el aprendizaje del nuevo concepto.

#### **E) El trabajo colaborativo**

El aprendizaje colaborativo se refiere a la actividad que pequeños grupos desarrollan en clase, es así como los alumnos forman “pequeños equipos” después de haber recibido instrucciones del profesor. Dentro de cada equipo los estudiantes intercambian la información y trabajan una tarea hasta que todos sus miembros la han entendido y terminado, aprendiendo a través de la colaboración. Este método logra un mejor resultado de aprendizaje que el modelo tradicional pues recuerdan por más tiempo el tema desarrollado en clase. Además desarrolla en los alumnos habilidades de razonamiento

superior al de la enseñanza tradicional, habilidades de pensamiento crítico y finalmente los alumnos se sienten más confiados y aceptados por ellos mismos y por los demás.

#### **F) El papel de los errores en la construcción del conocimiento**

Si aceptamos que el alumno trata siempre de aplicar sus conocimientos previos a nuevas situaciones, extendiéndolos, generalizándolos y modificándolos cuando sea necesario, tendremos que aceptar que estos intentos pueden llevarlos por caminos infructuosos; el resultado será lo que tradicionalmente se conoce como un “error”. Sin embargo, estos errores son justamente, el medio para que el alumno confronte sus conocimientos, los modifique y elabore nuevos conceptos que de ninguna manera deben ser considerados como fracasos. “Aprender de sus errores” es la máxima constructivista.

#### **G) Uso de las nuevas tecnologías**

Las nuevas tecnologías son mejor aprovechadas por niños y jóvenes; computadoras, calculadoras y la televisión, pueden convertirse en "sustitutos tecnológicos" de las relaciones personales por la forma en que la familia evoluciona en este siglo XXI. No cabe duda que la tecnología ha acompañado a la enseñanza desde siempre, aunque no siempre coinciden en la en su ritmo. Sin olvidar la escritura y los libros... en la actualidad las herramientas novedosas son las herramientas multimedia; estas bien utilizadas pueden llamar la atención de estos jóvenes y niños que ya están acostumbrados a relacionarse por estos medios y proporcionar así un medio para un mejor aprendizaje. En el presente trabajo se hace uso del “**sketchpad**”, para facilitar el aprendizaje del concepto de límite de una función.

## **Propuesta de intervención didáctica**

### **Objetivos**

- Mejorar la propuesta docente en la enseñanza aprendizaje del concepto de Límites.
- Implementar como estrategia de aprendizaje el trabajo colaborativo.
- Lograr un manejo adecuado del paquete “**sketchpad**” para la enseñanza del concepto de Límites.
- Favorecer la motivación del alumno hacia las matemáticas.

### **Acciones**

El aula cuenta con 40 alumnos por lo que se formarán 8 grupos de 5 alumnos cada uno. Se programaron 2 actividades, la primera de ellas (ACTIVIDAD N° 1) tiene como propósito reforzar los conocimientos previos (FUNCIONES) por medio de un trabajo colaborativo (trabajo en grupos). Los alumnos ya han recibido la clase de funciones en los ciclos anteriores, por lo tanto esta actividad es importante porque reactivará los conocimientos con las que llega el alumno al curso de ANÁLISIS I. En esta actividad N°1, cada grupo recibirá 3 ejercicios que buscan revisar dos aspectos fundamentales de una función de variable real que son: Dominio y Rango de una función real y su gráfica. La idea es que los alumnos de cada grupo se dividan el trabajo de manera que en base a sus saberes previos puedan enfrentarse a la situación problemática de los ejercicios propuestos (los dos primeros ejercicios) para luego exponer sus descubrimientos con el resto de alumnos del grupo y confrontar sus ideas con los demás, teniendo al profesor como guía y facilitador del aprendizaje. Luego el grupo se enfrenta a una nueva situación problemática (3er ejercicio), en donde los conocimientos adquiridos individualmente por los integrantes y sus conclusiones en grupo les permitirán discutir, debatir, plantear y proponer una solución al nuevo problema, todo esto contara con la asesoría permanente del profesor. Finalmente los alumnos deben exponer al resto de compañeros haciendo uso de papelógrafos que previamente el profesor les ha proporcionado. Esta exposición con la colaboración del profesor se aclararan los

puntos que sean necesarios. En esta 1era actividad, hay dos grupos que recibirán el mismo material, y tiene una duración aproximada de 1 hora académica. A continuación doy una muestra de lo que harían el grupo 1 y 5.

