J. Óscar Trelles Montero

Apuntes de Lógica Modal

Pontificia Universidad Católica del Perú

Fondo Editorial 2001

J. Óscar Trelles Montero

Apuntes de Lógica Modal

Pontificia Universidad Católica del Perú
FONDO EDITORIAL 2001

Primera edición: noviembre de 2001

Apuntes de Lógica Modal

Diseño de carátula: Christian Escajadillo

Católica del Perú. Plaza Francia 1164, Lima-Perú.
Teléfonos: 330-7410, 330-7411
E-mail: feditor@pucp.edu.pe

Hecho el Depósito Legal: 1501362001-3809
ISBN: 9972-42-432-4

Impreso en el Perú – Printed in Peru

a la memoria de mi querido hermano Lucho

INTRODUCCIÓN

El propósito de estos apuntes de lógica modal es brindar una ayuda a los estudiantes de filosofía que desean adentrarse en este apasionante campo. El libro fue concebido a partir de las clases de un curso introductorio de un semestre para estudiantes de filosofía, sus borradores se han empleado en el curso desde 1994 hasta el presente.

Para este fin, el texto se ha centrado en el dominio de las nociones formales introductorias. El enfoque semántico, privilegiado en el texto, se desarrolla en base a un sistema de diagramas tomado de Hughes y Cresswell, extendido a la lógica temporal y deóntica siguiendo los lineamientos de Bailhache.[1] Sistema de diagramas que permite un seguimiento bastante intuitivo de lo que ocurre en los mundos posibles. En el aspecto sintáctico se trabaja un método de deducción natural continuación del que se presenta en Trelles y Rosales [108] [2] y que nos enseñara, en su versión para la lógica clásica, nuestro estimado profesor Walter Redmond en los 70.[3]

---

[1] Véase [63], [7] y [8] en la bibliografía.

[2] Véase [30] y para la lógica modal [71].

[3] Durante la revisión de este texto nos ha llegado *Lógica simbólica para todos* (Xalapa:Universidad Veracruzana, Textos Universitarios, 1999) del Prof. Redmond que cubre desde la lógica de primer orden hasta los temas modales que aquí presentamos. Y siempre con la claridad, precisión e interesantes ejemplos históricos que caracterizan sus enseñanzas.

Un estudiante que desee profundizar sus conocimientos de lógica no puede obviar el manejo de la lógica modal: es la primera y más natural de las extensiones de la lógica clásica. Ofrece un campo de investigación y de desarrollo no agotado como lo demuestra una rápida lectura de los índices de las revistas especializadas.[4] Pero, el curso se justifica también para alumnos de filosofía que no tienen pensado dedicarse a la lógica. Brevemente queremos mencionar algunas razones

En primer lugar, el debate de lo que podemos llamar los límites del positivismo lógico ingenuo está íntimamente ligado al debate del lugar de la lógica modal, en la polémica entre Carnap y Quine. En particular la crítica de Quine a la lógica modal replantea tesis aristotélicas en la discusión entre extensión e intensión; discusión central para su pobre valoración de la lógica modal. Y casi sin querer, pero como muchas veces ocurre en las disciplinas filosóficas, nos lleva a consideraciones que tradicionalmente se adscriben al campo de la ontología. En segundo lugar, la aproximación formal a los temas del deber (modalidad deóntica) brindan una perspectiva adicional a la reflexión ética. En estos temas es clásico mencionar el problema, que discutió Aristóteles, de los futuros contingentes y la libertad. En tercer lugar podríamos mencionar que una reflexión sobre el mundo no puede dejar de lado su temporalidad, y la lógica modal, en su

---

[4] Por ejemplo: *Teorema*, el *Journal of Logic, Language and Information*, el *Journal of Philosophical Logic*, el *Notre Dame Journal of Formal Logic* o *The Journal of Symbolic Logic*.

versión temporal, es un instrumento adecuado para su análisis. Si además mencionáramos los problemas y temas de la historia de la filosofía que se enriquecen al plantearlos en un contexto modal, llenaríamos varias páginas, un ejemplo es el texto de Knuuttila sobre la filosofía medieval.[5]

Para quien desee emplear este texto en un curso para estudiantes de filosofía, es aconsejable acompañarlo con la lectura y discusión de algunos textos. En este sentido, nosotros hemos utilizado con provecho textos de Quine como: el capítulo VIII de *Desde un punto de vista lógico* y *Three Grades of Modal Involvement.*[6] Oponiéndolos a *Identidad y necesidad*[7] de Kripke. La comprensión de estos autores se facilita enormemente acompañando su lectura con la del excelente libro de Jaime Nubiola sobre estos autores. Las recopilaciones de artículos *Antología de la lógica en América Latina* y *El análisis filosófico en América Latina*[8] proporcionan muy buen material sobre temas de lógica deóntica y temporal.

No podemos dejar de mencionar la inspiración recibida en las discusiones que, en torno al texto de Gardies,[9] surgieron en lo que José Carlos Ballón, en su importante e interesante *Un cambio en nuestro paradigma de ciencia*,[10] ha llamado

---

[5] Véase [69].

[6] Tenemos una traducción personal disponible para quien se arriesgue a solicitarla.

[7] En [109].

[8] [20] y [49] en la bibliografía.

[9] Véase [40].

[10] Concytec, Lima 1999.

'un peculiar grupo de discusión' (es el seminario de lógica del instituto Riva-Agüero). Reuniones que animaron con su presencia constante Ramón García Cobián, Diógenes Rosales, Luis Bacigalupo, Glenny Sotomayor, Patricia Mendoza, Eduardo Cáceres y tantos otros que nos visitaron. A todos ellos, y a los alumnos de los cursos de lógica modal, mi mayor agradecimiento por su ayuda, valiosa inspiración, preguntas pertinentes y crítica aguda. También deseo agradecer, una vez más, al Fondo Editorial de la PUCP por su apoyo en la publicación del texto, y en especial a Estrella Guerra y Nelly Córdova por el cuidado puesto en su edición. Demás está decir que los errores e imperfecciones del texto solo se originan en el autor.

Lima, enero de 2000

Capítulo I

Las nociones modales

I-1 Las proposiciones necesarias

Los cursos de lógica clásica de primer orden nos han acostumbrado a considerar la verdad y la falsedad de las proposiciones como características o propiedades antagónicas y excluyentes de estas. Más aún, podríamos decir, como las únicas propiedades relevantes de las proposiciones. En general a las proposiciones o enunciados,[1] no solo las podemos clasificar en verdaderas y falsas sino también de muchas otras formas atendiendo a otras distinciones. Una interesante es la que aparece cuando entran en consideración los fundamentos para considerar un enunciado verdadero. Es decir, cuando entran en consideración los fundamentos epistemológicos del enunciado. Así, atendiendo a su fuente, podemos dividir a las proposiciones verdaderas en las que provienen de una fuente empírica y las que provienen de una ciencia deductiva. Los enunciados empíricos verdaderos son los ejemplos de elección de lo contingente, pues generalmente no son considerados verdaderos por necesidad. Es decir, se refieren a lo que de hecho ocurre en el mundo, pero pudiera no ocurrir, o a lo que de hecho no ocurre, pero pudiera ocurrir.

---

[1] En este texto utilizaremos «proposición» como sinónimo de «enunciado».

En cambio, los enunciados verdaderos de las ciencias deductivas, que esconden siempre un carácter condicional, son necesariamente verdaderos. Como señala Quine, si hemos agotado con la distinción anterior todo el campo de los enunciados verdaderos, no necesitamos propiamente hablar de enunciados necesarios. Pues a lo más podríamos calificar de necesarios los enunciados deductivos, pero en ese caso bastaría con decir que son enunciados válidos en tal o cual teoría. Pero los filósofos han supuesto desde antiguo que existen enunciados verdaderos no considerados en la anterior división, enunciados que meritan se los llame 'verdaderos por necesidad', o simplemente 'necesarios'.

¿Cómo calificar el enunciado de Parménides: «El ser es y el no ser no es», sino de necesario? Cuando Kant distingue a las proposiciones analíticas de las sintéticas por sus condiciones de veracidad, ¿no es acaso porque supone que las analíticas son verdades necesarias? ¿Dónde encasillar al célebre *cogito ergo sum* cartesiano? Así pues, si el tema de lo necesario puede ser baladí para muchos parece que por lo menos para los filósofos es central; su actividad parece indefectiblemente ligada al campo de lo necesario. Solo este hecho merita que exploremos el campo de la lógica modal.

Reconsiderando con unos ejemplos lo dicho tenemos, entonces, entre las proposiciones verdaderas unas contingentes como:

(1) El promedio de las precipitaciones durante el fenómeno del Niño supera en más de un 30% las que ocurren en un año promedio.

Y otras necesarias como:

(2) 7+5=12

(3) Si todos los hombres son mortales y Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal.

Las verdades de la lógica, como (3), son necesarias. Constituyen el ejemplo trivial de proposición necesaria. Probablemente el lector ha estudiado varias en cursos previos de lógica. Este es un sentido de necesario que llamaremos estrecho. En un sentido muy similar tenemos, además, las verdades de la matemática. Entre ambas, lógica y matemática, cubrimos el campo de las ciencias deductivas. Las proposiciones de estos campos las consideraremos, como lo hace la mayoría de los autores, necesarias. En un sentido de necesario más amplio, y filosóficamente más interesante, tenemos oraciones como:

Un soltero es un varón no casado.

Si una cosa es roja, entonces está coloreada.

Ningún número es un ser humano.

El hombre es la medida de todas las cosas, de las que son en cuanto son y de las que no son en cuanto no son.

> Toda persona tiene conciencia en algún instante del tiempo.
>
> Nadie tiene un lenguaje privado.
>
> Nunca ha habido un tiempo en el que hubo espacio pero no objetos materiales.

Todas debatibles y debatidas, pero que de ser verdaderas o falsas parecen serlo por razones no empíricas. Este sentido amplio de necesidad es más interesante que el de la simple verdad lógica (o matemática), y merita que se amplíe el campo de estudio de la lógica de primer orden a una que incorpore estas nociones. Una lógica que las incorpore no en su individualidad concreta, es decir, si tal o cual enunciado es necesariamente verdadero, sino en las consecuencias necesarias que acarrea la posibilidad de verdades no formales y no contingentes.

Por otro lado, este sentido de necesidad que nos interesa y que hemos ejemplificado, siendo más amplio que el puramente lógico, es a su vez más reducido que algunos otros tipos de necesidad que aparecen en el habla común. Por ejemplo, la necesidad causal o natural asociada a la forma y contexto histórico de la realidad:

> El viaje de San Martín, de Lima a Guayaquil, para encontrarse con Bolívar demoró 2 horas.

Es una proposición imposible, si sabemos lo que era la Sudamérica de inicios del siglo XIX. Pero no es imposible desde un punto de vista puramente lógico. Es más, hoy en día es posible. Para un ser humano realizar las hazañas de Súperman es imposible naturalmente, biológicamente, físicamente, pero no desde un punto de vista puramente lógico. Así, no confundiremos un tipo de necesidad con el otro. Pero acá no vamos a dedicarnos a distinguirlos uno de otro, por ahora, solo nos interesa tener unos cuantos ejemplos. Nuestro estudio se dedicará principalmente a estudiar la necesidad formalmente y con un alto grado de generalidad.

Tampoco debe confundirse lo que es necesario, en el sentido que nos interesa, con lo que es racional creer, pues, tenemos ejemplos de que lo que un humano cree es a veces imposible. Un buen ejemplo de esto lo constituyen las personas que todavía buscan un método para resolver el clásico problema de la cuadratura del círculo, cuya imposibilidad ha sido probada. Lo que un hombre acepte o rechace por consideraciones epistemológicas no influye en el concepto de necesidad que es uno puramente lógico. Regresaremos más adelante sobre esto. Esta distinción general, entre lo epistemológico y lo lógico, permite apreciar que lo mismo ocurre con otras nociones epistemológicas: lo autoevidente y lo a priori no son lo mismo que lo necesario. Un buen ejemplo que muestra que estas nociones no deben confundirse, lo constituyen las verdades de la matemática, que requieren de una demostración compleja, son verdades necesarias pero no evidentes.

Ejercicios

1) a) ¿Qué tipo de modalidad puede asociarse con cada una de las siguientes proposiciones? Es decir, ¿son necesarias, imposibles o simplemente asertóricas?

    i) La civilización de la Europa continental tomó contacto con la civilización incaica.

    ii) Los primeros años de la República se caracterizaron por una gran anarquía política.

    iii) Todo ser humano vive eternamente.

    iv) Los cuerpos se atraen en razón directa a su masa e inversa a su distancia.

    v) Los solteros son varones no casados.

   b) En el caso de las proposiciones anteriores ¿Cambia su modalidad si se trata de una modalidad histórica? ¿Si de una física?

I-2 Los mundos posibles y las nociones modales

El tratamiento de la lógica modal, es decir, de la lógica que incorpora las nociones de necesidad y posibilidad, se asocia desde los 50 con la llamada teoría de los mundos posibles. Presentamos a continuación está teoría de un modo intuitivo siguiendo muy de cerca la presentación del tema que hacen Bradley y Swartz, en un hermoso texto[2] de introducción a la lógica cuya lectura recomendamos.

---

[2] Véase en la bibliografía [17]. En el texto los números entre corchetes, como [17], refieren a la bibliografía.

I-2.1 Los mundos posibles

A) El dominio de lo posible

Consideremos los siguientes relatos:

«Os he descrito con las (sic) mayor veracidad posible el modo de ser de un Estado al que considero no solo el mejor, sino el único digno, a justo título, de tal nombre. En otros sitios se habla del bien público, pero se atiende más al particular. En Utopía en cambio no existe nada privado, se mira únicamente a la común utilidad. ... Entre los utópicos ... siendo todo común, nadie teme carecer de nada, con tal de que estén repletos los graneros públicos, de donde se distribuye lo necesario con equidad. Por eso no conocen pobres ni mendigos y sus habitantes son ricos aunque nada posean».[3]

«El año es 4272 D.C. Lazarus Long tiene 2360 años de edad. Aunque ha estado a punto de morir muchas veces, él no ha -como su tocayo bíblico- requerido de una intervención milagrosa para recuperarse. Él simplemente se chequea en (o es llevado a la fuerza a) una clínica de rejuvenecimiento de tiempo en tiempo. La última vez que oímos de él estaba en rejuvenecimiento otra vez. El año es ahora 4291 y Lazarus está siendo tratado en su propia clínica móvil portátil a bordo de su yate espacial "Dora" después de haber viajado atrás en el tiempo a su lugar de nacimiento en

---

[3] [86].

Kansas y ser "mortalmente herido" en las trincheras en "algún lugar de Francia"».[4]

En una narración se nos presenta una sociedad sin «patologías sociales», compara países y sociedades reales con un estado, Utopía, no real. En la otra se mezclan personajes ficticios como Lazarus con otros que han existido como el presidente Wilson; también reúne lugares reales y hechos ocurridos con otros propios a la novela.

En la narración y en la novela se narran hechos que han podido ocurrir, situaciones que podrían darse. ¿Cuánto es creíble? ¿Cuánto es real? Al margen de lo que históricamente ocurrió, siempre es posible suponer (y esto se llama suposición contrafáctica) algo distinto. Expresiones que utilizamos mucho en la vida diaria son:

> Lo que pudo ser.
>
> Lo que puede estar ocurriendo.
>
> Lo que podría ser.

Pues constantemente en la vida diaria y desde un punto de vista práctico necesitamos considerar alternativas distintas y sus consecuencias.

«Lo actual está rodeado por un campo infinito de posibilidades. O como podríamos decirlo de otra forma, nuestro

---

[4] [17] p. 1. El párrafo originalmente pertenece a la novela *Time enough for love* (*Tiempo suficiente para amar*) de Robert A. Heinlein (New York: G.P. Putman's Sons, 1973).

mundo actual está rodeado de una infinidad de mundos posibles».[5]

¿Podemos definir una sociedad perfecta?, ¿Es posible un grupo humano en el que lo que debe ser sea?

¿Podemos aceptar que Lazarus pueda ser rejuvenecido n veces?, ¿Podemos creer en los viajes hacia atrás en el tiempo?, ¿Puede alguien regresar en el tiempo y autoengendrarse?, ¿Puede alguien matar a sus padres antes de que lo engendren y no nacer?

Probablemente discreparemos en las repuestas a estas preguntas y habrá quien responda afirmativamente a todas. Pero lo que no puede ocurrir es que pensemos que los viajes a través del tiempo ocurrirán y no ocurrirán en un futuro, que las leyes se cumplirán y desobedecerán al mismo tiempo. Es decir, lo patentemente contradictorio no es posible. Un mundo en el que algo ocurre y no ocurre al mismo tiempo es imposible. Lo posible está atado no por grandes cadenas sino por finos y sutiles lazos lógicos.

B) Posible no es lo mismo que concebible

Reforcemos la distinción entre la esfera de lo mental y la lógica que empezamos al distinguir necesario de creencia racional. Comúnmente se asocia lo posible con lo que se

---

[5] [17] p. 2.

puede pensar. Esa asociación parece que estableciera que lo posible depende de la mente humana y que, por tanto, en última instancia es un tema de la psicología. Aunque posible y concebible son conceptos que se solapan, hay diferencias entre ambos. Veámoslo con ejemplos:

1) En una época no era concebible que la tierra fuese redonda o que el sol no girase alrededor de ésta, lo que no impidió que siendo ambos el caso ambos fueran posibles. Es decir, algo no concebible humanamente es posible.

2) Por muchas centurias, las matemáticas esperaron encontrar un método, usando solo regla y compás, que permitiera hallar un cuadrado de igual área que un círculo dado; es decir, resolver el problema conocido bajo el nombre de «la cuadratura del círculo». Y si lo plantearon es porque lo consideraron concebible, pero hoy sabemos que es imposible con esos instrumentos. Así, podemos afirmar que algo imposible es concebible.

