**222**

# COMPLECIÓN DEL MODELO DEL "OVERSHOOTING" DE DORNBUSCH

**Ramón García-Cobián J.**

**Marzo, 2003**

DOCUMENTO DE TRABAJO 222
http://www.pucp.edu.pe/economia/pdf/DDD222.pdf

# COMPLECIÓN DEL MODELO DEL “OVERSHOOTING” DE DORNBUSCH

Ramón García-Cobián J.

## RESUMEN

El artículo intenta completar el modelo del “overshooting” de Dornbusch incluyendo explícitamente una ecuación dinámica para el mercado de dinero, pues éste es tratado sólo de manera intuitiva por Dornbusch como si se diera allí una velocidad de ajuste infinita. Luego de hacer notar algunos errores del trabajo original, se demuestra que las hipótesis hechas por Dornbusch bastan para que el modelo completado exhiba el “overshooting” deseado.

## ABSTRACT

The article tries to complete the "overshooting" model of Dornbusch, explicitly including a dynamic equation for the money market, because this is treated by Dornbusch only in an intuitive way, as if there were in it an infinite speed of adjustment. After pointing out some errors in the original work, it is shown that the hypotheses made by Dornbusch are sufficient for the completed model to exhibit the required "overshooting".

# COMPLECIÓN DEL MODELO DEL "OVERSHOOTING" DE DORNBUSCH

Ramón García-Cobián J.

## INTRODUCCIÓN

En su celebrado artículo: "Expectations and exchange rate dynamics", aparecido en el Journal of Political Economy, Vol.84, No.° 6 en 1976; R. Dornbusch se propone construir un modelo dinámico que dé cuenta del fenómeno observado del "overshooting" (desborde) del tipo de cambio. Para eso, plantea Dornbusch un modelo con tres variables endógenas: tipo de cambio, nivel de precios y tasa doméstica de interés. Entre estas dos últimas, se establece una perfecta correspondencia biunívoca (un difeomorfismo incluso) que le permite expresar siempre la tasa de interés en función del nivel de precios, con lo que el modelo se reduce a uno en dos variables endógenas. Asume Dornbusch que la velocidad de ajuste del tipo de cambio es mucho mayor que la del nivel de precios; y en el afán de facilitar al lector la comprensión de sus ideas, pasa a una descripción en la que el tipo de cambio se ajusta con velocidad infinita (ajuste instantáneo).

En el presente trabajo se procede a completar el modelo de Dornbusch introduciendo para el ajuste de el tipo de cambio una velocidad finita pero tanto mayor que la velocidad de ajuste del nivel de precios como se quiera, a fin de averiguar si así aún se presentaría el fenómeno del "overshooting". En lo que sigue se preserva la numeración de las ecuaciones del artículo original de Dornbusch.

En la primera sección sólo se repite lo declarado por Dornbusch en su artículo; en la segunda, se lo critica, y en la tercera, se presenta el modelo completo agregando una ecuación dinámica en el mercado de dinero acorde con las postulaciones de Dornbusch.

## 1. EL MODELO ORIGINAL DE DORNBUSCH

- ***Movilidad de capitales y expectativas:***

  Siendo $r$ la tasa doméstica de interés, $r^*$ la tasa de interés internacional (dada) y $x$ la tasa esperada de depreciación de la moneda doméstica, se tiene en todo momento que:

$$r = r^* + x \qquad (1)$$

Siendo $e$ el logaritmo del tipo de cambio corriente; $\bar{e}$ ,el logaritmo del tipo de cambio de largo plazo (conocida), y $\theta$ , un parámetro de ajuste, se tiene en todo momento que:

$$x = \theta(\bar{e} - e) \qquad (2)$$

- ***Mercado monetario:***

  Siendo $y$, $m$ y $p$ los logaritmos del ingreso real, de la cantidad nominal de dinero y del nivel de precios respectivamente, se tiene que hay equilibrio en el mercado de dinero si, y sólo si:

$$-\lambda r + \varphi y = m - p \qquad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene la ecuación[1]:

$$p - m = -\varphi y + \lambda r^* + \lambda\theta(\bar{e} - e) \qquad (4)$$

La ecuación (4) puede simplificarse introduciendo la oferta monetaria de equilibrio de largo plazo, $\bar{p}$ , definida como

$$\bar{p} := m + (\lambda r^* - \varphi y) \qquad (5)$$

[1] Hay que notar que esta ecuación sólo vale cuando se da el equilibrio en el mercado de dinero, pues ha usado la ecuación (3).

pues en el largo plazo $\bar{e} - e = 0$. Así, resulta la ecuación[2]:

$$e = \bar{e} - (1/\lambda\theta)\,(p - \bar{p}) \qquad (6)$$

- ***Mercado de bienes:***

  La tasa de incremento del precio del bien doméstico se asume proporcional a una medida de la demanda excedente:

$$\dot{p} = \pi\,(u + \delta\,(e - p) + (\gamma - 1)\,y - \sigma r) \qquad (8)$$

La ecuación (8) puede simplificarse introduciendo el tipo de cambio de equilibrio de largo plazo, $\bar{e}$, definido como

$$\bar{e} := \bar{p} + (1/\delta)\,(\sigma r^* + (1 - \gamma)\,y - u) \qquad (9)$$

y usando (1) y (2) para obtener[3]:

$$\dot{p} = -\,\pi\,((\delta + \sigma\,\theta)/\theta\,\lambda + \delta)\,(p - \bar{p}) \qquad (10)$$

Definiendo:

$$v := \pi((\delta + \sigma\,\theta)/\theta\lambda + \delta) \qquad (11)$$

se obtiene la ecuación $\dot{p} = -\,v\,(p - \bar{p})$, cuya solución es inmediata, a saber,

$$p(t) = \bar{p} + (p(0) - \bar{p})\exp(-\,v\,t) \qquad (12)$$

2 Ha de tenerse presente, que ésta, al igual que la ecuación (4), sólo vale en condiciones de equilibrio en el mercado de dinero.

3 Ver primer párrafo de la sección 2:La crítica, para notar por qué es incorrecta la ecuación (10).

A continuación, substituyendo (12) en (6), se obtiene la senda temporal del tipo de cambio:

$$e(t) = \bar{e} + (e(0) - \bar{e}) \exp(- v\, t) \qquad (13)$$

- ***El tipo de cambio de equilibrio***:

Dice Dornbusch:

"At every point in time the money market clears and expected yields are arbitraged. The positively sloped schedule $\dot{p} = 0$ shows combinations of price levels and exchange rates for which the goods market and money market are in equilibrium. The equation of the goods market equilibrium schedule (is):

$p = (\delta\lambda/(\delta\lambda + \sigma))\, e + (\sigma/(\delta\lambda + \sigma))\, m + (\lambda/(\delta\lambda + \sigma))\, (u + (1 - \gamma)\, y - \varphi\sigma/\lambda)$[4]." (pág. 1165)

"For any given price level the exchange rate adjusts instantaneously to clear the asset market. Accordingly, we are continously on the QQ schedule with money-market equilibrium and international arbitrage of net expected yields. Goods-market equilibrium, to the contrary, is only achieved in the long run". (pág. 1166)

## 2. LA CRÍTICA

- ***Mercado de bienes:***

La ecuación (10) no se obtiene sólo simplificando la ecuación (8) al introducir la (9) y las (1) y (2), como dice Dornbusch, pues éste ha introducido, además, la ecuación (6). Por lo tanto, la (10) sólo vale cuando se dé equilibrio en el mercado de dinero. En cambio, la simplificación anunciada por Dornbusch da como ecuación de validez general equivalente a la (8) la siguiente:

$$\dot{p} = - \pi\, ((\delta + \sigma\, \theta)\, (\bar{e} - e) + \delta\, (p - \bar{p})) \qquad (10')$$

[4] Nótese, de pasada, que en esta ecuación de Dornbusch (nota 7 de pie de página) hay un error algebraico, ya que el término $(1 - \gamma)\, y$ debe ir precedido del signo menos y no del más.