### ACTIVIDAD Nro 1

#### Grupo 1 y 5

**1. Halle el dominio y rango de las siguientes funciones:**

$$a) f(x) = 2x^2 + 3x - 1 \quad b) f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

**2. Haga el gráfico de las siguientes funciones:**

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x} \quad b) f(x) = 3\sqrt{x-1} + 2$$

**3. Haga el gráfico de la siguiente función**

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } -8 < x < -2 \\ x^2 - 4, & \text{si } -2 \leq x \leq 4 \\ |x+3|, & \text{si } 4 < x \end{cases} \quad , e \text{ indique su dominio y}$$

rango

Con respecto a la segunda actividad (ACTIVIDAD Nro 2), en ella se introduce la noción del concepto de límite de una función real. Esta actividad también será realizada en grupo, y esta vez se formaran 10 grupos de 4 alumnos cada uno en donde cada grupo tendrá como reto analizar un problema diferente. Cada alumno en su respectivo grupo debe enfrentarse a una situación problemática, tomando como base sus saberes previos, estos serán apoyados por la participación del docente en la guía del mismo. Los alumnos exponen a sus compañeros de grupo sus descubrimientos, que podrían estar errados o no y se confrontan con los conocimientos de los demás. En este punto el grupo contara con una herramienta que es un paquete matemático llamado SKETCHPAD que les permitirá dilucidar ciertas dudas, básicamente en el comportamiento geométrico de las funciones. Finalmente para comprobar el aprendizaje del concepto a todos los grupos se les proporciona el ejercicio que dice PARA

*TODOS, de manera que en unos 10 a 15 minutos puedan dar respuesta a las preguntas de dicho ejercicio. Para esta 2da actividad hay dos grupos que recibirán el mismo material, tal como se mostrara mas adelante. Esta segunda actividad tiene una duración aproximada de 3 horas académicas.*

ACTIVIDAD Nro 2

GRUPO 1 y 6: **Dada la función:**  $f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x}$

- a) *Determine su dominio y rango.*
- b) *Complete el cuadro:*

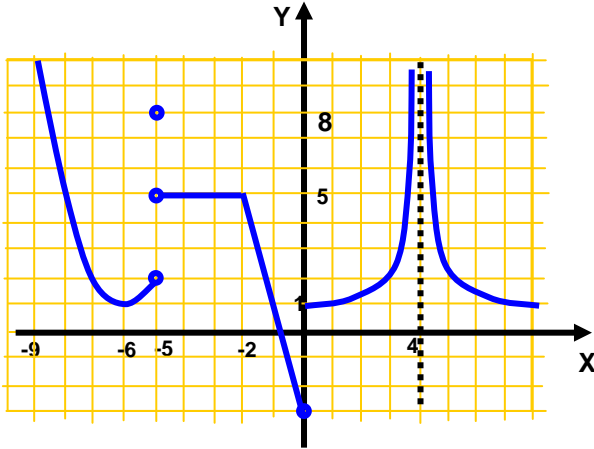
<b>x</b>	<b>f(x)</b>
<b>-7</b>	
<b>-6</b>	
<b>-5</b>	
<b>-4</b>	
<b>-3</b>	
<b>-2</b>	
<b>-1</b>	

*¿Ha encontrado usted dificultad para llenar el cuadro?, si es así, ¿A que crees que se deba?*

- c) *El equivalente de f(x) es g(x) = 4-x, ¿Si? , ¿No? ¿Porque?*
- d) *Si usted da valores a x cercanos a -4 , a que valor se aproxima f(x)  
Sugerencia: aproxítese con valores cercanos a -4 por la izquierda y derecha*
- e) *De acuerdo a lo calculado anteriormente ¿Puede Usted concluir en algo?*
- f) *Realice su grafica*

g) *Expresar con sus palabras que sucede con  $f(x)$  cuando “ $x$ ” se acerca a  $-4$ .*