Como lo muestran los ejemplos, lo concebible no es una condición ni necesaria ni suficiente de lo posible. ¿Cuáles son entonces las condiciones de lo posible? Es tentadora la respuesta: un mundo concebible sin inconsistencia o un mundo coherentemente concebible. Pero esta respuesta tiene problemas:

Desde un punto de vista filosófico, basar la noción de posibilidad de alguna forma en la esfera de lo mental trae el peligro del psicologismo. El psicologismo consiste en reducir la lógica a la psicología humana. Es decir, sustentar una propiedad formal en un hecho empírico: la forma de razonar de un tipo de primates. Es algo así como basar el teorema de Pitágoras en la manera que tienen los humanos de percibir el espacio. Lo erróneo de esta postura fue ampliamente discutido por filósofos y lógicos tan distinguidos como: Frege y Husserl[6] entre otros y a ellos remitimos al lector.

Lo concebible no se confunde con lo posible. Si deseamos darle un contenido intuitivo a la noción de mundo posible podemos usar la siguiente aproximación:

> Intuitivamente, queremos incluir, entre los mundos posibles, mundos en los que hay más objetos que en el actual (p. e., en el que la tierra tiene dos lunas); mundos en los que hay menos objetos que en el actual (p. e. uno en que la tierra no tiene ninguna luna); mundos en el que los mismos objetos que en el actual existen pero tienen diferentes propiedades (i.e. en los que los supuestos "canales" de Marte son, después de todo, reliquias de una civilización pasada); y así por el estilo. E intuitivamente también, queremos incluir, entre los mundos imposibles, mundos en los que los círculos pueden ser cuadrados, mundos en los que hay una raíz cuadrada par de nueve, mundos en

---

[6] Husserl [64], Frege [32].

los que los viajes en el tiempo ocurren y no ocurren, y así por el estilo.[7]

El hecho de que para un tema concreto como las constituciones perfectas o los viajes en el tiempo no podamos decidir si son posibles o no, no borra la distinción entre mundo posible y mundo imposible.

I-3 Mundos posibles y mundo real

Detengámonos un instante a considerar qué es un mundo posible como el mundo actual. El mundo real (o actual) no es solo el planeta Tierra, o solo el sistema solar, sino todo el universo, lo que hay en su totalidad. Y no solo lo que es tal como es ahora, sino lo que es en un sentido intemporal; mundo actual es todo lo que es, ha sido y será. Casi por definición solo la nada, lo que no es, se escapa de lo real.

El mundo real en tanto existe es posible, por lo tanto es un mundo posible. Pero claramente no todo mundo posible es real. Y si los otros mundos posibles no son el mundo real ¿Dónde están? «Otros, no actuales, mundos posibles, no están localizados en ningún lugar en el espacio físico. Ellos están localizados, si lo están, en el espacio concep-

---

[7] [17] p. 4.

tual; o más bien, como preferimos decir, en el espacio lógico».[8]

Si partimos fijándonos en el mundo actual podemos decir, siguiendo a Wittgenstein,[9] que el mundo es la totalidad de los hechos (*states of affairs*) existentes. Donde por hecho se entiende aproximadamente: arreglo de objetos, individuos o cosas que poseen varias propiedades y tienen varias relaciones unos con otros. En vez de «propiedades» o «relaciones» también se usa el término «atributos».

Así, los mundos pueden diferir de tres maneras fundamentales. Pueden tener las mismas cosas (individuos, objetos), pero diferir en los atributos que dichas cosas muestren o ejemplifiquen. Pueden tener otras cosas diferentes (y, por tanto, diferir también en los atributos) o pueden carecer de algunas cosas (y, por tanto, diferenciarse también en los atributos). Cuando veamos la llamada lógica cuantificacional modal, nos ocuparemos de estos temas que tratan formalmente asuntos que tradicionalmente se agrupan bajo la denominación de ontología.

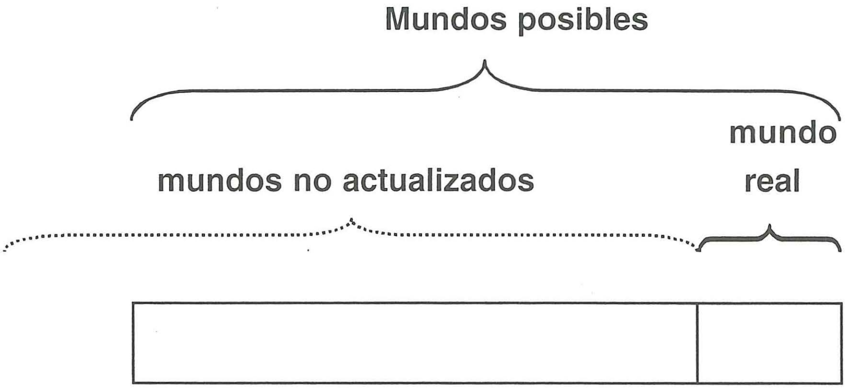
---

[8] [17] p. 5.

[9] Wittgenstein [116].

Bradley y Swartz grafican esto de la manera siguiente:

Esquema:[10]



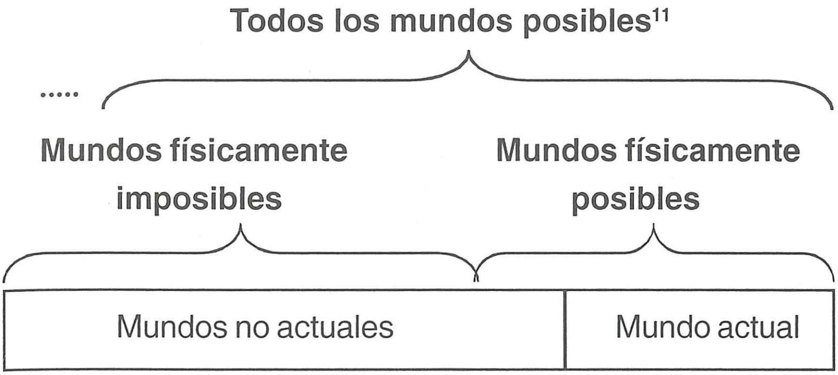
Nótese: 1) Los puntos de la llave de mundos no actualizados que indica que los mundos no actuales son infinitos y son más que los posibles, pues incluyen los imposibles. 2) Que el rectángulo que representa a los mundos posibles no actuales, a pesar de ser finito, representa a un número infinito de tales mundos.

Antes hemos hablado de necesidades físicas, biológicas e históricas que suelen aparecer en el discurso cotidiano. En general, dijimos que no nos interesaríamos por ninguna de ellas en particular, pues de alguna manera el tratamiento que hagamos las cubre. Para mostrar que nuestro tratamiento también las abarca, veamos cómo podemos situarlas. Por ejemplo, situemos la posibilidad física.

---

[10] [17] p. 5.

Todo mundo físicamente posible, incluido el actual, es un mundo posible a secas. Por otro lado, obviamente, el mundo actual es físicamente posible, pero no todo mundo físicamente posible, como el del **Quijote** de Cervantes, es real. Por otro lado, hay mundos posibles que son físicamente imposibles. Un ejemplo insuperable es el de **Alicia en el país de las Maravillas** de Lewis Carroll. En resumen:



Nuevamente note que muchos mundos no actuales no son posibles ni lógica ni físicamente.

Ejercicios

1) Describa el mundo posible (si lo hay) en el que:
   1.- Todos los perros son carnívoros y ningún perro es carnívoro.

---

[11] [17] p. 6.

2.- Hay una casa cuadrada en la que todas sus paredes miran al sur.

3.- Epiménides, el Cretense, dijo la verdad cuando dijo que todo lo que los cretenses dicen es falso.

4.- París está al norte de Londres.

5.- París está al norte de Londres. El Cairo está al sur de Londres y al norte de París.

6.- $2+2 \neq 4$

7.- Las leyes de Utopía permiten que $2+2 \neq 4$

8.- Las leyes de Utopía ordenan que $2+2 \neq 4$

9.- El Papa cree que $2+2 \neq 4$

10.- Einstein sabía que $2+2 \neq 4$

11.- Dados dos sucesos en el futuro ninguno de los dos es anterior al otro.

12.- Ningún bien está sujeto a la ley de la oferta y la demanda.

13.- En Lima hay un barbero que afeita a todos aquellos que no se afeitan a sí mismos.

14.- En Utopía las acciones permitidas no son obligatorias.

15.- En Utopía las acciones obligatorias no están permitidas.

16.- 'De acuerdo'- dijo el Gato; y esta vez se desvaneció muy despacio, empezando por el extremo de la cola y terminando por la sonrisa, que permaneció un rato después de que el resto hubiese desaparecido[12]

---

[12] [18], cap. VI.

17.- En un lugar de La Mancha, de cuyo nombre no quiero acordarme, no ha mucho tiempo que vivía un hidalgo de los de lanza en astillero, adarga antigua, rocín flaco, y galgo corredor.[13]

2) En el texto p. 25, en un diagrama, se relaciona mundo posible en general con mundo físicamente posible. Haga lo mismo con los mundos históricamente y biológicamente posibles. Reúnalos todos en un diagrama. Justifique sus respuestas.

I-3.2 Proposiciones, verdad y falsedad

A) Verdad y falsedad

Los individuos (objetos, cosas), hemos dicho, pueden existir en mundos posibles diferentes al actual. Del mismo modo, los atributos (i.e, propiedades y relaciones) pueden ejemplificarse en mundos posibles distintos al actual. Estas diferencias entre los mundos posibles generarán diferencias entre las proposiciones que sean verdaderas o falsas en unos y otros. Y la lógica modal se construirá sobre estas diferencias. Veamos unas definiciones que nos permitirán precisar estas nociones. Considérese ahora cualquier individuo y cual-

---

[13] [21], cap. I.

quier atributo arbitrariamente elegidos y llamémoslos α y Π. Definimos:

(a) La proposición p (que α tiene Π) es verdadera si y solo si α tiene Π.[14]

(b) La proposición p (que α tiene Π) es falsa si y solo si no es el caso que α tiene Π.

Si 'α' está por la ciudad de Lima y 'Π' está por la propiedad de ser fundada por colonizadores europeos, entonces:

> Es verdadera 'la ciudad de Lima fue fundada por colonizadores europeos' si y solo si la ciudad de Lima fue fundada por colonizadores europeos.

Y también:

> Es falsa 'la ciudad de Lima fue fundada por colonizadores europeos' si y solo si no es el caso que la ciudad de Lima fue fundada por colonizadores europeos.

Estas definiciones concuerdan con el sentir de Aristóteles:

> «Decir de lo que es que no es o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es y de lo que no es que no es, es verdad».[15]

y en este siglo, la noción de verdad, recibió un tratamiento formal completo gracias a los trabajos de Tarski.[16] Esta definición puede extenderse para abarcar a las relaciones (predicados diádicos, triádicos, etc.).

Este modo de tratar a la verdad ha sido descrito como

---

[14] 'p' y 'a tiene P' son nombres de la proposición que a tiene P.

[15] Aristóteles, Metafísica, Γ, 7 (1011b26-27). Véase [4].

[16] Tarski [107].

«la teoría de la correspondencia», «la teoría realista» o aún como «la teoría simple».[17] En efecto, se define «verdad» como la propiedad que tienen las proposiciones cuando «corresponden» al (posible) estado de cosas cuya existencia afirman.

B) Verdad y mundos posibles

Debe ser evidente que nuestra definición permite que una proposición, falsa en el mundo real, sea verdadera en un mundo posible. Por ejemplo, una proposición p que afirma que una cosa α, que no existe en el mundo actual, posee el atributo Π en un mundo posible donde sí existe e instancia Π.

Para facilitar nuestro lenguaje convenimos en usar M con o sin subíndices para denotar un mundo posible, de modo de poder decir:

p es verdadero en M_1 y p es falso en M_2

Debemos observar que ahora para nosotros «es verdadero» vs. «es actualmente verdadero» o «es realmente verdadero» no son sinónimos, si bien en el habla común lo son. Esto se debe a que las afirmaciones, creencias, suposiciones, etc. se refieren normalmente a estados de cosas del mundo actual, pero al haber ampliado nuestro discurso a la

---

[17] Esto último no es necesario. Veáse Haack [52] cap. 7 para una discusión más a fondo.

consideración de hechos pertenecientes a otros mundos posibles debemos distinguirlos.

I-3.3 Propiedades modales de las proposiciones

Las proposiciones son también cosas, individuos u objetos que existen o no en algunos mundos posibles y ejemplifican atributos como verdad y falsedad. Además de estos, tienen muchos otros atributos. Nosotros señalamos ahora algunos llamados propiedades modales de las proposiciones. Estos son: el ser posiblemente verdaderas (verdad posible), el ser posiblemente falsas (falsedad posible), el ser contingentes (contingencia), el ser no contingentes (no contingencia), el ser necesariamente verdaderas (verdad necesaria) y el ser necesariamente falsas (falsedad necesaria). Como veremos, estas propiedades son poseídas por las proposiciones de acuerdo con cómo se distribuyen sus valores de verdad en el conjunto de todos los mundos posibles.

A) Proposiciones posiblemente verdaderas y posiblemente falsas

Una proposición es posiblemente verdadera si es verdadera en algún (por lo menos un) mundo posible. Debe notarse que:

(i) Si p es posiblemente verdadera por ser verdadera en un mundo M_1 esto no obliga a que sea obligatoriamente falsa en otro mundo M_2. En M_2 cabe que sea también verdadera, y desde luego podría ocurrir que en M_2 sea falsa.

(ii) Si una proposición p es posiblemente verdadera esto no implica que lo sea en el mundo real. Pero si una proposición es verdadera en el mundo actual entonces es posiblemente verdadera. «Las verdades actuales forman una subclase de las verdades posibles. Una proposición es posiblemente verdadera, entonces, si es verdadera en por lo menos un mundo posible - actual o no actual».[18]

Las proposiciones posiblemente falsas, en cambio, son proposiciones que son falsas en por lo menos un mundo posible (real o no). Las llamaremos <u>posiblemente falsas</u> o <u>falsedades posibles</u>. La mayoría de proposiciones posiblemente verdaderas son posiblemente falsas, pero <u>no todas</u>, como veremos.

B) Proposiciones contingentes y no contingentes

Las proposiciones contingentes son las proposiciones que son posiblemente verdaderas y posiblemente falsas, es decir, verdaderas en por lo menos un mundo posible y falsas en por lo menos otro. Si p es contingente, escribiremos ∇p.

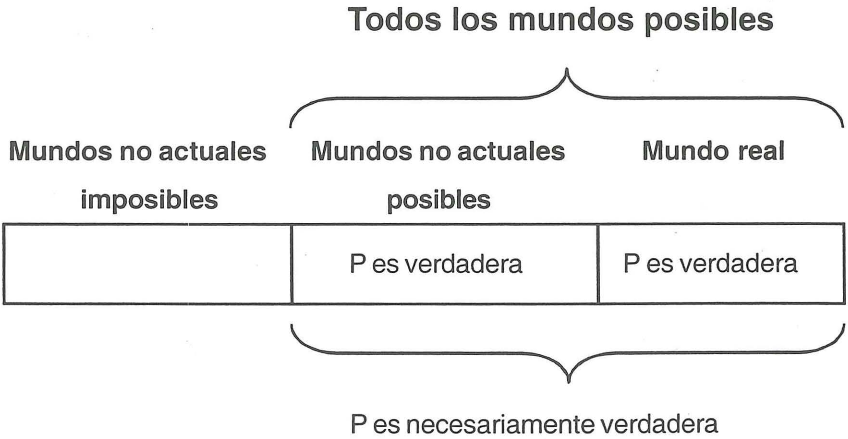
Una proposición no contingente es toda proposición que no sea al mismo tiempo posiblemente verdadera y posiblemente falsa; es por tanto no contingente porque su valor de

---

[18] [17] p. 13.

verdad no depende del mundo posible al que se refiera. Una proposición no contingente es una proposición que solo puede ser una de dos: verdadera en todo mundo posible o falsa en todo mundo posible.

Así, una proposición que no pueda ser falsa, si la hay, se llama necesariamente verdadera o verdad necesaria.



Mundos no actuales imposibles	Mundos no actuales posibles	Mundo real
	P es verdadera	P es verdadera

Una proposición necesariamente verdadera es posiblemente verdadera y es actualmente verdadera, pero no es contingentemente verdadera.

Claramente aparece el problema de saber si hay tales proposiciones. Un campo para buscarlas es la filosofía.[19] Otro, cuyo interés filosófico es menos aparente, consiste en construirlas formalmente. Una manera de lograr ejemplos de pro-

---

[19] Kripke discute algunas en [75].

posiciones necesarias es dándose cuenta de que se pueden hacer afirmaciones acerca de pares de proposiciones.

C) Proposiciones necesariamente verdaderas y necesariamente falsas

Sabemos de nuestros estudios de lógica clásica que, dadas dos proposiciones, una puede ser la negación de la otra. Veamos un ejemplo, con dos proposiciones que son ambas posiblemente verdaderas:

P_1: Pizarro fundó Lima en 1536.

P_2: Pizarro no fundó Lima en 1536.

P_1 es verdadera en el mundo actual y en otros mundos posibles, y falsa en el resto de mundos posibles. En aquellos mundos en que es verdadera la proposición P_2 que afirma que no es el caso que Pizarro fundara Lima en 1536, P_1 es falsa. Y viceversa, en los mundos en que P_2 es falsa, P_1 es verdadera. Son proposiciones contradictorias.

Estas consideraciones nos permiten ver que si p y q son contradictorias y posiblemente verdaderas entonces:

Todos los mundos posibles

p es falsa **q es verdadera**	**p es verdadera** **q es falsa**

Donde el cuadro establece que el conjunto de mundos posibles se parte en dos subconjuntos no vacíos. En resumen:

q es una proposición contradictoria de p.
p es, además, una proposición contingente.

Una manera de construir un ejemplo de proposición verdadera en todo mundo posible es utilizando proposiciones contradictorias. Por ejemplo:

P_1: Pizarro fundó Lima en 1536

P_2: no es el caso que Pizarro fundara Lima en 1536,

y afirmando que una de ellas por lo menos es verdadera, es decir que:

Pizarro fundó Lima en 1536 o no es el caso que Pizarro fundara Lima en 1536.

Como son contradictorias en cada mundo posible, una de ellas y solo una es verdadera; por lo que la proposición construida es necesariamente verdadera.

Ahora puede uno imaginarse, a partir del caso de las proposiciones necesariamente verdaderas, que una proposición es necesariamente falsa si es falsa en todo mundo posible. Una proposición necesariamente falsa es posiblemente falsa y actualmente falsa, pero no es contingentemente falsa. Un ejemplo es la proposición que afirma la verdad de proposiciones contradictorias, es decir, la conjunción de proposiciones contradictorias.