Ha de concluirse, entonces, que las ecuaciones (12) y (13) sólo representan las sendas temporales del nivel de precios y del tipo de cambio cuando hay permanente equilibrio en el mercado de dinero, ya que éste equivale a la ecuación (6) que ha usado Dornbusch para obtener su ecuación (10).

- ***El Tipo de cambio de equilibrio:***

Dice Dornbusch que su ecuación de la nota 7 de pie de la página 1165 corresponde a $\dot{p}$ =0 y que en sus puntos se tiene equilibrio simultáneo en los mercados de bienes y de dinero:

"The $\dot{p}$ = 0 schedule represents combined goods- and money market equilibrium. Setting $\dot{p}$ = 0 $\dot{p}$ = 0 in (8) and substituting for the domestic interest rate from (3) yields the equation of the goods-market equilibrium schedule:

$$p = (\delta\lambda/(\delta\lambda + \sigma))\, e + (\sigma/(\delta\lambda + \sigma))\, m + (\lambda/(\delta\lambda + \sigma))\, (u + (1 - \gamma)\, y - \varphi\sigma/\lambda)\text{''}.$$

Esto no es correcto, pues los puntos del espacio de las variables e y p que corresponden al equilibrio en el mercado de bienes son los que se obtienen haciendo $\dot{p}$ =0 en la (8) e intersecando con la ecuación $r = r^* + \theta\,(\bar{e} - e)$ que resulta de las (1) y (2); equivalentemente, resultaría de hacer $\dot{p} = 0$ en la ecuación (10´). Por esa razón, el único punto del espacio (*e-p)* que corresponde a equilibrio simultáneo en los mercados de bienes y de dinero es el ($\bar{e}, \bar{p}$). Nótese, de pasada, que la pendiente de la recta correspondiente a $\dot{p}$ =0 en el plano (*e-p)* no es menor que 1, como indica Dornbusch, sino mayor que 1, pues sale de:

$$p = (1+\sigma\theta/\delta)\, e + \bar{p} - (1+\sigma\theta/\delta)\, \bar{e}\,.$$

- ***El ajuste dinámico:***

En la introducción de su artículo dice Dornbusch que asume que las tasas de cambio y los mercados de activos se ajustan rápido en relación al mercado de bienes:

"In fact, the dynamic aspects of exchange ratedetermination in this modelarise from the assumptionthat exchange rates and asset markets adjust fast relative to goods markets. (pág. 1162)".

Sin embargo, en la sección D de su artículo dice que para cualquier nivel de precios dado, el tipo de cambio se ajusta instantáneamente para vaciar el mercado de activos:

"For any given price level the exchange rate adjusts instantaneously to clear the asset market. Accordingly, we are continuously on the QQ schedule with money-market equilibrium and international arbitrage of net expected yields. Goods market equilibrium, to the contrary, is only achieved in the long run" (pág. 1166).

Es claro que de la primera declaración sólo se sigue que el cociente de la división de las velocidades de ajuste en las tasas de cambio y los mercados de activos entre la velocidad de ajuste en el mercado de bienes es "muy grande", mas no que sea infinito (cosa, por lo demás, inaceptable por carente de significado, y aceptable sólo como una parábola inspiradora).

Consecuentemente, es preciso completar el modelo dinámico del "overshooting" de Dornbusch en los términos significativos de su introducción con el fin de ver si dicho modelo reproduce aún el fenómeno del "overshooting".