**PARA TODOS:** Dada la siguiente gráfica de la función  $f$



Determine:

- El dominio y rango de  $f$
- Complete la tabla siguiente:

Valor de $a$	$f(a)$	Cuando $x$ se aproxima al valor de $a$ por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a	Se denota por	Cuando $x$ se aproxima al valor de $a$ por la derecha, $f(x)$ se aproxima a	Se denota por	¿Existe el límite en $a$ ?
-6						
-5						
-4						
-2						
0						
4						

## **Conclusiones**

En cuanto a la experiencia que he tenido como docente (asesoría de prácticas de Análisis I) y basado en el desarrollo de estas dos actividades descritas anteriormente, he podido apreciar las diferentes concepciones que tienen los alumnos con respecto al concepto de límites, muchas de ellas erróneas, pero también que al culminarla se ha logrado de los alumnos una respuesta satisfactoria en varios aspectos como:

- Que la mayoría de alumnos han aprendido el concepto de límites de una función al presentarlos de una manera más intuitiva.
- Que la mayoría de los alumnos aprenden a trabajar colaborativamente, respetando la opinión de sus demás compañeros.
- Que la mayoría de los alumnos empiezan a desarrollar capacidades de análisis y síntesis.
- Que la mayoría de los alumnos empiezan a abordar los problemas matemáticos por medio de diferentes estrategias.

Por lo tanto este trabajo tiene como principal intención que sirva a los docentes de Análisis una alternativa de cómo explicar o introducir el concepto de límites basado en un aprendizaje donde el alumno sea partícipe de la construcción de su propio conocimiento.

## **Recomendaciones**

- Preparar guías de aprendizaje que relacionen el nuevo concepto con los conocimientos previos del alumno. (modelo constructivista)
- Que se realicen en aula trabajos colaborativos.
- Usar correctamente las nuevas tecnologías y en el momento adecuado.

- Apoyar la intuición como medio de razonamiento y reflexión del concepto.
- Tener conciencia de la importancia de los aspectos afectivos y motivacionales.

## Referencias

Ayala, Francisco; Campos, Gerardo. (1998). Estrategias y técnicas didácticas en el rediseño. México: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Díaz, Marcos. (2006). Didáctica de la Matemática. Lima: Pontificia Universidad católica del Perú. Facultad de Educación.

Farfán, Rosa María. El curso de precálculo: Un enfoque gráfico. Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa 5(1), 206-211.

Ingeniería didáctica en precálculo. Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa 8(1), pp. 457-462.

Garbin, Sabrina. (2005) ¿Como piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol8, num 002, pp. 169-193.

Godino, Juan. (1994) Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática - Perspectiva de la didáctica de la matemáticas como disciplina científica.

Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 9, num 001, pp. 117-2150.

El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 10, num 002, pp. 191-218.

Blazquez, Sonsoles. (2006) Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 9, num 002, pp. 189-209.

Stewart, James. (1999) Cálculo, Conceptos y Contextos. México: Editorial Thomson.



# El uso de taps hexagonales para el desarrollo del pensamiento lógico

Iván Rojas Marticorena  
C.E.P. Salesiano “Santa Rosa” - Huancayo

## Resumen

Los taps hexagonales son instrumentos de juegos muy utilizados hoy en día y son de preferencia en juegos grupales de alumnos, en los recreos o juegos de amigos en el barrio.

El juego consiste en armar los taps hexagonales con números y usar los signos matemáticos de las operaciones básicas, intermedias y avanzadas según el nivel de que se encuentre. El niño debe tratar de formar ecuaciones (igualdades) en poco tiempo con los taps hexagonales.

Los taps los hay circulares, hexagonales, triangulares en el presente proyecto hemos elegido los hexagonales que se adaptan mejor a nuestros intereses, y abarcar los ámbitos de las matemáticas ya que hay trabajos que no se dedican a los niveles de transferencia y las dimensiones sociales.