Las proposiciones necesariamente verdaderas o necesariamente falsas son las proposiciones no contingentes. En algunos casos se las llama 'proposiciones necesarias', pero esta denominación tiene el problema de que a las proposiciones necesariamente verdaderas a veces se las llama 'necesarias' a secas. Por eso es preferible usar 'no contingentes'. Si p es no contingente escribiremos Δp.

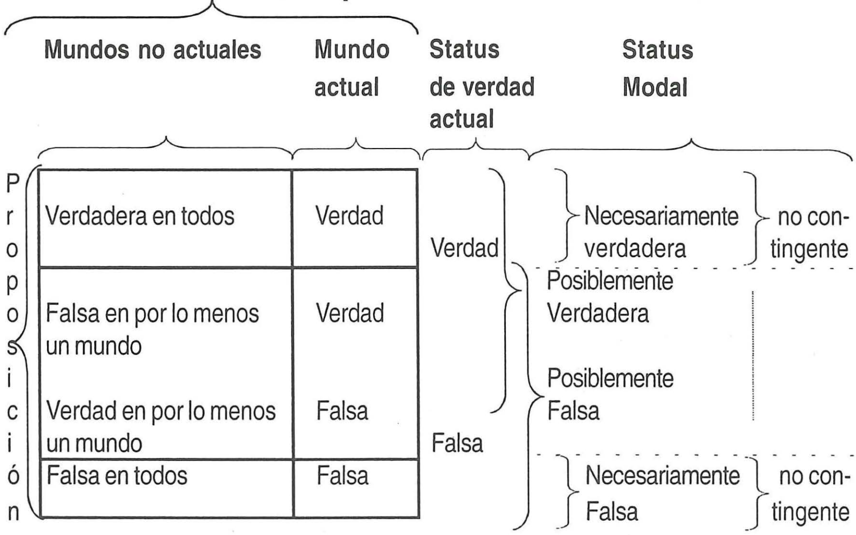
La contradictoria de una proposición necesariamente verdadera es necesariamente falsa. En realidad «notemos que cualquier contradictoria de una proposición no contingente es ella misma una proposición no contingente».[20] Podemos resumir todo lo dicho en el siguiente cuadro:[21]

---

[20] [17], p. 19.

[21] [17], p. 24.

Todos los mundos posibles



Ejercicios

1) Para cada una de las siguientes proposiciones, (1) ubíquela en el cuadro anterior, (2) diga si es contingente o no contingente y (3) si es verdadera o falsa.

   a) Todos los solteros son varones.

   b) Todos los varones son solteros.

   c) Si una pared es totalmente negra, entonces no es una pared blanca.

   d) Todos los hombres son hombres.

   e) Todos los hombres son mortales.

   f) Algunos cuadrados tienen seis lados.

g) Ningún hongo es venenoso.

h) Cada vez que es verano en el Perú, es invierno en Canadá.

i) Lo que será, será.

2) Brevemente explique por qué cada una de las siguientes proposiciones es falsa.
   a) Si una proposición es verdadera en la realidad, entonces esa proposición es también contingente.
   b) Si una proposición es falsa en la realidad, entonces esa proposición es también contingente.
   c) Si es posible para una proposición ser verdadera, entonces es posible para esa misma proposición ser falsa.
   d) Si una proposición es contingente y verdadera entonces es una proposición necesaria.
   e) Si una proposición es no contingente, entonces es actualmente verdadera.

3) Brevemente explique por qué cada una de las siguientes proposiciones es verdadera.
   a) Si una proposición es contingente, entonces no es necesariamente verdadera.
   b) Si una proposición es verdadera de acuerdo con las leyes de la física en el mundo real, entonces puede ser falsa.

c) La conjunción de una proposición contingente y una no contingente es una proposición contingente.

d) Una proposición no contingente posiblemente verdadera es actualmente verdadera.

I-3.4 Simbolización

Como sabemos, es característico de la lógica contemporánea el uso de símbolos. Nosotros emplearemos la lista de símbolos que sigue. Por el momento lo haremos de manera informal, a partir de un 'significado' aproximado asignado a los símbolos. Así, la lista que sigue la tomaremos como un conjunto de pautas o de guías prácticas para el manejo de algunas abreviaciones simplificadoras:

1) El concepto de falsedad «~» (tilde).
2) El concepto de posibilidad «◊» (diamante o rombo).
3) El concepto de verdad necesaria «□» (casillero o cuadrado).
4) El concepto de contingencia «∇» (nabla).
5) El concepto de no contingencia «Δ» (delta).

Así por ejemplo tendríamos:

«~p» $=_{\text{def.}}$ «La proposición p es falsa» (o «es falso que p»).

«◊p» $=_{\text{def.}}$ «La proposición p es posible» (o «es posible que p»).

«$\Box p$» $=_{\text{def.}}$ «La proposición p es necesariamente verdadera» (o «es necesariamente verdadero que p»).

«∇p» $=_{\text{def.}}$ «La proposición p es contingente» (o «es contingente que p»).

«Δp» $=_{\text{def.}}$ «La proposición p es no contingente» (o «es no contingente que p»).

Estos símbolos pueden concatenarse de modo que logran, por ejemplo, expresar el concepto de imposibilidad con «$\sim\Diamond$».

En algunos casos hay que tener cuidado con las lecturas de algunos símbolos. Por ejemplo, uno puede estar tentado de leer «∇p» como «p es contingentemente verdadera», pero esto último quiere decir tanto que p es contingente como que es verdadero, es decir: «$p \wedge \nabla p$». Por lo que es preferible decir «es verdad que p es contingente». Lo mejor es no traducir «∇» ni «Δ» adverbialmente.

Ejercicios

1) p está por la proposición que el Perú está al norte de Chile. Traduzca las siguientes al castellano:

1) $\Diamond\sim p$ 2) $\sim\Diamond p$ 3) $\sim\Diamond\sim p$ 4) $\Box\sim p$
5) $\sim\Box p$ 6) $\sim\Box\sim p$ 7) $\nabla\sim p$ 8) $\sim\nabla p$
9) $\sim\nabla\sim p$ 10) $\Delta\sim p$ 11) $\sim\Delta p$ 12) $\sim\Delta\sim p$

2) En el ejercicio anterior diga, en cada caso, si la proposición es verdadera o falsa.

3) Repita los ejercicios 1 y 2 con p: 2+2=4.

4) Diga si son verdaderas o falsas:

a) Es no contingente que 2+2= 4
b) Es no contingente que todos los cuerpos se atraen
c) Es no contingente que la tierra es plana
d) Es verdad no contingentemente que 2+2= 4
e) Es verdad no contingentemente que todos los cuerpos se atraen
f) Es no contingente que la tierra es plana
g) Es no contingente que es falso que 2+2= 4
h) Es no contingente que es falso que todos los cuerpos se atraen
i) Es no contingente que es falso que la tierra es plana
j) Es falso no contingentemente que 2+2= 4
k) Es falso no contingentemente que todos los cuerpos se atraen
l) Es falso no contingentemente que la tierra es plana

6) Explique la diferencia entre: «verdadero no contingentemente» y «no verdadero contingentemente».

B) Otras nociones

La utilización intuitiva de estos símbolos, tal como venimos haciéndolo, nos permite, sin entrar en mayores complicaciones ni precisiones -que vendrán en su momento- poner de manifiesto algunas interrelaciones.

1) *Relación posible-necesario.* Decir de una proposición que es falsa ($\sim p$) no la hace imposible, pues a pesar de ser falsa pudiese haber sido verdadera. Por ejemplo, la proposición 'Mario Vargas Llosa fue electo presidente del Perú en 1990' es falsa, sin embargo, no es imposible. Una proposición imposible es una que necesariamente es falsa: $\Box\sim p$. Luego una proposición posible es una que no es imposible:

$$\Diamond p \approx \sim\Box\sim p$$

Es decir, podemos expresar el concepto de posibilidad a partir del de necesidad. Y viceversa:

$$\Box p \approx \sim\Diamond\sim p$$

Pues, decir que una proposición es necesaria, es lo mismo que decir es imposible que sea falsa. Lo importante es notar que los conceptos modales de posibilidad, imposibilidad, necesidad no son independientes.

p es imposible $\sim\Diamond p \approx \Box\sim p$
p es contingente $\nabla p \approx \Diamond p \wedge \Diamond\sim p$

2) *Implicación estricta.* Otro concepto muy importante, y que estuvo en el origen contemporáneo de la lógica modal, es el de implicación estricta. Este fue introducido por Lewis porque a su juicio recogía mejor que el concepto de implicación la noción intuitiva de consecuencia lógica. Algunos textos como el de Konyndyck[22] la denominan «entrañamiento» (*en-*

---

[22] Véase [71]

tails – entailment en inglés) pero nosotros preferimos la denominación más usual, y por tanto, más neutra, de «implicación estricta». La implicación estricta señala la necesidad de un condicional:

p implica estrictamente q ssi[23] necesariamente p implica materialmente a q

en símbolos $p \Rightarrow q \approx \square(p \to q)$

Sin entrar a discutir las implicaciones filosóficas, señalaremos, basándonos en equivalencias elementales de lógica, que esto equivale a afirmar la imposibilidad de que p sea verdadera y q sea falsa:

$$p \Rightarrow q \approx \square(p \to q) \approx \sim\Diamond(p \wedge \sim q)$$

Ejercicios

1) Trate el lector de expresar los conceptos de
   - a) p es imposible,
   - b) p es contingente,
   - c) p y q son compatibles,
   - d) p y q son incompatibles,
   - e) p y q son contradictorias,

---

[23] 'ssi' abrevia 'si y solo si'.

a partir del concepto de posibilidad, luego del de necesidad y por último del de imposibilidad (para este último utilice en el ejercicio como símbolo una I mayúscula).

2) Simbolizar y mostrar en cada grupo las proposiciones equivalentes :

A- 1.-Es posible que Apolo sea racional.
No es imposible que Apolo sea racional.
No es necesario que Apolo sea racional.
Es imposible que Apolo sea racional.

2.-Es posiblemente falso que Willard sea un ciclista.
No es imposible que sea falso que Willard sea un ciclista.
Es necesariamente verdadero que Willard sea un ciclista.
No es necesariamente falso que Willard sea un ciclista.

3.-No es posiblemente falso que Aristóteles sea bípedo.
Es imposible que sea falso que Aristóteles sea bípedo.
No es necesario que Aristóteles sea bípedo.
Es posiblemente falso que Aristóteles no sea bípedo.

B- Proporcione la contradictoria de:

a) Es posible que la Tierra sea redonda.
b) Es imposible que Aristóteles no sea bípedo.
c) No es necesario que Apolo sea racional.

d) Es posible que no ocurra que Juan mida más de 1.70 m.

C- Clasifique los siguientes pares de proposiciones en a) compatibles: pueden ser verdaderas a la vez, b) incompatibles: no pueden ser verdaderas a la vez y c) contradictorias.

1.- p y □p

2.- p y □~p

3.- □p y ◊p

4.- □p y ∇p

5.- p➔q y p→q

D- La lógica clásica ya conocía de las interrelaciones entre las nociones modales, las que expresaba muy adecuadamente en un cuadrado de oposición:

$$\begin{tikzcd}
\Box\varphi \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] \arrow[dr, leftrightarrow] & \Box{\sim}\varphi \arrow[d] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\Diamond\varphi \arrow[r, leftrightarrow] & \Diamond{\sim}\varphi
\end{tikzcd}$$

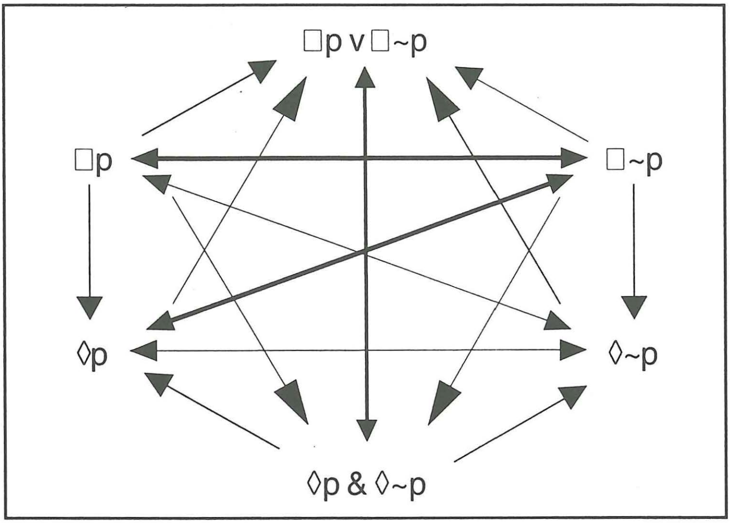
Las flechas del cuadrado representan alguna de las siguientes relaciones, diga cuál:

- Contradictoriedad (definida antes).

- Subordinación o implicación: se dice que φ está subordinada a ψ, si ψ implica a φ. Es decir, si en todo mundo en que ψ sea verdadera, φ también lo es.
- Contrariedad o incompatibilidad: se dice que dos proposiciones φ y ψ son contrarias si son incompatibles ($\sim(\varphi\wedge\psi)$).
- Subcontrariedad: se dice que φ y ψ son subcontrarias si su disyunción es verdadera en todo mundo; es decir, no son ambas falsas.

Note que no todas las relaciones son simétricas.

E- El cuadrado anterior fue transformado por Blanché[24] en el siguiente Hexágono de oposición:



Complételo Ud. Defina las relaciones posibles entre sus 'vértices' y encuentre qué significa cada flecha.

---

[24] Véase Blanche [14]. Este hexágono también posee una interpretación deóntica.

Capítulo II

Semántica T, S4 y S5

II-1 La nueva lógica

II-1.1 Necesidad de una lógica modal

Suponemos, en este capítulo, conocido tanto lo que es un sistema de deducción natural de lógica proposicional como su semántica, en particular las nociones básicas de tautología, contradicción, ley lógica, fórmula válida, implicación (material), regla de deducción, equivalencia, regla de sustitución uniforme y regla de sustitución de equivalentes de ese nivel.

Lo primero que debemos resolver antes de desarrollar un sistema formal que dé cabida a las nociones modales es si necesitamos un sistema así. ¿No será que las nociones modales que hemos visto se pueden reflejar con los recursos de la lógica clásica proposicional que ya conocemos? Si la respuesta fuese positiva, entonces no tendríamos necesidad de desarrollar una teoría lógica nueva. A lo más bastaría mostrar cómo la lógica proposicional que ya dominamos acoge estas nociones. Una posición en este sentido es la sostenida por W.V.O. Quine y puede verse en su artículo 'Tres grados de compromiso modal'.[25] Pero esta posición, muy

---

[25] En [95].

cómoda para el que se aprestaba a pasar noches en blanco estudiando la 'nueva' lógica, no es compartida más que por un reducido número de lógicos. Y tampoco es claro que ésta sea la posición final de Quine. De hecho, la lógica modal ha conocido un gran desarrollo en este siglo, en particular en los últimos 40 años. Vamos pues al tema: ¿necesitamos una lógica modal?

Hay algunas inferencias sencillas que parecen propias a las nociones modales : si una proposición es necesaria, debe ser verdadera. Es decir, de $\Box p$ esperamos poder inferir p. Brevemente: en la escritura lógica que corresponde a un sistema deductivo, esperaríamos que valgan la regla de inferencia:

$$\Box p \vdash p$$

y la ley (teorema):

$$\vdash \Box p \rightarrow p,$$

o en un nivel semántico esperamos la validez de la inferencia:

$$\Box p \vDash p$$

o que sea válida la fórmula:

$$\vDash \Box p \rightarrow p$$

Pero, obviamente, no esperamos que la conversa ($p \vdash \Box p$) sea válida en ningún caso, pues si p es verdadera, no tiene que ser necesaria.

Y, también, si p es una proposición verdadera, esperamos que p sea posible. Es decir, esperamos:

$p\vdash\Diamond p$, $\vdash p\rightarrow\Diamond p$, $p\models\Diamond p$ y $\models p\rightarrow\Diamond p$

Con estos elementos regresemos a nuestro tema: ¿es necesaria una teoría nueva para dar cuenta de las modalidades? Como hemos visto en el capítulo anterior, $\Box$ y $\Diamond$ son interdefinibles, por lo que si podemos expresar uno con solo los recursos de la lógica proposicional, también lo haremos con el otro. Examinemos qué ocurre con $\Box$.

¿Puede $\Box$ ser un operador proposicional? Si la respuesta fuese positiva, entonces el operador $\Box$ pertenecería a la lógica proposicional y sería un operador veritativo funcional monádico. Por tanto, debería ser uno de los que aparece en la siguiente tabla de verdad:

$\Box\varphi$

φ	f_1	f_2	f_3	f_4
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Veamos cuál es. Si $\Box$ fuese el operador f_1 , entonces se tendría $\Box\varphi$ equivalente a, por ejemplo: $\varphi\vee{\sim}\varphi$. En ese caso obviamente pertenecería a la teoría de la lógica proposicional. Si fuese f_2 haría $\Box\varphi$ equivalente a φ. Si f_3, $\Box\varphi$ sería equivalente a ${\sim}\varphi$. Y, por último, si f_4, obtendríamos $\Box\varphi$ equivalente a $\varphi\wedge{\sim}\varphi$. La interpretación de $\Box$ como f_1 no puede validar $\Box\varphi\rightarrow\varphi$, por lo que no es la indicada. Si bien f_2 justifica $\Box\varphi\rightarrow\varphi$, pues en esa interpretación equivaldría a la conocida tautología $\varphi\rightarrow\varphi$, también validaría $\varphi\rightarrow\Box\varphi$, que es claramente inválida, por lo que también la descartamos. De manera similar descartamos f_3 y f_4.

De este modo concluimos que no hay más remedio que construir una teoría lógica nueva. Empezaremos por sus aspectos semánticos.

Ejercicios

1) Compruebe que f_3 y f_4 tampoco son buenas elecciones para reemplazar a $\Box$.
2) Lleve a cabo un análisis similar al del apartado anterior con $\Diamond$.

II-1.2 Lenguaje de la lógica proposicional L_P

Brevemente recordaremos el lenguaje de la lógica proposicional sobre el que construiremos el de la lógica modal gracias a una ampliación.

A) Símbolos

Proposicionales u oracionales: p, q, r,...,z con o sin subíndices.