## 3. EL MODELO COMPLETO

Para ello, en vista de que las ecuaciones (1) y (2) establecen una perfecta correspondencia biunívoca (en verdad, un difeomorfismo lineal) entre la tasa de interés doméstica y el tipo de cambio: $r = r^* + \theta (\overline{e} - e)$; bastaría con disponer de dos ecuaciones dinámicas en el espacio de las variables endógenas: tipo de cambio y nivel de precios. Una ya está disponible: es la (10´). La otra (no dada por Dornbusch pero acorde con el "espíritu" de su artículo) sería una que estableciera la velocidad del ajuste del tipo de cambio como proporcional a la demanda excedente en el mercado de dinero (principio usado para la hipótesis del ajuste dinámico del nivel de precios en el mercado del producto):

$$\dot{r} = \rho((-\lambda r + \varphi y) - (m - p)) \qquad (10´´)$$

Ahora bien, en vista del difeomorfismo entre r y e, y con la ecuación (5), se obtiene finalmente la ecuación:

$$\dot{e} = (-\rho/\theta)((p - \overline{p}) + \lambda\theta(e - \overline{e})) \qquad (10^*)$$

Así, el modelo dinámico acorde con lo que Dornbusch se propuso en su introducción consiste en las ecuaciones (10´) y (10*), entendiendo que las únicas variables endógenas son e y p, y que el parámetro de ajuste en el mercado de dinero, $\rho$, es "muy grande" relativamente al parámetro de ajuste en el mercado de bienes, $\pi$. Es decir, más precisamente, que importa ver si, cuando el cociente $\pi/\rho$ crece más allá de todo límite, aún se presenta el fenómeno del "overshooting".

El sistema, escrito en notación matricial, es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho\lambda & -\rho/\theta \\ \pi(\delta+\sigma\theta) & -\pi\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda\rho\overline{e} + (\rho/\theta)\overline{p} \\ -\pi(\delta+\sigma\theta)\overline{e} + \pi\delta\overline{p} \end{bmatrix},$$

con $\rho/\pi$ "muy grande".

Es éste un sistema lineal cuya matriz, por tener traza negativa y determinante positivo, es regular; entonces existe un único equilibrio, a saber, el $(\overline{e}, \overline{p})$ y él es asintóticamente estable.

Representando la matriz del sistema mediante $A = \begin{bmatrix} -ka & -kb \\ c & -d \end{bmatrix}$, con $a:=\pi\lambda$, $b:=\pi\theta$, $c:=\pi(\delta+\sigma\theta)$, $d:=\pi\delta$ y $k:=\rho/\pi$; todos positivos y k "muy grande", es cuestión de cálculos directos comprobar que sus valores propios son ambos negativos y distintos, y que tienden a menos infinito cuando k tiende a infinito. En efecto, ellos son dados por:

$$(\tfrac{1}{2})\left(-(ka+d) \mp (ak-d)(1-4bck/(ak-d)^2)^{1/2}\right)$$

Sus correspondientes vectores propios son dados por:

$$(d+\lambda_1, c) \text{ y } (d+\lambda_2, c)$$

Por ende, el diagrama de fases es como el que se presenta en el **anexo 1**, y en el que puede verse el "overshooting". Además, puede advertirse que la trayectoria dibujada por Dornbusch en la figura 1 de la página 1166 de su artículo es incorrecta, pues los cruces de todas las trayectorias con la recta QQ han de ser necesariamente verticales, esto es, curvas de tangente vertical.

## 4. CONCLUSIÓN

A la luz de lo mostrado, puede afirmarse que la intuición de Dornbusch acertó al escoger sus hipótesis de partida en tanto que ellas permiten completar su modelo de tal manera que el fenómeno del "overshooting", que era lo que él se propuso explicar, sí que aparece como consecuencia necesaria al producirse en un momento dado una súbita emisión monetaria ceteris paribus.

## Referencias Bibliográficas


Dornbusch, R.

1976 "Expectations and Exchange Rate Dynamics." Journal of Political Economy, 6: 1161−1176.

**ANEXO 1**