En este sentido, la escuela, tiene como obligación crear las condiciones para el desarrollo del niño. Y esas, se hallan plasmadas cuando, la escuela selecciona el contenido de la actividad (entendiendo como contenido las condiciones de vida material) y la forma (la conciencia social), ejercitar y practicar constantemente las acciones que el docente le asigna para lograr su consolidación, reforzar los aprendizajes adquiridos, formar hábitos, cumplir las tareas asignadas, desarrollar la educación general de la comunidad y dar nuevas exigencias a los alumnos, hasta que finalmente sepa transformar su realidad. **Pero nuestra escuela de hoy no utilizan los juegos educativamente**, ya sea en función a mejorar el perfil del educando, en la clase, en el recreo, en diversas asignaturas etc. y en una acción de transferencia, el niño pueda aplicarlo en su casa, en la calle.

### **Objetivos de la actividad**

- Analiza los taps hexagonales y los caracteriza.
- Seleccionar el o los criterios de ordenamiento (lógicos, cronológicos, etc).
- Clasificar y ordenar estos rasgos.
- Determinar los objetivos de la observación.
- Operar y resuelve ejercicios mentalmente.
- Identificar las habilidades del pensamiento durante el juego.

### **Metodología**

Como método general se utilizará el Método Científico que permitirá la observación y formulación del problema de la influencia de los taps hexagonales en el desarrollo del pensamiento lógico.

Luego de ello, ayudará a la construcción de la hipótesis como respuesta a la interrogante de investigación, la operacionalización teórica de las variables, la confrontación y análisis estadístico de los resultados y la prueba de hipótesis.

En todo este método también se aplicarán métodos lógicos como la inducción y la deducción cuyo principio en el primero será a partir de observaciones aisladas y de la abstracción cuando se trata de la segunda.

### **Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.**



Habilidades del pensamiento lógico: **Observar, Identificar, clasificar, ordenar y generalizar**

**Ejercicios creados por los alumnos:**

- |                                    |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a. $75 \div 3 = 25$                | f. $68 - 7 = 3 \times 7 + 5 \times 8$ |
| b. $89 + 9 = 99 - 1$               | g. $27 - 2 = 18 + 7$                  |
| c. $33 \div 3 = 3 + 8$             | h. $54 \div 6 + 3 = 4 + 2 \times 4$   |
| d. $47 - 4 = 11 + 12 + 4 \times 5$ | i. $15 \div 3 = 5 \times 1$           |
| e. $4 - 13 = -9$                   | j. $49 \div 7 = 42 \div 6$            |

**Resultados**

**Cuadro resumen de las cantidades y porcentajes obtenidos antes de la aplicación de los taps hexagonales**

GRUPO CONTROL					GRUPO EXPERIMENTAL				
APROBADOS					DESAP.				
X	C	%	C	%	X	C	%	C	%
12.03	35	90	4	10	10.38	17	44	22	56

**Fuente:** Tabulación de datos de prueba de entrada.

Los resultados obtenidos de los alumnos antes de la evaluación de los taps hexagonales obtuvieron un promedio desaprobatario del 56% con las notas que oscilan entre 07 – 10 siendo la moda los calificativos de 10.

En cuanto a los alumnos aprobados solo el 44% aprobaron con calificativos de 11 y 13.

Estos resultados, al igual que el grupo control, reflejaron que el desconocimiento de las ecuaciones. Sin embargo al resultar la media aritmética mayor al del otro grupo, permitió determinar a este grupo como control y al que obtuvo menor resultado, se le eligió como grupo experimental.

**Cuadro resumen de las cantidades y porcentajes obtenidos después de la aplicación de los taps hexagonales**

GRUPO CONTROL					GRUPO EXPERIMENTAL				
APROBADOS					DES.				
X	C	%	C	%	X	C	%	C	%
12.67	39	100	0	0	14.44	39	100	0	0

**Fuente:** Tabulación de datos de prueba de salida.

Al finalizar la aplicación de los taps hexagonales, el grupo control obtuvo una media aritmética de 12.67.

Mientras que el grupo experimental obtuvo una media aritmética de 14.44, donde el 100% de alumnos aprobaron con notas comprometidas entre 12 y 17.