Conectores u operadores: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Auxiliares: ( ), [ ], { }

B) Reglas de formación

1.- Todo símbolo proposicional es una fórmula bien formada (FBF).

2.- Si φ es una FBF, también lo es $\sim\varphi$

3.- Si φ y ψ son FBFs, también lo son

$(\varphi \wedge \psi)$,

$(\varphi \vee \psi)$,

$(\varphi \rightarrow \psi)$,

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Observaciones:

El conector negación ~ es el único conector monádico. La disyunción ∨, la conjunción ∧, el condicional → y el bicondicional ↔ son conectores diádicos. Los símbolos proposicionales son llamados también proposiciones u oraciones atómicas. Como es usual, convendremos en :

1) Eliminar los paréntesis cuando encierran a toda una fórmula. Así (pv~p) lo escribiremos pv~p, pero en ~(pv~p) no podremos eliminar los paréntesis.

2) Los corchetes [ ] y la llaves { } los consideraremos paréntesis con una grafía distinta para facilitar su lectura.

3) Las reglas para el manejo de los paréntesis son las usuales.

II-1.3 Lenguaje de la lógica modal proposicional L_{MP}

El lenguaje de la lógica modal lo llamaremos lenguaje modal proposicional (L_{MP}). Para construirlo a los símbolos primitivos de L_P añadimos un nuevo operador: $\Box$

A) Reglas de formación

Añadimos a las de la lógica proposicional que acabamos de presentar las siguientes:

4.- Si φ es una FBF también lo es $\Box\varphi$.

y mediante definiciones añadimos los símbolos de posibilidad $\Diamond$, de implicación estricta $\Rightarrow$ y de equivalencia estricta $\equiv$:

Def.$\Diamond$ $\Diamond\varphi =_{def.} \sim\Box\sim\varphi$

Def.$\Rightarrow$ $\varphi \Rightarrow \psi =_{def.} \Box(\varphi \rightarrow \psi)$

Def.$\equiv$ $\varphi \equiv \psi =_{def.} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

II-2 Modelos y diagramas-T

II-2.1 Procedimiento de decisión y de contraejemplo

Un procedimiento de decisión para resolver una pregunta es un conjunto finito de protocolos o procedimientos, cada uno de los cuales consiste en un número finito de pasos, que de manera cierta llegan a responder a la pregunta planteada.

Ejemplo: En la lógica proposicional clásica las tablas de verdad son un procedimiento de decisión que permite resolver la pregunta de si una determinada fórmula es una tautología o no.

En la lógica proposicional modal existe un método similar a partir de cuatro valores de verdad pero es poco práctico.[26] Además de este existe un método de diagramas que veremos más adelante. Por ahora desarrollaremos una técnica que no es un procedimiento de decisión, pero que desarrolla la comprensión intuitiva de las fórmulas modales. Lo presentamos como un aperitivo a los temas semánticos. Las limitaciones de este método son:

No se trata de un procedimiento mecánico.

No permite discriminar entre los sistemas T, S4 y S5. (que ya conoceremos).

Funciona para implicaciones estrictas o condicionales.

La idea básica del procedimiento es que, para probar que una fórmula de carácter universal es falsa, basta con encontrar un caso de falsedad, es decir, se trata de una aplicación del método general de encontrar contraejemplos. Así, una fórmula que pretende ser válida debe ser verdadera para cualquier instancia de sustitución de sus variables. El método consiste en ponerla a prueba; es decir, se trata de ver si se le encuentra una sustitución que la falsifique. Lo llamaremos «técnica de contraejemplificación modal».

---

[26] Véase Von Wright [113] cap. 3.

Ejemplo 1

¿Es válida $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$?

Buscaremos un caso de sustitución de p y q que claramente muestre que la fórmula es falsa para ese caso. Como se trata de una fórmula condicional, encontrar un contraejemplo es encontrar casos de p y de q que hacen verdadero el antecedente y falso el consecuente. Una instancia posible es:

p: Juan mide 1.80 m q: Juan mide 1.70 m

que son ambas posibles por separado, pero imposibles juntas, pues Juan no puede tener dos medidas.

O podemos elegir, de manera más general, sustituir q por la negación de p, con lo que se tendría el esquema general de sustitución:

$$(\Diamond p \wedge \Diamond {\sim} p) \rightarrow \Diamond(p \wedge {\sim} p)$$

entonces, si p es una proposición contingente cualquiera, toda la proposición es falsa.

Ejemplo 2

Analizar la validez de: $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$

Como se trata de una implicación estricta, estamos frente a un condicional necesario que será falso si en un mundo posible el condicional es falso. Necesitamos para esto que el antecedente sea verdadero, es decir: $p \vee q$ debe ser necesario; y necesitamos que el consecuente sea falso en un mundo. Si reemplazamos solo q por ~p, obtenemos una fórmula falsa cada vez que p es una contingencia:

$\Box (p \vee \sim p) \rightarrow (\Box p \vee \Box \sim p)$.

El lector no debe avanzar si no está de acuerdo con la afirmación.

Ejemplo 3

Buscar un contraejemplo de: $(\Box p \wedge q) \rightarrow \Box (p \wedge q)$

Para que el antecedente sea verdadero requerimos que p sea necesaria y que q sea solo verdadera. Por el consecuente, necesitamos que juntas no sean verdaderas en por lo menos un caso (mundo). Para obtenerlo, si p es necesaria, necesitamos que $p \wedge q$ no lo sea.

Tomemos por q: Pizarro fundó Lima (una proposición a todas luces contingente)

y por p: $q \vee \sim q$ (una proposición necesaria), entonces:

$\Box (q \vee \sim q) \wedge q$ es verdadera, pero $\Box [(q \vee \sim q) \wedge q]$ es falsa, pues equivale a $\Box q$.

Estos ejemplos ilustran la utilidad del método, sobre todo porque obliga a buscar ejemplos concretos de proposiciones necesarias o contingentes o imposibles y analizar sus relaciones. Cuando se trabaja con métodos tan formales como los que emplea la lógica actual, siempre se corre el riesgo de perder de vista el significado de lo que se está haciendo. Este proceder obliga a recordarlo. Desgraciadamente, adolece de algunas limitaciones: $\Box\Box p \rightarrow \Box\Box\ \Box\Box p$ no es un teorema en el sistema T, sí lo es en S4 y S5, pero el método no permite hacer la diferencia entre estos sistemas. Cuando invalidamos una fórmula por este método, en realidad lo hacemos en los tres sistemas. Necesitamos una herramienta más fina y precisa para evaluar con exactitud lo que estas fórmulas afirman en cada sistema.

II-2.2 Semántica: mundos posibles

Primero presentaremos informalmente el tema de los modelos matemáticos que sustentan esta semántica (véase en el Capítulo I una presentación más intuitiva). La idea central es que hay un número variable de «mundos posibles» conectados o relacionados entre sí de diversas maneras. Con ese supuesto, a una afirmación como $\Box\varphi$ se le atribuye verdad en un mundo si φ es verdadera en todo mundo posible relacionado con este y falsedad si es falsa en un mundo relacionado. De manera similar, $\Diamond\varphi$ se entiende que afirma que φ es verdadero en algún mundo posible relacionado con aquel en que se hace la afirmación.[27]

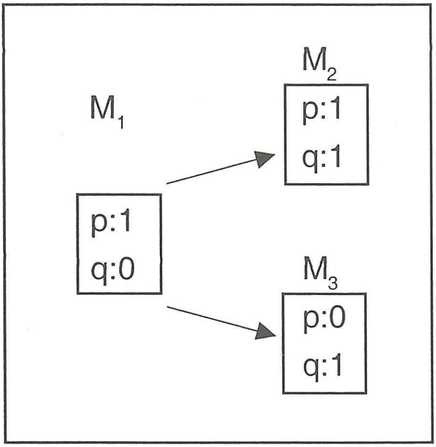
En el Capítulo I dábamos por sentado que todos los mundos estaban relacionados entre sí; ahora afinamos ese concepto y admitimos la posibilidad de diferentes maneras de que los mundos posibles se relacionen entre sí. Esta idea de

---

[27] Estas ideas fueron desarrolladas por Kripke (véase [72] y [74]), Hintikka y Kanger de manera independiente en los 50.

considerar diferentes relaciones entre mundos permitió unificar la semántica modal adaptándola a diferentes casos, que por ahora podemos explicarnos como diferentes modalidades (histórica, física, moral, legal, etc.).

Veamos un ejemplo de una posible situación de mundos posibles, con la convención de que 'p:1' dice que p es verdadera y 'p:0' que p es falsa.



Los rectángulos representan mundos posibles (M_1 , M_2 y M_3) y en su interior se indica qué valor de verdad tiene cada proposición en él.[28] Las flechas indican las relaciones entre los mundos.

El valor de verdad en el mundo 1 de □p es 0, pues p es falso en el mundo 3, que está relacionado con él. □p en el mundo 2 es verdadero, pues se considera que todo mundo

---

[28] Obviamente, en un mundo se puede atribuir valor de verdad a infinitas proposiciones. En los diagramas solo se señalan las proposiciones que interesan.

está vinculado consigo mismo. Así, viendo el sentido de las flechas, que en el diagrama simbolizan la dirección de la relación entre mundos, en el mundo 2 el valor de verdad de □p se establece tomando en cuenta solo lo que ocurre en ese mundo.

La relación entre mundos la llamaremos «relación de accesibilidad» y la denotaremos con R; así, en el esquema anterior tenemos:

$R(M_1, M_2)$ y $R(M_1, M_3)$

En realidad, lo anterior está incompleto, pues nos falta señalar que todo mundo se relaciona consigo mismo. Debemos añadir:

$R(M_1, M_1)$, $R(M_2, M_2)$ y $R(M_3, M_3)$

Generalmente esto último se evita si siempre recordamos que R es una relación reflexiva en los llamados sistemas modales ónticos que son los que estamos viendo (T, S4 y S5). Además, es obvio que la ausencia de flecha entre M_2 y M_3 establece que no están relacionados por accesibilidad: $\sim R\ (M_2, M_3)$. Del mismo modo, la dirección de la flecha entre M_1 y M_2 establece $R(M_1, M_2)$ y $\sim R\ (M_2, M_1)$. El diagrama resume todo esto. De ahora en adelante escribiremos $M_i R Mj$ en vez de $R(M_i, Mj)$.

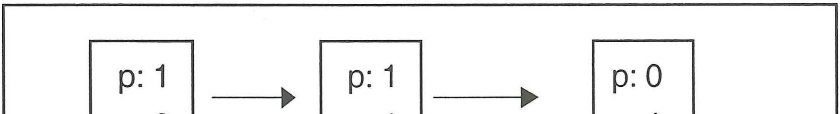
Veamos otras «informaciones» en el diagrama de mundos relativas a la verdad o falsedad de otras proposiciones en los mundos en cuestión. ◊p en el mundo M_1: será verdadero si lo es en algún mundo relacionado accesible a M_1, lo que es el caso. Luego el valor de verdad de $\Diamond p$ en el mundo 1 es 1. Esto lo denotaremos abreviadamente como $V[\Diamond p, M_1]=1$.

$V[\Box(p\vee q), M_2]=$ ¿? Es decir, ¿cuál es el valor de verdad de $\Box(p\vee q)$ en el mundo 2? Primero debemos ver con qué mundos está relacionado M_2. En nuestro caso, solo consigo mismo, por lo que solo debemos tomar en cuenta el valor de $p\vee q$ en ese mundo. Como $V(p\vee q,M_2)=1$ se tiene $V[\Box(p\vee q),M_2]=1$. De modo similar obtenemos:

$V[\Box(p\vee q), M_1]= 1$, pues $V[(p\vee q), M_1]=V[(p\vee q), M_2]=V[(p\vee q), M_3]= 1$
$V[\Box(q \rightarrow p), M_1]= 0$, pues $V[q \rightarrow p, M_3]=0$
$V[\Diamond(q \leftrightarrow p), M_1]=1$, pues $V[q \leftrightarrow p, M_2] =1$

etc.

Cuando se consideran modelos simples como el anterior, donde no aparecen cadenas de accesibilidad entre mundos, no hay mayores complicaciones. Pero puede ocurrir una situación de mundos posibles del tipo siguiente:



Este tipo de diagramas con mundos en serie lleva a uno a preguntarse si, además de reflexiva, la relación R no debe ser transitiva; y luego preguntarse si no debe ser simétrica.

Por ahora, en el sistema T, solo requerimos que en todos los modelos de mundos posibles la relación R sea reflexiva. Pero podemos adelantar que diferentes propiedades de la relación de accesibilidad darán origen a los diferentes sistemas modales.

Ejemplo:

1) Dado el siguiente modelo-T

$\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$

$R = \{<M_1,M_1>, <M_2,M_2>, <M_3,M_3>, <M_4,M_4>, <M_1,M_2>, <M_2,M_3>, <M_2,M_4>, <M_3,M_4>\}$

Y la función V siguiente:

$V(p, M_1)= 0$ $V(p, M_2)= 0$ $V(p, M_3)= 0$ $V(p, M_4)= 0$

$V(q, M_1)= 1$ $V(q, M_2)= 1$ $V(q, M_3)= 1$ $V(q, M_4)= 0$

$V(r, M_1)= 0$ $V(r, M_2)= 0$ $V(r, M_3)= 1$ $V(r, M_4)= 0$

a) Hagamos un diagrama de los mundos.

b) Averigüemos, en cada mundo, el valor de verdad de:

$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow \sim p)$,

$\Box (p \wedge q) \rightarrow \Box p$,

$\Diamond (p \leftrightarrow \sim p)$,

$\Box p \rightarrow p$,

$p \rightarrow \Box p$,

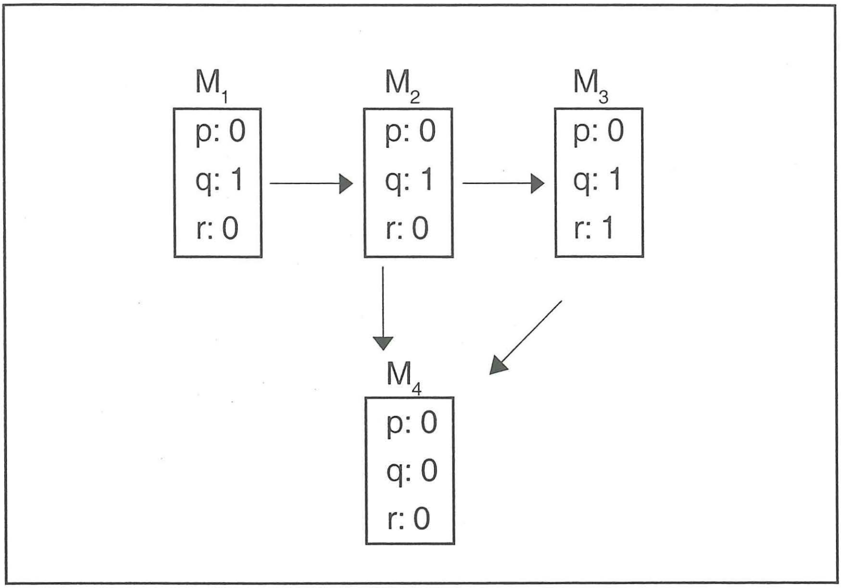
$\Box r \rightarrow r$,

$\Box \Diamond q \rightarrow \Diamond q$,

$\Diamond \Diamond r \rightarrow \Diamond r$

Solución

a) Primero, uno debe, cuando es posible, hacer un diagrama de la situación:



b) Luego, se debe proceder, ordenadamente, a calcular los valores de verdad de las fórmulas, yendo de las más simples a las más complejas, y en algunos casos indagando previamente qué valores tienen algunas partes (subfórmulas) de una fórmula.

	M_1	M_2	M_3	M_4
$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow \sim p)$	1	1	1	1
$(p \wedge q)$	0	0	0	0
$\Box (p \wedge q)$	0	0	0	0
$\Box p$	0	0	0	0
$\Box (p \wedge q) \rightarrow \Box p$	1	1	1	1
$p \leftrightarrow \sim p$	0	0	0	0
$\Diamond (p \leftrightarrow \sim p)$	0	0	0	0
$\Box p \rightarrow p$	1	1	1	1
$p \rightarrow \Box p$	1	1	1	1
$\Diamond r$	0	1	1	0
$\Diamond\Diamond r$	1	1	1	0
$\Diamond\Diamond r \rightarrow \Diamond r$	0	1	1	1

Ejercicios

1) Calcular las mismas fórmulas del ejemplo anterior cambiando solo la relación de accesibilidad R por:
$R = \{<M_1, M_1>, <M_2, M_2>, <M_3, M_3>, <M_4, M_4>, <M_1, M_2>,$
$< M_1, M_3>, <M_3, M_4>\}$

2) Luego hacer lo mismo manteniendo R, pero modificando los valores de verdad en cada mundo (cambio de mundos) de la manera siguiente.

$V(p, M_1) = 1$ $V(p, M_2) = 1$ $V(p, M_3) = 0$ $V(p, M_4) = 0$

$V(q, M_1) = 1$ $V(q, M_2) = 1$ $V(q, M_3) = 1$ $V(q, M_4) = 1$

$V(r, M_1) = 0$ $V(r, M_2) = 1$ $V(r, M_3) = 0$ $V(r, M_4) = 0$

3) ¿Es posible cambiar solo la relación R en el caso anterior para que $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow\sim p)$ sea falsa en algún mundo? ¿Se puede lograr cambiando también la función V (sus valores en las proposiciones atómicas en algunos mundos)?
4) ¿Es posible hacer $\Diamond\Diamond r\rightarrow\Diamond r$ verdadera en todo mundo de un modelo dado? Construya un modelo con más de tres mundos que lo logre.

II-2.3 Semántica T. Modelo-T

Damos ahora la definición semántica de un sistema T. Un modelo-T (M_T) para un lenguaje L_{MP} es un conjunto de tres elementos <**M**, R, V> , donde:

M es un conjunto no vacío llamado conjunto de mundos.

R, llamada relación de accesibilidad, es una relación reflexiva entre mundos, es decir, en un lenguaje más matemático: $R\subseteq MxM$ y es reflexiva.

V, llamada valuación, es una función que a cada fórmula bien formada del lenguaje en un mundo le asigna un valor 1 o 0. Es decir:

$$V:\ L_{MP}\,x\,\mathbf{M}\Rightarrow\{0,1\}$$

Para que V esté definida se requiere que esté definida en el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje. Para lograrlo, seguiremos el principio de composicionalidad de Frege, por lo que bastará que lo esté en las proposiciones o enunciados atómicos. Es decir, se requiere que para cada enunciado atómico φ se conozca su valor de verdad en cada mundo y a partir del valor de verdad de las atómicas quedará determinado el de las fórmulas compuestas. Así, en las llamadas fórmulas compuestas o moleculares, la función V obedece a las siguientes reglas:

En las reglas φ y ψ son FBFs y V_{M_T} es la valuación del modelo-T.

$$V_{M_T}[\sim\psi, M_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{M_T}[\psi, M_i]=0 \\ 0 & \text{si } V_{M_T}[\psi, M_i]=1 \end{cases}$$

$$V_{M_T}[\psi\wedge\varphi, M_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]=V_{M_T}[\varphi,M_i]=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$V_{M_T}[\psi\vee\varphi,M_i]= \begin{cases} 1 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]=1 \text{ ó } V_{M_T}[\varphi,M_i]=1 \\ 0 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]=V_{M_T}[\varphi,M_i]=0 \end{cases}$$

$$V_{M_T}[\psi\rightarrow\varphi,M_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]=0 \text{ ó } V_{M_T}[\varphi,M_i]=1 \\ 0 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]=1 \text{ y } V_{M_T}[\varphi,M_i]=0 \end{cases}$$

$$V_{M_T}[\psi\leftrightarrow\varphi,M_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]=V_{M_T}[\varphi,M_i] \\ 0 & \text{si } V_{M_T}[\psi,M_i]\neq V_{M_T}[\varphi,M_i] \end{cases}$$

$$V_{M_T}[\Box\psi,M_i]=\begin{cases}1 & \text{si para todo } Mj \text{ tal que } M_iRMj,\ V_{M_T}[\psi,Mj]=1\\ \\ 0 & \text{si para algún } Mj \text{ tal que } M_iRMj,\ V_{M_T}[\psi,Mj]=0\end{cases}$$

$$V_{M_T}[\Diamond\psi,M_i]=\begin{cases}1 & \text{si para algún } Mj \text{ tal que } M_iRMj,\ V_{M_T}[\psi,Mj]=1\\ \\ 0 & \text{si para todo } Mj \text{ tal que } M_iRMj,\ V_{M_T}[\psi,Mj]=0\end{cases}$$

Nota: Si el modelo es único y no hay lugar a confusión, se escribe $V[\varphi,M_i]$ en vez de $V_{M_T}[\varphi,M_i]$.

Las reglas son, casi todas, las clásicas de la lógica proposicional a las que se les ha aumentado la mención a un mundo. Solo son nuevas las dos últimas que comentaremos. La regla semántica $V_{M_T}[\Box\psi, M_i]$ nos dice que $\Box\psi$ es verdadera cuando ψ lo es en todo mundo relacionado (Mj) con el mundo en que se la evalúa (M_i). Y nos dice entonces que en cualquier otra situación es falsa; es decir, cuando ψ es falsa en por lo menos un mundo relacionado con aquel en que se la evalúa. La regla para $\Diamond$ es análoga, pero, claro, manteniendo el significado de $\Diamond$. Así, la verdad de $\Diamond\psi$ evaluada en el mundo M_i depende de que ψ sea verdadera en por lo menos un mundo relacionado. Y la falsedad ocurre en los otros casos.

Cabe señalar, porque al inicio uno confunde la lectura de las definiciones y cree que las definiciones semánticas implican que si $\Box p$ es falsa entonces $\Diamond p$ es verdadera, y viceversa, que las relaciones entre $\Box p$ y $\Diamond p$ no han variado y son las que conocíamos. El lector debe convencerse de esto releyéndolas con mucha atención. □p no es la contradictoria de ◊p.

Con esta definición de M_T podemos asignar un valor de verdad a cualquier fórmula bien formada del lenguaje L_{MP}; a esto llamaremos, por ahora, la lógica modal T. Las reglas semánticas relativas a los distintos tipos de fórmulas (negativas, conjuntivas, ... , posibles) dan el significado de los operadores lógicos y no cambian de un modelo-T a otro. Lo que cambia de modelo-T a modelo-T es: el conjunto de mundos que se consideran (es decir, el conjunto **M**), la relación entre estos (es decir, la relación R) y los valores de verdad de las proposiciones atómicas (el valor de V en los símbolos proposicionales). Los operadores son, por eso, considerados constantes lógicas en M_T. Definida la noción de modelo para un lenguaje dado, podemos dar las:

A) Definiciones centrales de la lógica

Verdad en un mundo de un modelo-T

Si una fórmula ψ tiene el valor 1 en un mundo de un modelo-T, es decir si, $V_{M_T}[\psi, M_i]=1$ decimos que ψ es verdadera en el mundo M_i del modelo en cuestión. También se dice que ese mundo de ese modelo satisface o ejemplifica a esa fórmula.

En cambio, cuando se encuentra un modelo en el que en un mundo una fórmula φ es falsa, se dice que se ha encontrado un contraejemplo de la fórmula.

Verdad en un modelo-T

Si una fórmula es verdadera en todo mundo de un modelo-T dado, se dice que es verdadera en el modelo-T en cuestión. En ese caso ese modelo satisface o ejemplifica esa fórmula.

Validez-T

Si una fórmula φ es verdadera en <u>todo</u> modelo-T se dice que es válida-T.

Si bien no hemos visto todavía un sistema deductivo para L_{MT} (lo haremos en III-1) que corresponda a la lógica modal T, cabe mencionar la noción sintáctica de:

Teorema T

Es toda fórmula bien formada deducible sin hipótesis en el sistema de deducción considerado.

Se puede probar que el sistema de deducción T que presentaremos más adelante es consistente, es decir, que si ψ es un teorema, entonces ψ es válido-T. También se puede probar que el sistema de deducción T es completo, es decir, que si ψ es válido-T entonces ψ es un teorema.

Ejercicios

1) Demuestre a partir de las reglas semánticas que □□p↔□p puede ser falsa T (basta encontrar un mundo de algún modelo-T en que lo sea).
2) Demuestre a partir de las reglas semánticas que □ y ◊ son interdefinibles de la manera conocida.
3) Pruebe utilizando las reglas semánticas que las siguientes fórmulas son válidas T (no pueden ser falsas):
   - a. □p➔□(p∨q)
   - b. (p➔q)→(~q➔~p)
   - c. (p➔q)➔(~q➔~p)
   - d. (p→q)➔(~q→~p)
   - e. ~◊p→~□p
   - f. ~◊p➔◊~p
4) Simbolice y luego pruebe o dé contraejemplos en modelos-T de:
   - a) Si una proposición es necesaria entonces su disyunción con una proposición posible es necesaria.
   - b) La conjunción de una proposición necesaria con cualquier proposición es posible.
   - c) De dos proposiciones, una de ellas implica a la otra estrictamente.
   - d) Si una proposición es posible, su disyunción con cualquier proposición es posible.
   - e) Una proposición imposible implica estrictamente cualquier proposición.

f) Una proposición necesaria es implicada estrictamente por cualquier proposición.

II-2.4 Procedimiento decisorio de la validez-T

Existen varios métodos de decisión para los sistemas modales, o tal vez sea mejor decir, existen varias versiones de métodos de decisión. Nosotros desarrollaremos la que presentan Hughes y Cresswell;[29] para esto necesitamos recordar el método abreviado de la lógica proposicional.

A) La validez en la lógica proposicional

En la lógica proposicional muchas veces es «más fácil» averiguar si una proposición puede ser falsa que si puede ser verdadera, i.e. ¿en qué situación la fórmula dada es falsa? o ¿para qué valores de verdad de las proposiciones atómicas que la conforman la fórmula es falsa? Si no se encuentra que exista tal situación, esto significa que la proposición es siempre verdadera, i.e. se trata de una fórmula válida. Por eso, si queremos saber si una proposición es una tautología, es más rápido, generalmente, buscar un caso en que sea falsa; si lo encontramos, sabemos que la proposición no es válida (el caso encontrado sería un contraejemplo) y si no se puede encontrar, la proposición es tautológica. Debe notarse que para afirmar que se trata de una tautología no basta no encontrar el contraejemplo, pues eso podría deberse a una

---

[29] En [63] cap. V y VI.

incapacidad personal, sino que es necesario estar seguros de que no lo hay. El llamado método abreviado que presentamos logra ese objetivo.

Recordemos el método en su parte clásica preguntando si la fórmula $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$ es válida. Primero la suponemos falsa, y lo señalamos:

Ejemplo 1)

$$[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$$

$$0$$

Luego, desarrollamos las consecuencias necesarias de dicho supuesto (antecedente verdadero y consecuente falso):

$$(1)\qquad [(p\rightarrow q)\wedge p]\quad\rightarrow\quad q$$

$$1\qquad 0\qquad 0$$

Y así seguimos con $\wedge$:

$$(2)\qquad [(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$$

$$1\quad 1\;1\quad 0\;0$$

de allí obtenemos que p es verdadero y q falso, lo que reflejamos en todos los lugares donde aparecen:

$$(3)\qquad [(\;p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$$

$$1\;1\;0\;\;1\;1\;\;0\;0$$

Si observamos lo obtenido tenemos una contradicción pues $p\rightarrow q$ no puede valer 1 si p:1 y q:0, esto lo señalamos marcando los valores que se contradicen:

$$(4)\qquad [(\;p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$$

$$\underline{1}\;\underline{1}\;\;\underline{0}\;1\;\;1\;\;0\;0$$

Debemos observar dos cosas:

1) Todos los pasos han sido necesarios, es decir, se han seguido necesariamente de suponer falsa la fórmula, y nos han llevado a una situación que no puede darse (la contradicción). Luego la proposición no puede ser falsa, es una tautología.

2) El orden de los pasos podría ser otro, pero el resultado no varía si siempre buscamos consecuencias necesarias de acuerdo con las reglas semánticas de los operadores. Por ejemplo, después de (2) copiar el valor de q, y deducir que p tiene que ser 0:

$$(3) \quad [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$0\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ \ 0\ 0$$

Y luego notar la nueva contradicción:

$$(4) \quad [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$\underline{0}\ 1\ 0\ \ 1\ \underline{1}\ \ 0\ 0$$

con lo que la imposibilidad, manifestada por valores contradictorios aparece, pero de manera distinta. En general, el análisis de la validez de una fórmula por este método se presenta, no paso a paso sino, tal como resulta al final.

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(q \wedge p) \rightarrow r]$$

$$\underline{1}\ \underline{1}\ \ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ \ \ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$$

Cuando se encuentra una contradicción, como en los diagramas anteriores decimos que «el diagrama cierra».

Veamos otro caso que presenta una situación nueva:

Ejemplo 2):

(1) $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p)$

0

$+$

Hay dos maneras de continuar, pues dos situaciones pueden causar que un bicondicional sea falso (el hecho de las dos continuaciones lo marcamos poniendo una cruz debajo del valor). El análisis debe continuar con ambas en paralelo:

(2) $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p) \qquad (p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p)$

$0 \quad 0\ 1 \qquad\qquad 1 \quad 0\ 0$

y desarrollar cada una de manera independiente, pues se trata de dos situaciones que pueden ocurrir, una o la otra, pero no ambas:

(3) $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p) \qquad (p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p)$

$0\ 0\ 0 \quad 0\ \ 1\ \ \underline{1}0\ \underline{0}\ \underline{1}0 \qquad \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{0} \quad 0 \quad 0\ 1\ 0\ 1\ 10$

Como ambas terminan en una contradicción, podemos afirmar que se trata de una tautología; si una de las alternativas no hubiese terminado en contradicción, entonces ese caso sería el contraejemplo buscado, pues haría a la fórmula falsa. Cada alternativa es un posible contraejemplo; para que la fórmula sea válida deben cerrar ambas alternativas.

Ejemplo 3):

$$(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge q)$$

0

+

que desemboca en:

$(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge q)$	$(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge q)$
$0\ 0\ \underline{0}\ \ 0\ \ 10\ 1\ \underline{1}$	0

y si, sin desarrollar el otro caso, afirmásemos que se trata de una tautología por haber encontrado ya una contradicción, cometeríamos un error, como se prueba completando el análisis:

$(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge q)$	$(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge q)$
$0\ 0\ \underline{0}\ \ 0\ \ 10\ 1\ \underline{1}$	$1\ 1\ 1\ \ 0\ \ 01\ 0\ 1$

Al no haber contradicción en el segundo caso, ese se constituye en el ejemplo de falsedad buscado: la fórmula $(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge q)$ es falsa si p:1 y q:1.

B) Diagramas-T

En el análisis anterior se evaluaron las fórmulas solamente en una situación, en un único mundo posible, pues en los ejemplos las fórmulas carecían de operadores modales. Cuando estos, los operadores modales, aparecen, las reglas semánticas que los gobiernan nos obligan a evaluarlos tomando en cuenta generalmente lo que puede ocurrir en otro mundo posible accesible. Empezaremos la presentación del método decisorio T con un ejemplo que se puede evaluar sin recurrir a otros mundos (en general, numeraremos el mundo donde evaluamos primero como 1):

Ejemplo 1

$$\boxed{\underset{1}{\overset{*}{\Box}}\,[p \to \Box\,(q \to r)] \underset{0}{\to} \underset{0}{\overset{*}{\Diamond}}\,[\,q \to (\Box p \to \Diamond r)]} \quad M_1$$

En el ejemplo hemos colocado unos asteriscos * encima de los operadores modales. Más adelante explicamos su significado. También hemos encerrado todo el análisis dentro de un rectángulo para sugerir la idea de mundo y separarlo de otro cuando aparezca. Los valores de verdad entonces pertenecen a ese mundo. Hemos colocado algunos valores cuyo origen es obvio. Continuando con el análisis: dado que si $\Box\varphi:1$ entonces $\varphi:1$ en todo mundo accesible, en particular en él mismo:

$$\boxed{\underset{1}{\overset{*}{\Box}}[p \underset{1}{\to} \Box\,(q \to r)] \underset{0}{\to} \underset{0}{\overset{*}{\Diamond}}[\,q \to (\Box p \to \Diamond r)]} \quad M_1$$

Del mismo modo de $\Diamond\varphi:0$ inferimos que $\varphi:0$ en todo mundo, en particular en M_1 y continuamos:

```
*                   *       *    *
□ [p → □ (q → r)] → ◊ [q → (□p → ◊r)]
1    1            0 0  1 0  1  0 0
```

M_1

Nótese que cada vez que un □ vale 1 lleva * encima, y lo mismo cuando ◊ vale 0. Esto porque esos valores implican consecuencias para todo mundo accesible. Seguimos:

```
*      *            *       *    *
□ [p → □ (q → r)] → ◊ [q → (□p → ◊r)]
1  1 1 1̲  1 0̲ 0   0 0  1 0  11 0 00
```

M_1

En este caso, no común, logramos que se produzca una contradicción necesariamente en el mundo de partida, por lo que concluimos que se trata de una fórmula válida. Retengamos como novedades que:

Cuando □ tiene un 1 debajo se le pone un * encima.

Cuando ◊ tiene un 0 debajo se le pone un * encima.

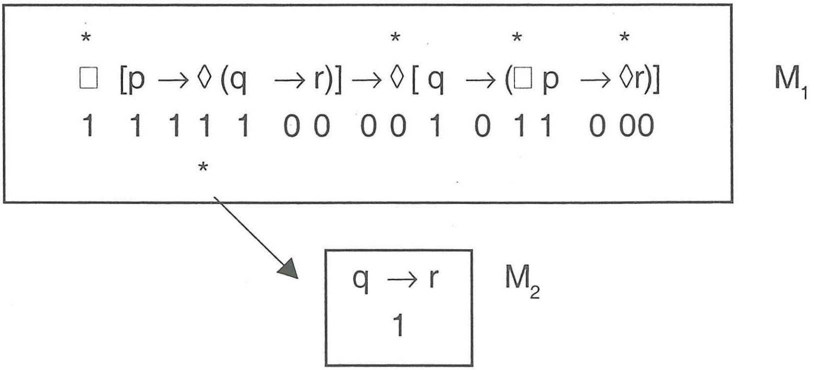
Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2

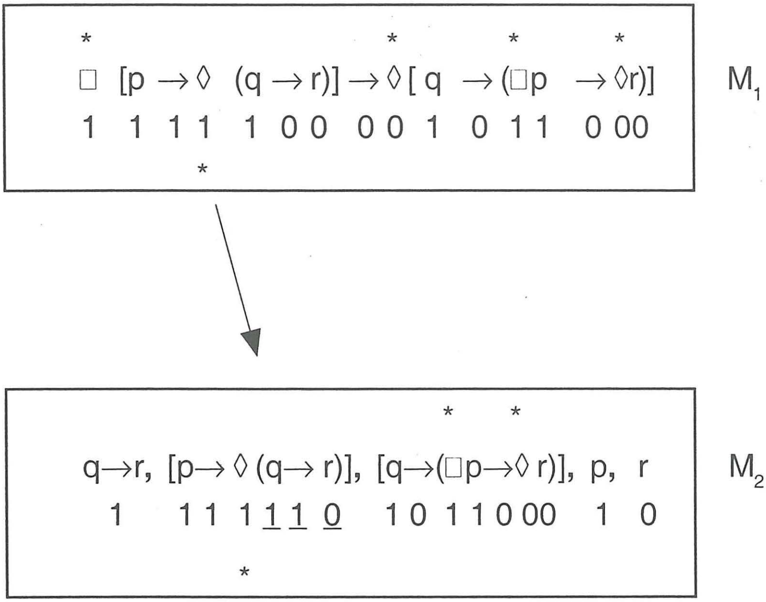
```
*                   *       *    *
□ [p → ◊ (q → r)] → ◊ [q → (□p → ◊r)]
1  1 1 1  1 0 0   0 0  1 0  11 0 00
       *
```

M_1

Donde aparece una situación nueva ◊ con 1 debajo (marcada con un * debajo): tenemos que ◊(q→r) es verdadera, y esto no supone que (q→r) lo sea en M_1, sino solo que lo es en algún mundo accesible. Ese mundo en que (q→r) es verdadera podría ser M_1. En este caso no lo es. Las situaciones como esta, en que puede requerirse de otro mundo, las marcamos con un * debajo; y si con nuestro análisis ya no se sigue el valor del operador para la fórmula con necesidad en el mundo en el que está la fórmula, o no llega a contradicción, consideramos ese otro mundo, así:



Donde debemos colocar una flecha que indica la relación de accesibilidad M_1RM_2, la que debe partir del asterisco que da origen a M_2. Además, si reflexionamos en lo que significa la situación de accesibilidad entre mundos, en particular para las reglas semánticas de los operadores □ y ◊, nos damos cuenta de que, por ejemplo, al ser □[p→◊(q→r)]:1 debe seguirse que [p→◊(q→r)] valga 1 en todo mundo accesible, en particular en M_2. Y lo mismo para todo operador modal marcado con un * encima. Todo eso lo señalamos en el diagrama:



Primero copiamos en M_2 la fórmula que acompañaba al operador con asterisco debajo que da origen a M_2, y con el valor que tenía el operador modal. Luego, a continuación de la primera, y separadas por comas, las fórmulas gobernadas en M_1 por un operador modal con * encima, y con el valor que tenían en M_1. Después, con estos valores, aplicamos las reglas semánticas a M_2 para deducir otros valores. En nuestro caso, de M_1 recibimos p:1 y r:0. Esos valores rigen en todo M_2, por lo que los copiamos y, con los valores de cada fórmula, se logra el resultado anterior. En este diagrama la contradicción obtenida en M_2 es consecuencia obligada de suponer que la fórmula de M_1 era falsa, por lo que se concluye que $\Box[p\rightarrow\Diamond(q\rightarrow r)]\rightarrow\Diamond[q\rightarrow(\Box p\rightarrow\Diamond r)]$ es válida-T.