Los logros obtenidos en las ecuaciones fueron satisfactorios debido a la aprobación de todos los alumnos. Este resultado demuestra que los taps hexagonales han influido significativamente en el desarrollo del pensamiento lógico de conocer que operaciones mentales se están realizando al momento de ponerlos en práctica las habilidades de (identificar, clasificar, ordenar, generalizar y observar).

**Referencias**

Morales M. (2006). “Las fracciones según los pescantes”. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 3 - 19.

Santiago L. y Gonzalo T. (2006). “Abejas y geometría”. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 139 – 142.

# **El globo aerostático, un juego tradicional como una excelente estrategia para enseñar matemáticas**

Roberto Antonio Salvador  
Escuela Secundaria General para Trabajadores  
“Cinco de febrero”, México

## **Resumen**

La historia de un pueblo nos da la oportunidad de conocer las bases sobre las que sustenta su forma de ser y de actuar, conocer la historia, estudiarla, analizarla y entenderla para darle utilidad al presente, es un recurso que no debemos dejar a un lado en el terreno educativo.

El arraigo y respeto que las personas tienen por sus tradiciones y costumbres, son elementos importantísimos que el proyecto educativo de cualquier país no puede soslayar, dado que en él, podemos basar las propuestas metodológicas tendientes a elevar la calidad de la educación de nuestros pueblos.

La cultura ancestral de nuestros pueblos tiene el aval de las generaciones por las que ha pasado, generaciones que por años han puesto en práctica tradiciones y costumbres con enseñanzas de toda índole para sus semejantes.

Retomando de estas tradiciones y costumbres las actividades específicas de juegos recreativos, la presente ponencia lleva como objetivo destacar las grandes posibilidades que tenemos los docentes y personas cercanas al ámbito educativo de utilizar como un recurso didáctico incomparable las diversas expresiones culturales lúdicas de nuestros antepasados.

La importancia de retomar las actividades lúdicas recae en que el ser humano por naturaleza tiene por ellas un gusto innato lo cual nos permite lograr el conocimiento en nuestros alumnos a través de actividades de su interés y cuya efectividad esta comprobada por el mejor de los jueces, el tiempo.

En México la cantidad de juegos tradicionales son muchos y muy diversos estos dependen de las regiones en las que se asientan los diferentes grupos étnicos que conforman el mosaico cultural de mi país.

El presente trabajo pone a consideración la propuesta de utilizar uno de los tantos juegos tradicionales de México: “El globo aerostático”.

### **Pertinencia del tema abordado**

La oportunidad que he tenido de poner en práctica la utilización del globo aerostático como un recurso didáctico en las clases de matemáticas, me permite expresar las siguientes afirmaciones:

- a) El aprendizaje de los contenidos del programa de matemáticas adquiere una perspectiva diferente al trabajarse con interés, por lo que su comprensión es un aprendizaje sólido y significativo.
- b) Los contenidos de otras materias se pueden correlacionar con los de matemáticas al realizar estas actividades.
- c) Posibilita realizar un trabajo en equipo, lo que permite la socialización del conocimiento y por consecuencia la reafirmación del mismo.
- d) Despierta el interés en los alumnos, lo que es suficiente para que trabajen con entusiasmo y compromiso.
- e) Desarrolla la creatividad del alumno al pensar en las formas, colores, dimensiones, etc., con las cuales elaborara su trabajo.
- f) Fomenta la puesta en práctica de los valores universales o propios de la cultura en la que se desenvuelven.

- g) Permite valorar las tradiciones y costumbres de nuestros pueblos y países al resaltar de ellas las enseñanzas que nos transmiten.

Todas estas aseveraciones se refuerzan con la importancia de lograr un objetivo ambicioso y anhelado, despertar en nuestros alumnos el gusto y amor por las matemáticas, como primer paso para posteriormente alcanzar el interés académico por esta materia, lo que nos traería como consecuencia elevar el nivel de aprovechamiento de los alumnos de nuestro país.

### **Marco teórico**

El presente trabajo se fundamenta en las aportaciones de Vigotsky, dado que considera el aprendizaje como uno de los mecanismos fundamentales del desarrollo y que su modelo de aprendizaje considera que el contexto ocupa un lugar central por la importancia que tiene la interacción social como el motor del desarrollo, sobre todo por la importancia de dos aspectos: El contexto social y la capacidad de imitación.