Recapitulando: generamos el mundo por una necesidad semántica señalada por un * debajo, y luego examinando de izquierda a derecha de los * encima trasladamos, separando por comas, a las otras fórmulas con sus valores. Debe entenderse que todas las fórmulas separadas por comas valen al mismo tiempo en el nuevo mundo.

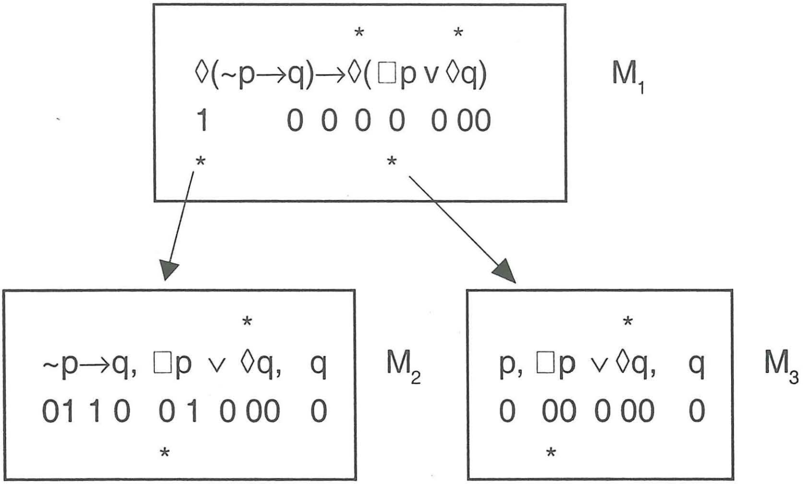
Ejemplo 3

Veamos otro caso. ¿Es válida $\Diamond(\sim p\rightarrow q)\rightarrow\Diamond(\Box p \vee \Diamond q)$? Empecemos suponiéndola falsa

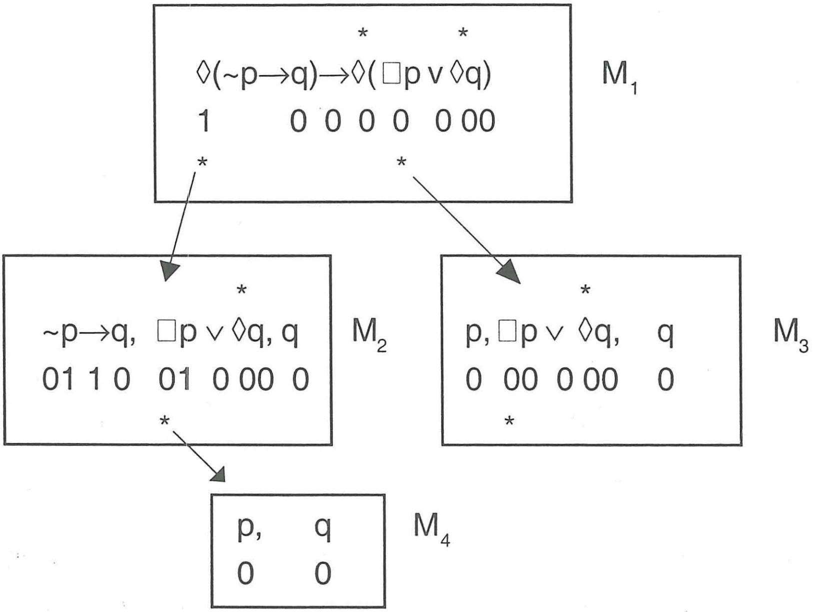
```
         *     *
◊(~p→q)→ ◊ (□p v ◊q)
1       0 0 0 0  0 00
*           *
```

M_1

Vemos que no podemos inferir el valor de p, a partir de $\Box p$:0 pues p podría ser falsa en otro mundo y no en M_1; y lo mismo ocurre con $(\sim p\rightarrow q)$ a partir de $\Diamond(\sim p\rightarrow q)$:1. Así , necesitamos generar dos mundos que satisfagan a los * bajos.



Como ya explicamos, cada mundo nuevo accesible desde M_1 debe satisfacer los valores modales marcados con * arriba en M_1. Hemos trasladado los valores, efectuado las deducciones que se imponían y llegado a la situación presentada en el diagrama. En los dos mundos M_2 y M_3 todavía hay * debajo de operadores modales. En M_3, sin embargo, ya no es necesario suponer nuevos mundos accesibles porque en la fórmula que sigue al operador con asterisco debajo, p cumple con ser falsa y basta para garantizar el valor falso del □. En M_2 ese no es el caso y se requiere de un mundo accesible desde M_2.



Nuestro análisis termina mostrando que esa fórmula puede ser falsa en un modelo como el del diagrama. Tal vez el lector encuentre que falta determinar el valor de p en el mundo 1. La falta de ese valor nos indica que puede tomarse 0 o 1 para él y que no va a cambiar el resultado: la fórmula no es válida.

Daremos a continuación las reglas que regulan la colocación de los asteriscos. Estas se enuncian a partir de los valores veritativos de los operadores modales:

Reglas de los asteriscos

Si un □ tiene un 1 debajo se pone un * encima.

Si un ◊ tiene un 0 debajo se pone un * encima.

En caso contrario llevan un * debajo:

Es decir:

*			*
□	□	◊	◊
1	0	1	0
	*	*	

Las reglas para construir nuevos mundos las enunciaremos y las llamaremos:

Reglas de Colón

A) Si una fórmula necesaria $\Box\varphi$ es verdadera entonces φ es verdadera en todo mundo accesible (incluido el de partida).

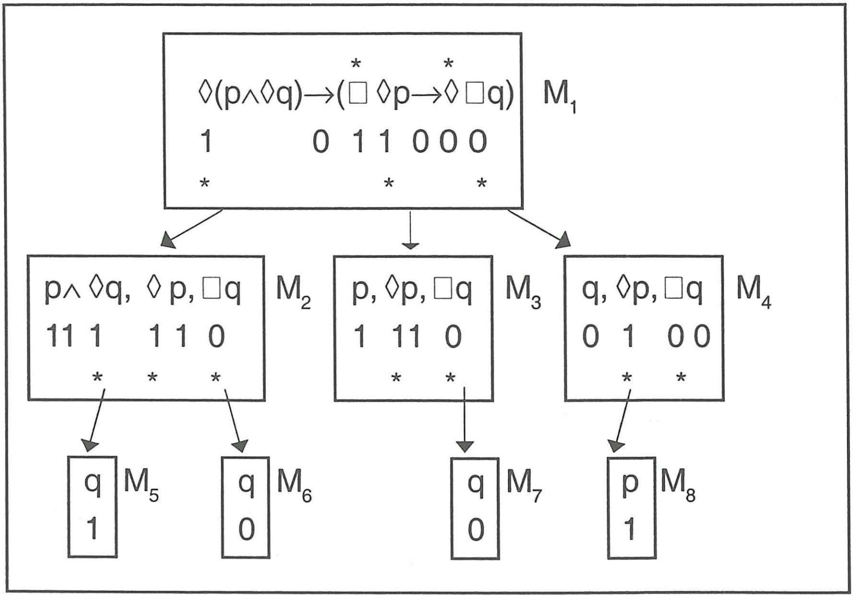
B) Si una fórmula posible $\Diamond\varphi$ es falsa entonces φ es falsa en todo mundo accesible (incluido el de partida).

C) Si una fórmula necesaria $\Box\varphi$ es falsa entonces **debe existir** por lo menos un mundo accesible con φ falsa.

D) Si una fórmula posible $\Diamond\varphi$ es verdadera entonces **debe existir** por lo menos un mundo accesible con φ verdadera.

La mención al mundo de partida en A y en B se debe a la reflexividad de R en los modelos-T. En C y D debe notarse que se requiere un mundo con ese valor; si no aparece en el diagrama, entonces se aumenta uno que cumpla ese requisito.

Veamos un análisis de validez-T completo:



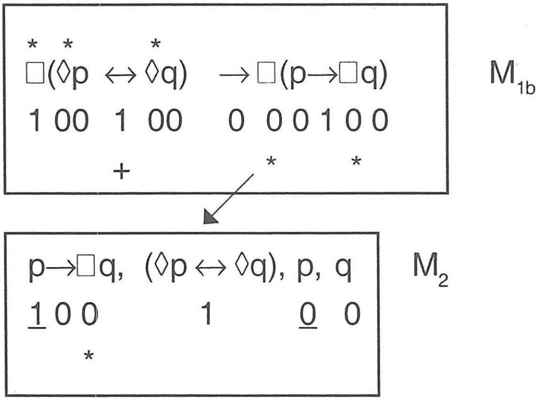
Nuevamente resulta una fórmula inválida. El lector debe especificar **M** y R del modelo-T que la falsea. Cabe recordar que en estos diagramas no debe suponerse nada. Cuando no puede deducirse necesariamente el valor de una fórmula debe dejarse en blanco y construir otro mundo si fuese necesario. Es preferible este procedimiento al de introducir valores que no son necesarios, pues si uno no lleva un registro cuidadoso de estas suposiciones todo el diagrama puede invalidarse. Es claro que la fórmula anterior puede invalidarse en un modelo más simple, por ejemplo, M_7 no es necesario, pues M_6 lo podría reemplazar recibiendo la flecha de M_3.

Solo nos falta considerar qué efecto puede tener un operador + en un diagrama. Recordemos que llamamos así a los operadores que al recibir el valor de verdad que les corresponde originan más de un caso.

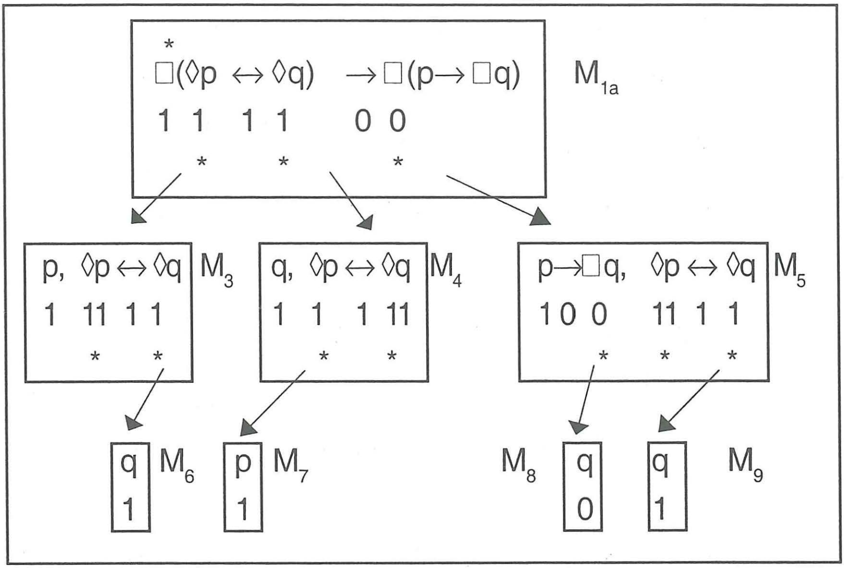
Ejemplo 4

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} * & & & & & & \\ \Box & (\Diamond p & \leftrightarrow & \Diamond q) & \rightarrow & \Box & (p \rightarrow \Box q) \\ 1 & & 1 & & 0 & 0 & \\ & & + & & & * & \end{array}} \quad M_1$$

No podemos continuar en M_1 atribuyendo valores de verdad a las subfórmulas, pues puede suceder a) $\Diamond p{:}1$ y $\Diamond q{:}1$, o b) $\Diamond p{:}0$ y $\Diamond q{:}0$. Cada uno de estos casos no constituye otro mundo asociado a M_1 sino dos modos distintos (alternativas) que puede adoptar M_1. Y no sabemos en cuál puede falsearse la fórmula, por tanto, deben considerarse los dos. Cada uno constituye una posibilidad de falsear la fórmula, por lo que esta solo será válida si ambos diagramas se cierran (se llega a una contradicción). Continuamos primero con M_{1b}:



Donde vemos que se produce una contradicción en M_2. ¿Podemos concluir de la contradicción en un caso que <u>todo</u> el diagrama cierra? Tratemos de responder: en M_{1b} ocurre que $\Box(p \to \Box q)$ es falsa y $p \to \Box q$ es verdadera. Es necesario por tanto que se dé un mundo accesible (M_2) en el que $p \to \Box q$ sea falsa. Al mismo tiempo, en M_{1b} $\Diamond p$ es falsa, lo que obliga a que p sea falsa en todo mundo accesible, en particular en M_2. De estas consideraciones vemos que las condiciones de M_{1b} son las que generan la contradicción; en realidad, la contradicción está en M_{1b}. Pero para afirmar que el diagrama en su totalidad cierra debemos recordar que éste se inicia con M_1, que puede darse de dos formas: M_{1b} y M_{1a}. Podría ocurrir tanto que M_{1a} nos lleve a una contradicción como que no, por lo que debemos examinarlo antes de pronunciarnos.



Nótense varios detalles: 1) No todo * debajo origina un nuevo mundo. 2) Varias subfórmulas quedan sin valuar. Al no cerrar el diagrama, ya podemos afirmar que la fórmula dada no es válida, pues constituye un modelo-T en el que es falsa. M_1 puede darse de dos formas, una de ellas constituye el contra ejemplo buscado.

Regla para las alternativas

Si en un rectángulo M_i hay un operador con + debajo, se descompone en tantos rectángulos (alternativas) como sea necesario y se analiza cada uno.

En resumen, el método de diagramas-T para decidir si una fórmula φ es válida o no, se compone de los siguientes elementos:

1) En el mundo 1 se atribuye valor 0 a φ y se procede con los valores según:

   a) Cálculo proposicional o modal.

   b) Reglas para las alternativas.

   c) Reglas para *.

   d) Reglas para nuevos mundos.

   que se utilizan tantas veces como corresponde. El único obligatorio es el paso 1 que inicia el proceso.

Al finalizar se ha generado un Sistema Completo de Diagramas-T, como lo llaman Hughes y Cresswell, para la fórmula φ. Nosotros hablaremos simplemente de diagrama-T, cuando no se preste a confusión. Una de las ventajas de este método es que, además de proporcionar ineluctablemente la respuesta a la pregunta que lo inicia, genera, cuando la fórmula no es válida, un modelo-T en el que la fórmula es falsa. Es decir, es un método decisorio constructivo.

Para terminar de caracterizar el método conviene establecer algunas definiciones.

Validez según los diagramas-T

φ es válido según un diagrama-T si el diagrama cierra.

Cierre de diagrama-T

Un diagrama-T cierra si el mundo 1 es inconsistente.

Mundo inconsistente

1) Todo mundo en el que una misma fórmula o subfórmula recibe dos valores (0 y 1) es inconsistente.
2) Si un mundo Mj es inconsistente y recibe una flecha de M_i, entonces M_i también es inconsistente.
3) Si todas las alternativas de un mundo son inconsistentes, el mundo es inconsistente.

Teorema

Un sistema de diagramas-T es un procedimiento de decisión para T.[30]

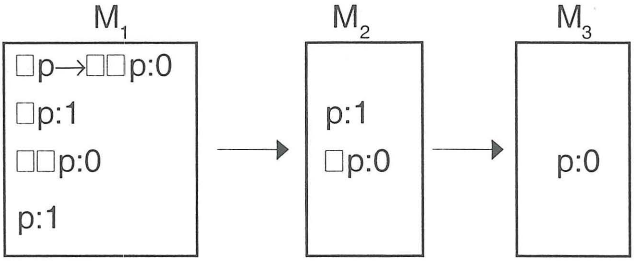
II-3 Modelos y Diagramas-S4 y S5

II-3.1 Semántica S4

S4 se caracteriza por la validez de la fórmula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$, fórmula que es inválida en T. Si realizamos un esquema de su análisis de validez-T resulta (en una presentación en la que se da en cada mundo el valor de las fórmulas):

---

[30] La demostración se puede ver en Hughes y Cresswell [63] cap. 5.



En esta disposición de mundos, la fórmula es falsa en M_1 pues M_3 no es accesible a M_1. Si M_3 fuese accesible desde M_1 entonces al ser $\Box p:1$ en M_1 se tendría también $p:1$ en M_3 con la consiguiente contradicción. Y es eso lo que se busca. Variaremos la noción de modelo-T para que esto ocurra.

A) Modelo-S4

Un modelo-S4, M_{S4} es un conjunto de 3 elementos < **M**, R, V> donde **M** y V son como en los modelos T y R es, además de reflexiva, transitiva.

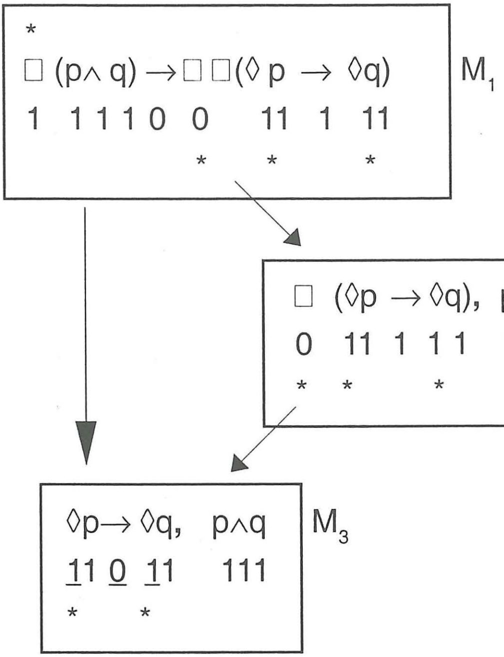
Decir que R es además transitiva significa:

Si M_iRMj y $MjRM_k$ entonces M_iRM_k, para cualesquiera M_i, Mj, $M_k \in$ **M**.

Además, la reflexividad se mantiene: M_iRM_i, para todo $M_i \in$ **M** y las reglas semánticas que gobiernan la función V no se modifican.

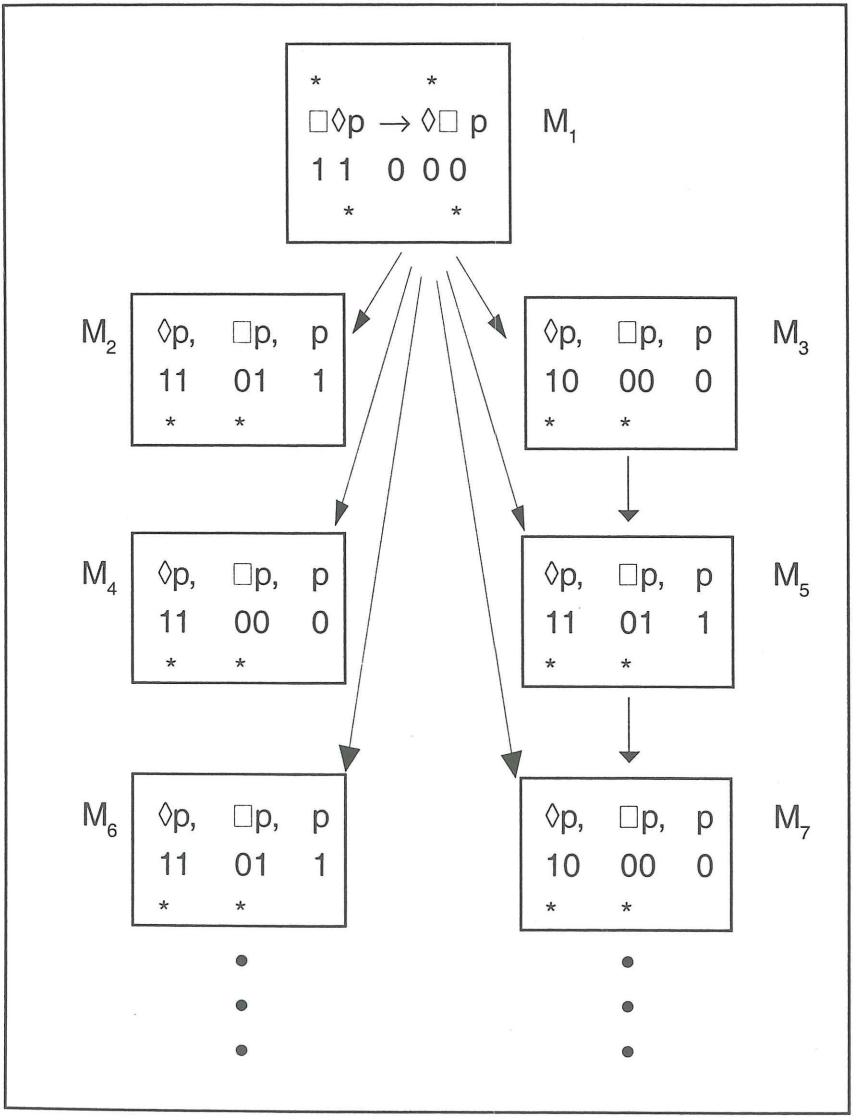
B) Diagramas-S4

Como resultado de la transitividad, aparece una situación nueva del siguiente tipo: si en un mundo M_1 $\Box\varphi$:1 y éste tiene uno accesible M_2, en él φ:1 , y si este segundo tiene uno accesible M_3, la transitividad implica que en él también φ:1. Veamos un ejemplo:



Es válido-S4, pues el diagrama cierra. Pero en T no lo sería, pues es por la transitividad que se tiene p∧q:1 en M_3.

Veamos un caso muy ilustrativo:



Como se puede apreciar, podemos seguir *ad infinitum* sin terminar el diagrama: siempre requeriremos nuevos mundos.

Si reexaminamos con cuidado cada mundo, veremos que M_6 repite M_2 y que M_7 hace lo mismo con M_3. Es decir, en ese diagrama M_6 y M_7 no eran mundos necesarios, ya estaban. Establecemos:

La regla de los mundos repetidos para diagramas-S4

Siempre que se tenga una sucesión de mundos accesibles, como:

$$\rightarrow M_i \rightarrow \bullet\bullet\bullet \rightarrow Mj \rightarrow \bullet\bullet\bullet \qquad M_k$$

donde M_k esté contenido en M_i, se suprimirá M_k, y se dirigirá hacia M_i las flechas que llegaban a M_k. Decimos que un mundo está contenido en otro cuando todas las fórmulas y sus respectivos valores de verdad se encuentren como fórmulas o subfórmulas del otro mundo. Así, el diagrama debe quedar:

$$M_i \ \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bullet\bullet\bullet}} \ Mj$$

Con esta regla los diagramas-S4 son finitos y se trata de un procedimiento decisorio. S4 como sistema deductivo (que veremos más adelante) es completo.

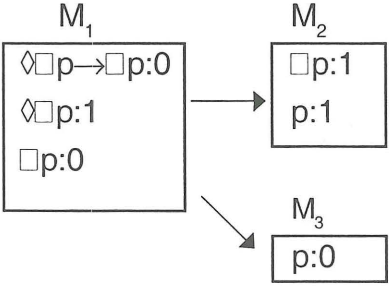
Ejercicios

1) Pruebe en S4 la validez de:

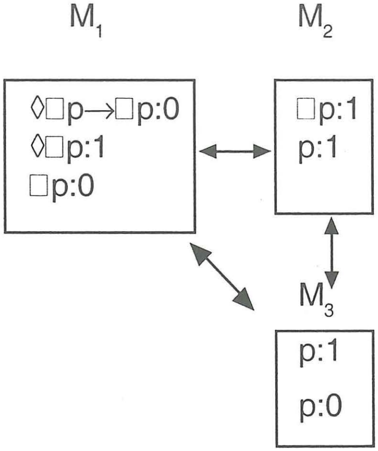
a. $\Box p \quad \leftrightarrow \quad \Box p$
b. $\Diamond p \quad \leftrightarrow \quad \Diamond\Diamond p$
c. $\Box\Diamond p \quad \leftrightarrow \quad \Box\Diamond\Box\Diamond p$
d. $\Diamond\Box p \quad \leftrightarrow \quad \Diamond\Box\Diamond\Box p$

II-3.2 Semántica S5

Sabemos que S5 se caracteriza por $\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$, fórmula que es inválida en T y en S4. Si realizamos un esquema de su análisis de validez resulta:



Para que aparezca una contradicción necesitaríamos que la relación R, además de reflexiva y transitiva, sea simétrica. En ese caso tendríamos:



Con la aparición de la ansiada contradicción que cierra el diagrama. Cambiamos la noción de modelo-S4.

A) Modelo-S5

Un modelo-S5, M_{S5} es un conjunto de 3 elementos < **M**, R, V> donde **M** y V son como en los modelos T y S4, y R es además de reflexiva y transitiva simétrica.

R es además de reflexiva y transitiva, simétrica, por tanto cumple:

M_iRM_i, para todo $M_i\in$ **M**.

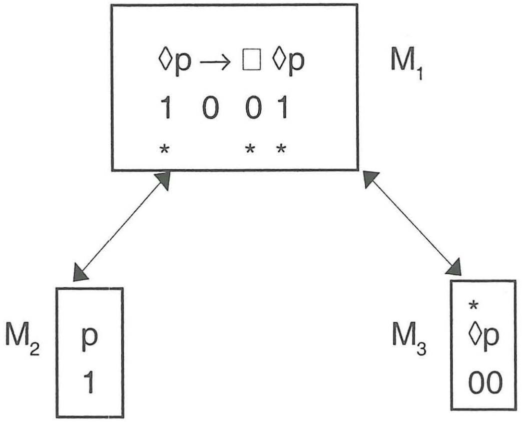
Si M_iRMj y $MjRM_k$ entonces M_iRM_k, para cualquier M_i, Mj, $M_k\in$ **M**.

y si M_iRMj entonces $MjRM_i$, para cualesquiera M_i, Mj $\in$ **M**.

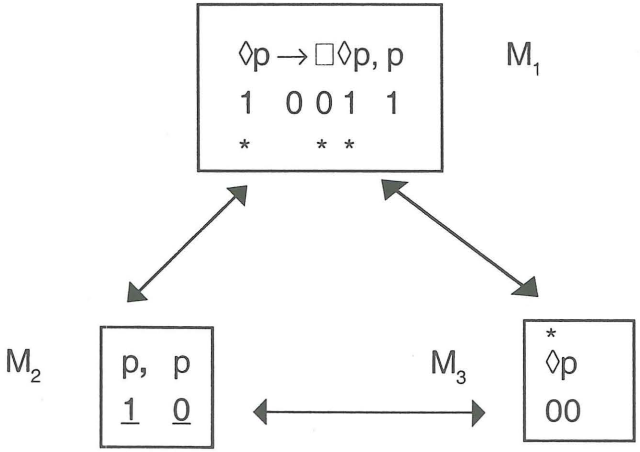
Las reglas semánticas que gobiernan la función V no se modifican.

B) Diagramas-S5

Veamos un ejemplo en el que inicialmente tenemos



Pero la transitividad y la simetría producen que M_2 y M_3 sean mutuamente accesibles. Además, la simetría entre M_1 y M_3 obliga a que en M_1 p:0. Es decir:



Con lo que el diagrama cierra.

Ejercicios

1) Probar la validez-S5 de:

   a. $\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$

   b. $\Box\Diamond(p\wedge\Box q) \leftrightarrow (\Diamond p\wedge\Box q)$

Capítulo III

Los sistemas de deducción natural T, S4 y S5

III-1 El sistema T

III-1.1 La deducción natural proposicional

El sistema de deducción natural es una continuación del sistema desarrollado en Trelles y Rosales[31] para la lógica de primer orden, con cuantificación uniforme, adaptado, en la parte modal, de acuerdo a Konyndyk.[32] Es una continuación de los que se ven en los cursos de lógica clásica.[33] Las justificaciones que usaremos son:

MP o E→	Modus ponens
I→	Introducción del condicional
MT	Modus tollens
DN	Doble negación
Rep	Repetición
Reit	Reiteración
E∧	Simplificación
I∧	Adjunción o introducción de la conjunción
I∨	Adición o introducción de la disyunción

---

[31] En [108].

[32] En [71].

[33] Véase, por ejemplo, [4].

E∨	Eliminación de la disyunción
E↔	Eliminación del bicondicional
I↔	Introducción del bicondicional
DM	De Morgan
TP	Teorema proposicional para cualquier otra regla o teorema de la lógica proposicional (aunque a veces pondremos sus nombres)
IE	Intercambio de equivalentes
E~	Eliminación de la negación
I~	Introducción de la negación

Al sistema de deducción natural de la lógica proposicional clásica lo llamaremos DNP.

III-1.2 Sistema de deducción natural T (DNT)

En el DNT se utilizarán las definiciones de símbolos no primitivos de L_{MP}, por lo que las recordaremos:

Def.◊ $\Diamond\varphi =_{def} {\sim}\Box{\sim}\varphi$

Def.$\Rightarrow$ $\varphi \Rightarrow \psi =_{def} \Box(\varphi \rightarrow \psi)$

Def.≡ $\varphi \equiv \psi =_{def} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

y las usaremos en las deducciones.

A) Reglas de deducción de DNT:

El sistema de deducción natural modal para el sistema T (DNT) que vamos a construir es, como ya dijimos, una ampliación del sistema de deducción natural proposicional. Lo construiremos añadiendo reglas de deducción a las que se tenían en la lógica proposicional. Empezamos con la siguiente:

Regla de eliminación de la necesidad E□

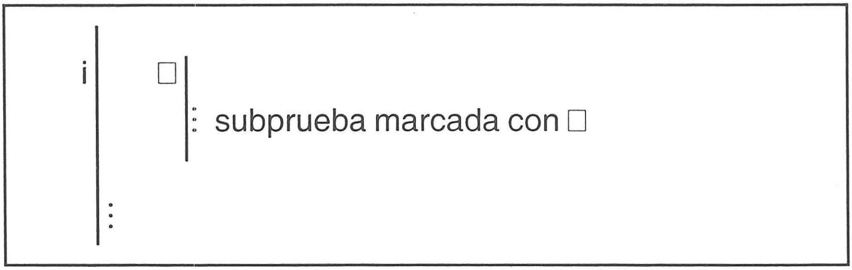
$$\begin{array}{r|l} & \vdots \\ i & \Box\varphi \\ & \vdots \\ j & \varphi \qquad i,E\Box \\ & \vdots \end{array}$$

Es decir, si □φ es una línea de una deducción entonces φ puede ser una que siga en la misma subprueba.

Para enunciar la regla de introducción paralela I□ necesitamos previamente introducir la noción de subprueba marcada con □ y la regla de reiteración-T.

Subprueba marcada con □

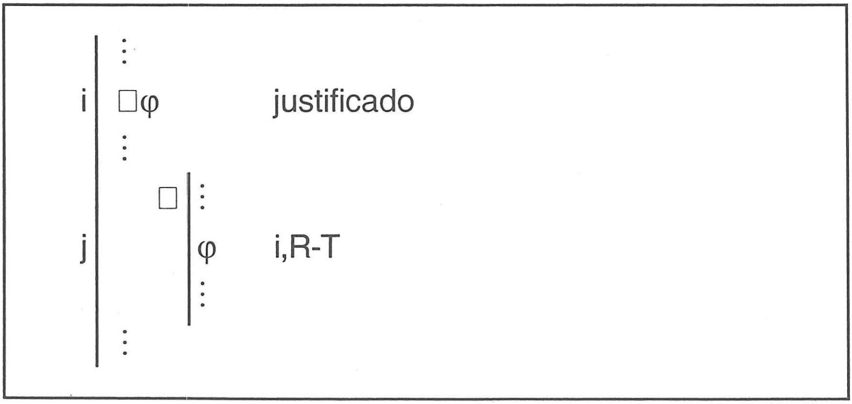
Una subprueba marcada con □ o subprueba necesaria es una subprueba similar a las subpruebas marcadas con una variable de la lógica cuantificacional. En una subprueba necesaria no puede reiterarse una proposición que no sea necesaria. Para efectivizar esta prohibición no permitimos aplicar reiteración en una prueba necesaria.



Dentro de una subprueba necesaria no puede aplicarse la regla Reit (de la lógica proposicional no modal) que tenemos. Necesitamos una especial:

Reiteración T R-T

Esta es la regla que permite reiterar dentro de una subprueba necesaria



Es decir, podemos introducir dentro de la subprueba necesaria una fórmula que en una línea anterior de una prueba de jerarquía superior se tenga por necesaria. Al pasar dentro de la subprueba pierde su operador de necesidad.

Las reglas anteriores de alguna forma eran previsibles; la que sigue es más novedosa y constituye el núcleo de nuestro sistema. Es la regla que nos permite decidir qué proposiciones son necesarias.

Regla de introducción de la necesidad I□

$$\begin{array}{r|ll}
 & \vdots & \\
i & \Box\ \vert & \\
 & \quad\ \vert\ \vdots & \text{Subprueba sin hipótesis y marcada con } \Box \\
j & \quad\ \vert\ \varphi & \\
 & \vdots & \\
k & \Box\varphi & \text{i-j, I}\Box \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Nótese que si φ es un teorema entonces $\Box\varphi$ también lo es:

$$\frac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$$

que en esta formulación se conoce como regla de necesitación RN. En relación a la regla RN recalcamos que no debe confundirse con: si φ es una línea de una deducción entonces $\Box\varphi$

puede ser una que siga. Es decir, no debe entenderse como: $\varphi \vdash \Box\varphi$,que no es válida. Lo que la regla de necesitación establece es que los teoremas (últimas líneas de pruebas sin hipótesis) son proposiciones necesarias y esto parece intuitivamente aceptable. Y si no, puede probarse con R-T e I$\Box$. Veíamos en el Cap.1 que las verdades lógicas eran buenos ejemplos de verdades necesarias y esto es lo que recoge RN. En general, aplicaremos la regla a todos los teoremas de la lógica proposicional. Por ejemplo, escribiremos en cualquier línea de una deducción $\Box(p \vee \sim p)$ con la justificación TP+RN.

En cambio, aceptar como ley $\varphi \rightarrow \Box\varphi$, llevaría a la desaparición de la lógica modal incrustándola dentro de la no modal. En efecto, como también vale $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ se seguiría:

$$\Box\varphi \leftrightarrow \varphi \qquad (1)$$

Teorema que implica que el símbolo $\Box$ es superfluo. Cada vez que lleguemos a una situación en la que valga alguna forma de (1) establecemos que la lógica modal no es más que una forma de la no modal y, por tanto, inútil.