Vigotsky también plantea la función que cumplen los procesos de enseñanza en el desarrollo intelectual a través del concepto de *Zona de desarrollo próximo*, que es la distancia existente entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.

El docente debe comprender que al emplear métodos participativos, es frecuente que se parta de las propias experiencias de los actores del proceso, para abordar la teoría e ir de ésta a la práctica, logrando así un aprendizaje más significativo. Además, dichos métodos y técnicas no pretenden la aceptación acrítica de la palabra del docente, sino que estimulan la búsqueda de la verdad a través del trabajo conjunto de indagación y reflexión, aproximando la enseñanza a la investigación científica, a la actividad productiva y social, brindando una mayor solidez a los conocimientos adquiridos.

El hombre no es un ser cuyas reacciones responden directamente a estímulos del medio, sino que, a través de su actividad se pone en contacto con los objetos y fenómenos de la realidad circundante, actúa sobre ellos, modificándolos y transformándose a sí mismo. Así aprende el alumno en la clase de matemáticas.

### **Análisis de resultados**

Con los resultados obtenidos de la evaluación diagnóstica, se procedió a realizar las actividades que constituyen el proyecto, las tendientes a la elaboración del globo aerostático, para después volver a aplicar el mismo instrumento y hacer los comparativos de los resultados arrojados, llegando a las siguientes conclusiones en cada uno de los contenidos considerados en la evaluación:

<b>CONTENIDO PROGRAMATICO EVALUADO</b>	<b>ANTES</b>	<b>DESPUES</b>
Identificación del triángulo isósceles	54 %	96 %
Clasificación de los triángulos por la medida de sus lados	19 %	69 %
Clasificación de los triángulos por la medida de sus ángulos	4 %	42 %
Definición de los ángulos adyacentes	0 %	62 %
Definición de las figuras geométricas congruentes	0 %	92 %
Trazo de un triángulo isósceles	69 %	98 %
Trazo de un trapecio isósceles	59 %	96 %
Trazo de un círculo	54 %	87 %
Expresar la tercera ley de Newton	0 %	54 %
Explicar por qué se eleva el globo aerostático	46 %	88 %
Definición de Tradición y Costumbre	69 %	96 %

Con los resultados obtenidos en la segunda aplicación del instrumento, podemos con certeza concluir que la realización de esta actividad, nos lleva a mejorar el aprendizaje de los contenidos de matemáticas

## Referencias

Acevedo, A. (1993). *Aprender jugando 2*. (3ª. reimpresión). México: Noriega Editores.

Aldaz, I. (1998). *Matemáticas y etnomatemáticas*. (1ª. ed.). México: Unidad de Proyectos Estratégicos.

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T., Quintero, R., (2001). *Libro para el maestro. Educación secundaria*. (2ª. ed.). México: SEP.

Bruner, J. (1995). *Juego, pensamiento y lenguaje*. (1ª ed.). México: U.P.N./S.E.P.

Gordillo, J. (1999). *Lo que el niño enseña al hombre*. (3ª. reimpresión). México: Editorial Trillas.

Izquierdo, C. (2002). *El profesor y su mundo*. (1ª. ed.). México: Editorial Trillas.

Kagan, J., Janeway, J., Mussen, P. (1979). *Desarrollo de la personalidad en el niño*. (11ª. reimpresión). México: Editorial Trillas.

Labinowics, E. (1998). *Introducción a Piaget*. (1ª. reimpresión). México: Pearson Educación.

Océano. (1997). *Enciclopedia Infantil y Juvenil*. (Vol.I). México: Edit. Océano.

Piaget, J. (1981). *Problemas de psicología genética*. (1ª. ed.). México: Editorial Ariel.



# Un entorno informático para la enseñanza de áreas de polígonos

Marisel Beteta Salas  
Colegio Peruano Británico

## Resumen

La experiencia se desarrolló con alumnos del segundo año del Colegio Peruano Británico, esta consistió en abordar el tema de áreas de Polígonos a través de un proyecto individual cuyo objetivo era que el alumno determine el área total que ocupa el colegio utilizando sus conocimientos acerca de áreas de polígonos, haciendo un uso adecuado de los medios informáticos como el google earth y el software Cabri. El proyecto se dividió en las siguientes etapas:

## Descripción de la experiencia

### a) Búsqueda de la información

Los alumnos debían informarse acerca de términos elementales que utilizarían en el desarrollo del proyecto, tales como noción de área, perímetro, trabajar en escala, cómo determinar el área de polígonos regulares e irregulares. Toda esta información sustenta el proyecto.

### b) Trabajo con el Google Earth (Laboratorio de Computo)

Los alumnos ingresaron al laboratorio del cómputo y a través del goofle earth obtuvieron una foto del colegio vista desde aire; gracias a este programa determinan el perímetro del colegio en metros y realizaron una impresión de esta vista.

### c) Trabajo en el aula

Primera parte: Cada alumno copió la imagen del perímetro del colegio en una hoja cuadrículada (puede

ser milimetrada), segmentaron el plano del colegio en polígonos cuyas áreas podrían ser determinadas a través de las fórmulas de áreas conocidas, en este caso se optó por triángulos, rectángulos y trapecios. Acudieron nuevamente al google earth para completar las medidas que necesitaban para determinar el área de cada uno de estos polígonos.

Segunda parte: Calcularon el área total con los polígonos que habían trazado e iniciaron una reflexión entorno a los resultados que obtuvieron.

d) Trabajo con el CABRI (Laboratorio de Computo)

Ingresaron al programa CABRI cuyo entorno ya les era conocido y procedieron a trazar el plano del colegio, utilizando las medidas que google earth les había ofrecido en los lados que determinan el perímetro del colegio, pueden trabajar en la escala que deseen.

Una vez terminado el polígono que da origen al colegio procedieron a determinar el área de manera muy sencilla. Compararon el resultado que arroja Cabri con los obtenidos por ellos y se realizó una reflexión entorno a ello donde algunos procedieron a realizar nuevamente el dibujo siendo más precisos en las medidas.

Luego de pasar por estas etapas otorgue a los alumnos la medida oficial que tiene el colegio y para sorpresa de muchos sus resultados no estaban nada lejos de esta medida, algunos mostraban una diferencia mínima, comprobando que los métodos que ellos utilizaron estaban siendo útiles y correctos.

e) Elaboración del Informe del Proyecto

Al finalizar las diversas etapas del proyecto, los alumnos elaboraron por escrito sus informes con las siguientes partes: Introducción, Desarrollo del proyecto (donde colocaron la información que recabaron en la primera

parte y los planos que utilizaron para su trabajo con sus respectivos cálculos), conclusiones y bibliografía.

### **Pertinencia del tema abordado**

El proyecto “Un Entorno Informático para la enseñanza de áreas de polígonos”, cumple con las características que proponen los esposos Van Hiele para la enseñanza de la geometría, ya que invita al alumno a pasar por los dos primeros niveles de razonamiento que son: el de visualización o reconocimiento y el nivel de análisis, para más adelante trabajar en otras actividades con los demás niveles de razonamiento.

El tema de áreas de polígonos resultó pertinente con el buen uso de las herramientas informáticas que los alumnos contaban, además reforzó de manera significativa los conocimientos que estos tenían acerca de áreas, ya que dicho tema se trabajó en la primaria.

### **Marco teórico**

El trabajo se basó en la Teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, y reforzó los dos primeros niveles de razonamiento de los cinco que propone esta teoría:

NIVEL 0: Visualización o reconocimiento

NIVEL 1: Análisis

NIVEL 2: Ordenación o clasificación

NIVEL 3: Deducción formal

NIVEL 4: Rigor

Para el desarrollo de la actividad se considero las fases de aprendizaje que propone esta teoría en el desarrollo de una secuencia didáctica, estos son los períodos por los que se tienen que pasar en cada uno de los niveles para alcanzar el siguiente.

- **Información.** Que se refiere a informar a los estudiantes del tema que se estudiará.
- **Orientación dirigida.** Que se refiere a la investigación, búsqueda, etcétera, de conocimientos principalmente por parte de los alumnos. En esta fase se construye la red mental que permitirá relacionar los conocimientos posteriormente.
- **Explicitación.** Que se refiere a la presentación y comparación de datos y conocimientos obtenidos entre el grupo. En este punto es importante que existan puntos de vista diferentes, y quizá divergentes, dentro del alumnado, ya que esto dará una mayor riqueza al mismo grupo y, al mismo tiempo, hará que el estudiante analice sus ideas, las ordene y las exprese con claridad.
- **Orientación libre.** Que se refiere principalmente a la aplicación de los conocimientos adquiridos en las fases anteriores y su interrelación y aplicación junto con otros conocimientos ya adquiridos.
- **Integración.** Esta fase se refiere a la acumulación, integración y comparación de conocimientos que se han adquirido, tratando de tomar conciencia en el uso de elementos implícitos de éstos.

## Desarrollo de algunos ejemplos

<b>FASES</b>	<b>EJEMPLO DE ACTIVIDADES REALIZADAS</b>
<b>INFORMACIÓN</b>	Comenzamos con recoger datos a partir de la pregunta ¿De que tamaño será el colegio? ¿Cuántos metros cuadrados conforman el colegio? Luego de discutir números, los alumnos reciben en el aula las orientaciones entorno al trabajo
<b>ORIENTACIÓN DIRIGIDA</b>	Desarrollan la primera y segunda parte del proyecto recurriendo al buen uso de las herramientas informáticas.
<b>EXPLICITACIÓN</b>	Trabajamos en el aula la tercera parte del proyecto, en este momento es importante el análisis de los primeros resultados que van obteniendo. Preguntamos otra vez: ¿Cuántos metros cuadrados conforman el colegio?
<b>ORIENTACIÓN LIBRE</b>	Trabajan en el Laboratorio de Computo la cuarta parte del proyecto aplicando sus conocimientos acerca de áreas para determinar gracias al CABRI el área del colegio. Comparan resultados.
<b>INTEGRACIÓN</b>	Reflexionan y elaboran sus conclusiones entorno al desarrollo de todas las fases del proyecto y las presentan por escrito junto al informe final del proyecto.

## **Análisis de resultados**

Los alumnos aprendieron de manera significativa el tema de áreas de polígonos, haciendo un uso inmediato de las nociones que iban adquiriendo y reforzando. El nivel de análisis propuesto en la teoría de Van Hiele se trabajó intensamente y permitió a los estudiantes ahondar en lo que significa analizar para cuestionar resultados. La utilidad de los recursos informáticos fue valorada y apreciada por los alumnos, disfrutando del trabajo en todo momento, manteniendo la motivación en el desarrollo del proyecto.

Los resultados en las evaluaciones acerca de este tema fue óptimo, utilizándose en adelante para trabajar perímetros y áreas con el álgebra, donde los alumnos no mostraron dificultades al aplicar estas nociones.

## **Referencias**

Modelo Van hiele para la didáctica de la geometría, por Fernando Fouz, Berritzegune de Donosti. Disponible en : <http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf>

“Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de van Hiele en la enseñanza de la Geometría Euclidiana en el nivel medio básico” por Noraís González González y Víctor Larios Osorio para obtener el título de Licenciados en Educación Media con especialidad en Matemáticas en la Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Bavanera". Disponible en: <http://www.uaq.mx/matematicas/origami/ejerc.html>

### **III COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

Los artículos que se presentan en esta publicación, resumen las conferencias, cursos, talleres y comunicaciones que se expusieron en el III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, realizado en la Pontificia Universidad Católica del Perú, del 11 al 13 de febrero de 2008. En ellos hay reflexiones y propuestas relacionadas con Las Matemáticas en el Contexto de las Ciencias, Los Entornos Informáticos para el Aprendizaje de las Matemáticas, La Formación de Profesores, Las Actitudes hacia las Matemáticas y la Estadística, La Intuición y el Rigor en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática y El Enfoque Ontosemiótico para la Cognición e Instrucción Matemática.

ISBN: 978-603-45391-0-5



9 786034 539105