Veremos a continuación algunos teoremas para recordar cómo funciona un sistema de deducción natural:

Teorema 1 $\Box p \rightarrow p$

1	$\vert\quad \vert\ \Box p$	Hip.
2	$\vert\quad \vert\ p$	1,E$\Box$
3	$\vert\ \Box p \rightarrow p$	1-2, I$\rightarrow$

Teorema 2 $[(p \Rightarrow q) \wedge {\sim}q] \Rightarrow {\sim}p$

1	$\vert\ \Box\ \vert\quad \vert\ \underline{(p \Rightarrow q) \wedge {\sim}q}$	Hip.
2	$\vert\quad \vert\quad \vert\ p \Rightarrow q$	1,E$\wedge$
3	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \Box(p \rightarrow q)$	2, Def. $\Rightarrow$
4	$\vert\quad \vert\quad \vert\ {\sim}q$	1, E$\wedge$
5	$\vert\quad \vert\quad \vert\ p \rightarrow q$	3, E$\Box$
6	$\vert\quad \vert\quad \vert\ {\sim}p$	4,5 MT
7	$\vert\quad \vert\ [(p \Rightarrow q) \wedge {\sim}q] \rightarrow {\sim}p$	1-6, I$\rightarrow$
8	$\vert\ \Box\{[(p \Rightarrow q) \wedge {\sim}q] \rightarrow {\sim}p\}$	1-7, I$\Box$
9	$\vert\ [(p \Rightarrow q) \wedge {\sim}q] \Rightarrow {\sim}p$	8, Def $\Rightarrow$

Teorema 3 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

1	$\vert\ \vert\ \Box(p\to q)$	Hip.
2	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box p$	Hip.
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box(p\to q)$	1, Reit.
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box\ \vert\ p\to q$	3, R-T
5	$\vert\ \vert\ \vert\quad \vert\ p$	2, R-T
6.	$\vert\ \vert\ \vert\quad \vert\ q$	4,5,MP
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \Box q$	4-6,I$\Box$
8	$\vert\ \vert\ \Box p\to\Box q$	2-7, I$\to$
9	$\vert\ \Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q)$	1-8, I$\to$

Teorema 4 $(\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$

1	$\vert\ \vert\ \Box p\wedge\Box q$
2	$\vert\ \vert\ \Box p$
3	$\vert\ \vert\ \Box q$
4	$\vert\ \vert\ \Box\ \vert\ q$
5	$\vert\ \vert\quad \vert\ p$
6	$\vert\ \vert\quad \vert\ p\wedge q$
7	$\vert\ \vert\ \Box(p\wedge q)$
8	$\vert\ (\Box p\wedge\Box q)\to\Box(p\wedge q)$
9	$\vert\ \vert\ \Box(p\wedge q)$
10	$\vert\ \vert\ \Box\ \vert\ p\wedge q$
11	$\vert\ \vert\quad \vert\ p$
12	$\vert\ \vert\ \Box p$
13	$\vert\ \vert\ \Box\ \vert\ p\wedge q$
14	$\vert\ \vert\quad \vert\ q$
15	$\vert\ \vert\ \Box\ q$
16	$\vert\ \vert\ \Box p\wedge\Box q$
17	$\vert\ \Box(p\wedge q)\to(\Box p\wedge\Box q)$
18	$\vert\ \Box(p\wedge q)\leftrightarrow(\Box p\wedge\Box q)$

El lector debe completar la prueba colocando las respectivas justificaciones.

El sistema DNT permite no solo demostraciones sino, como en la lógica proposicional, derivaciones. Es decir, demostraciones en las que intervienen premisas. Para ser totalmente precisos, demostraciones en las que intervienen premisas en la prueba principal. Ejemplo:
Derivar de las premisas 1) $(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$ y 2) $\Box(p\vee q)$ la conclusión $\Box r$. O como se acostumbra abreviar:

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$$
$$\Box(p\vee q) \quad /\therefore \Box r$$

1	$\Box(p\rightarrow r)\wedge\Box(q\rightarrow r)$		Hip
2	$\Box(p\vee q)$		Hip.
3	$\Box$	$p\vee q$	2,R-T
4		$p\rightarrow r$	1,E$\wedge$ + R-T
5		$q\rightarrow r$	1,E$\wedge$ + R-T
6		r	3,4,5, TP
7	$\Box r$		3-6, I$\Box$

Esta derivación se ha efectuado empleando varios «atajos» obvios. El punto es que, a partir de ahora, para abreviar las pruebas se puede emplear un paso en lugar de varios, siempre y cuando estos puedan reconstruirse sin dificultad y sin originar equívocos.

Ejercicios

a) Probar: $$\frac{\vdash \varphi}{\vdash \Box \varphi}$$

y completar colocando las justificaciones de la prueba del teorema 4.

b) Derivar

1. $\Box(p \rightarrow q)$

   $\Box(p \wedge \sim r)$ $/\therefore \sim(r \rightarrow \sim q)$
2. $p \rightarrow q$

   $q \rightarrow r$ $/\therefore p \rightarrow r$
3. $p \rightarrow q$

   $\Box p$

   $q \rightarrow r$ $/\therefore \Box r$
4. $\Box(p \wedge q) /\therefore \Box q$
5. $\Box(p \vee q)$

   $\Box \sim p$ $/\therefore \Box q$
6. $\Box(p \vee q)$

   $p \rightarrow q$ $/\therefore \Box q$
7. $p \rightarrow q$

   $p \rightarrow \Box r$

   $q \rightarrow \Box \sim r$ $/\therefore \Box \sim p$
8. $\Box[p \vee (q \vee r)]$

   $q \rightarrow s$

   $(p \vee r) \rightarrow t$ $/\therefore \Box(s \vee t)$

c) Probar en DNT los que sean teoremas. E invalidar por diagramas-T los que no lo son.

1. $p \Rightarrow p$
2. $\Box\Box p \rightarrow \Box p$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
4. $(\Box p \wedge \Box q) \Rightarrow (p \equiv q)$
5. $\Box p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
6. $\Box\sim p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

7 $[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \Box\sim p$

8. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \Rightarrow \Box q$

III-1.3 Más reglas (Derivadas)

Como hemos visto, las nociones de posibilidad y de necesidad están relacionadas, por lo que, partiendo de la definición de la posibilidad, podemos probar algunas reglas para manejar el operador $\Diamond$.

Introducción de la posibilidad I$\Diamond$

$$
\begin{array}{r|ll}
 & \vdots & \\
i & \varphi & \text{justificado.} \\
 & \vdots & \\
j & \Diamond\varphi & i, \mathrm{I}\Diamond. \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Eliminación de la posibilidad E◊

```
  |  :
i |  ◊φ
  |  :
j |     □ |φ      Hip.◊  (OJO ◊φ aparece en el paso i)
  |       | :
k |       |ψ
  |  :
l |  ◊ψ           i,j-k, E◊
```

Regla que con más propiedad debería llamarse transmisión de la posibilidad. Se basa en el teorema:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\varphi \Rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi) \\
\approx & [(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \Diamond\varphi] \rightarrow \Diamond\psi \\
\approx & [\Diamond\varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow \Diamond\psi \\
\approx & [\sim\Box\sim\varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow \sim\Box\sim\psi.
\end{array}
$$

Para comprenderla, primero debemos probar el teorema en su última forma, para lo cual bastan las reglas primitivas. Esto queda como tarea para el lector y es necesaria para lo que sigue. Probaremos la regla E◊.

1	$\Diamond\varphi$	Hip.
2	$\Box \mid \underline{\varphi}$	La subprueba 2-3 se supone por Hip.
3	$\mid \psi$	
4	$\sim\Box\sim\varphi$	1, Def.$\Diamond$
5	$\Box \mid \Gamma$	Γ representa las líneas que por R-T se hayan reiterado en 2-3. (Γ puede ser vacío).
6	$\mid \mid \underline{\varphi}$	Hip.
7	$\mid \mid \Gamma$	5,reit. (si es necesario)
8	$\mid \mid \psi$	Se justifica como en 3.
9	$\mid \varphi\rightarrow\psi$	6-8, I$\rightarrow$
10	$\Box(\varphi\rightarrow\psi)$	5-9, I$\Box$.
11	$\Diamond\psi$	1,10, El teorema probado por el lector.

Esta regla debe revisarse en paralelo con la de eliminación del cuantificador existencial de la lógica de predicados.

Teorema 5 $\Diamond (p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

1	$\Diamond(p\wedge q)$	Hip.
2	$\Box\ p\wedge q$	Hip.$\Diamond$
3	p	2, E$\wedge$
4	$\Diamond p$	1,2-3, E$\Diamond$
5	$\Box\ p\wedge q$	Hip.$\Diamond$
6	q	5,E$\wedge$
7	$\Diamond q$	1,5-6, E$\Diamond$
8	$\Diamond p\wedge\Diamond q$	4,7, I$\wedge$
9	$\Diamond(p\wedge q)\rightarrow(\Diamond p\wedge\Diamond q)$	1-8, I$\rightarrow$

Por último, vale la pena señalar que en la regla I$\Diamond$ es muy importante que la Hip $\Diamond$, es decir φ, aparezca antes como proposición posible. Si no fuese así, si no fuese necesario que apareciera antes, se podría demostrar que $p\wedge\sim p$ es posible, lo que no es el caso.

Ejercicios

a) Probar:

1) $[(p\rightarrow q)\wedge\Diamond p]\rightarrow\Diamond q$

2) $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$

b) Demostrar las equivalencias:

$\Box\varphi\leftrightarrow\psi \approx \Box\varphi\leftrightarrow\Box\psi \approx \varphi\equiv\psi$.

c) Compruebe la afirmación respecto de probar $\Diamond(p\wedge\sim p)$ hecha en el último párrafo.

III-1.4 Resumen DNT. Teoremas y reglas más importantes de DNT

Graduación de las modalidades:

$\vdash\Box\varphi\rightarrow\varphi$, $\vdash\varphi\rightarrow\Diamond\varphi$, $\vdash\Box\varphi\rightarrow\Diamond\varphi$

De implicación y modalidades

Si $\vdash\varphi\rightarrow\psi$ entonces $\vdash\Box\varphi\rightarrow\Box\psi$

Si $\vdash\varphi\rightarrow\psi$ entonces $\vdash\varphi\Rightarrow\psi$

$\vdash\varphi\rightarrow\psi\Rightarrow\vdash\Diamond\varphi\rightarrow\Diamond\psi$, La flecha $\Rightarrow$ abrevia el si...entonces metalingüístico entre teoremas.

Conjunción, disyunción y modalidades:

$\vdash\Box(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow(\Box\varphi\wedge\Box\psi)$

$\vdash(\Box\varphi\vee\Box\psi)\rightarrow\Box(\varphi\vee\psi)$

$\vdash\Diamond(\varphi\wedge\psi)\rightarrow(\Diamond\varphi\wedge\Diamond\psi)$

$\vdash\Diamond(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow(\Diamond\varphi\vee\Diamond\psi)$

Reglas o teoremas de intercambio entre negación y modalidad (INM)

$\vdash\sim\Diamond\varphi\leftrightarrow\Box\sim\varphi$

$\vdash\sim\Diamond\sim\varphi\leftrightarrow\Box\varphi$

$\vdash\Diamond\sim\varphi\leftrightarrow\sim\Box\varphi$

$\vdash\Diamond\varphi\leftrightarrow\sim\Box\sim\varphi$

Ejercicios

a) Probar:

1) $\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$
2) $\Box p \rightarrow \Diamond p$
3) $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$
4) $\Box\Box p \rightarrow \Box p$
5) $p \rightarrow \Diamond p$
6) $\Box\Box p \leftrightarrow {\sim}\Diamond\Diamond{\sim}p$
7) $\Box{\sim}\Diamond p \leftrightarrow {\sim}\Diamond\Diamond p$
8) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$
9) $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow p)$
10) $\Diamond{\sim}p \vee \Diamond{\sim}q \vee \Diamond(p \vee q)$

III-2 Los sistemas S4 (DNS4) y S5 (DNS5)

III-2.1 Reducción de modalidades

En nuestro sistema es fácil probar los siguientes teoremas: $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$, $\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$, $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$ y $\Box\Box p \rightarrow \Box p$, pues si se los examina bien, se nota que son casos particulares de $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ y de $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$. Una pregunta natural frente al primero de ellos es: ¿Vale el recíproco ($\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$)? Y lo mismo con cada uno de los otros. Esto equivale a preguntar si son válidos los bicondicionales que engendrarían. Lo anterior se resume en el siguiente cuadro:

		Valen en T	No valen en T
1.	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\varphi$	$\Box\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	A) $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
2.	$\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\Box\varphi$	$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$	B) $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$
3.	$\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\Diamond\varphi$	$\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Diamond\varphi$	C) $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
4.	$\Box\varphi \leftrightarrow \Box\Box\varphi$	$\Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$	D) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

Se puede probar que $C \approx D$ y que $A \approx B$ fácilmente. Luego, si suponemos A válido obtendríamos también las reglas de inferencia:

RA $\Diamond\varphi \vdash \Box\Diamond\varphi$ y RB $\Diamond\Box\varphi \vdash \Box\varphi$,

y los teoremas:

Eq.A: $\vdash \Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\varphi$ y Eq.B: $\vdash \Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\Box\varphi$.

como reglas y teoremas adicionales en DNT. Con esos supuestos se puede probar que $A \rightarrow D$ o lo que es lo mismo: $(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi)$. La prueba se esquematiza a continuación:

1	$\Diamond(\Box p) \rightarrow \Box\Diamond(\Box p)$	Partimos de A (con $\Box p$ por φ)
2	$\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$	Eq.B
3	$\Box\Box p \leftrightarrow \Box\Diamond\Box p$	2, Regla derivada
4	$\Box\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Box p$	3, E$\Box$.
5	$\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Box p$	1,4, TP.
6	$\Box p \rightarrow \Diamond\Box p$	Teorema modal
7	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	5,6, TP.

También puede mostrarse que B → D.

Pero en el sistema T no valen A, B, C ni D. Y, concedido que DNT es consistente, podemos comprobarlo con los diagramas-T. Por este motivo si queremos que valga alguna de esas fórmulas tenemos que cambiar de sistema.

Ejercicios

1) Pruebe $\varphi \equiv \psi \approx \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$

2) Pruebe A↔B y C↔D.

3) Complete los detalles de la prueba A→D

4) Pruebe B→D.

III-2.2 El sistema de deducción natural S4, DNS4

El sistema S4 se obtiene del sistema T modificando la regla R-T, de modo tal que se obtenga $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ como un teorema.

Reiteración S4 R-S4

```
  | ⋮
i | □φ
  | ⋮
  |  □ | ⋮
j |    | □φ        i, R-S4.
  |    | ⋮
  | ⋮
```

Es decir que la reiteración de una fórmula dentro de una subprueba necesaria se efectúa sin que pierda su operador de necesidad.

Basta esta pequeña modificación para que ahora, sin cambiar las regla I$\Box$, E$\Box$, I$\Diamond$ y E$\Diamond$, nuestro sistema permita deducir las fórmulas válidas de S4. Probaremos:

TeoremaS4 $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

1	| $\Box p$	Hip.
2	| $\Box$ | $\Box p$	1, R-S4.
3	| $\Box\Box p$	2-2, I$\Box$
4	$\Box p \rightarrow \Box\Box p$	1-3, I$\rightarrow$

Como esta modificación de la regla de reiteración en subpruebas necesarias permite todo lo que permitía R-T, el sistema acepta como derivaciones válidas todas las que hacíamos en el sistema DNT, y en éste vale $\Box\Box p \rightarrow \Box p$. Con el teorema anterior tenemos que en DNS4 vale:

$\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ que es el resultado característico de los sistemas S4.

Este resultado también se presenta como $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$, el cual puede demostrarse:

Teorema S4 $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

```
1 |  |◊◊p              Hip.
  |  |----
2 |  |~□□~p            1,Def ◊ + DN.
3 |  |  |□~p           Hip.
  |  |  |----
4 |  |  |□□~p          3,T S4.
5 |  |  |~□□~p         2, reit.
6 |  |~□~p             3,4,5 I~.
7 |  |◊p               6, Def ◊.
8 | ◊◊p→◊p           1-7, I→
```

y como además en DNT vale $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$, se tiene en DNS4 $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$. Otros teoremas que el lector debe probar se proponen en los ejercicios.

Ejercicios

1) Derivar R-T en S4.

2) Probar:
   1) $\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
   2) $\Box p \rightarrow \Box\Diamond\Box p$
   3) $\Box\Diamond\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$
   4) $\Diamond\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$

3) Pruebe que todo teorema DNT es un teorema DNS4.

De los ejercicios de la sección anterior se sigue que si φ es una proposición elemental (i.e. una proposición atómica negada o no), se tiene el siguiente cuadro de modalidades distintas:

$$\begin{tikzcd}
\Box\Diamond\Box\varphi \arrow[d, Rightarrow] & \Box\varphi \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \varphi \arrow[dd, Rightarrow] \\
\Diamond\Box\varphi \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\Diamond\Box\Diamond\varphi & \Box\Diamond\varphi \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \Diamond\varphi
\end{tikzcd}$$

Cuadro en el que las flechas indican implicación.

En DNS4 no hay más modalidades distintas; cualquier proposición elemental afectada por una combinación de modalidades distinta a la anterior equivale a una de ellas (en DNT hay infinitas modalidades).

III-2.3 El sistema de deducción natural S5, DNS5

El sistema DNS5, considerado por muchos el más natural, se obtiene con una ligera modificación del sistema DNS4. Para pasar a DNS4 desde DNT modificamos la regla de reiteración T; ahora una pequeña modificación de la regla R-S4 logrará que se obtenga el sistema DNS5. Esa modificación se realiza de tal forma que las deducciones efectuadas con la regla R-S4 sigan siendo válidas (y por tanto las efectuadas con R-T). De este modo todos los teoremas de DNS4 valen en DNS5. Y como todos los teoremas DNT son teoremas DNS4, nos encontramos con un sistema que incluye a los dos anteriores:

{Teoremas DNT} $\subseteq$ {Teoremas DNS4} $\subseteq$ {Teoremas DNS5}

En R-S4 se permitió la reiteración de expresiones de la forma $\Box\varphi$, pero no se permitió la reiteración de proposiciones de la forma $\Diamond\varphi$; ahora en DNS5 permitiremos también esta última.

Reiteración S5 R-S5

```
  │ ⋮
i │ *φ
  │ ⋮
  │ □│ ⋮
j │  │*φ     i, R-S5.     (Donde * es un operador modal)
  │  │ ⋮
  │ ⋮
```

El resultado característico de S5 es $\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$ que pasamos a probar.

Teorema $\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$

En realidad solo falta probar $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$, pues $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ es un teorema DNT.

1	$\Diamond p$	Hip.
2	$\Box \mid \Diamond p$	R-S5
3	$\Box\Diamond p$	2-2, I□.
4	$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	1-3, I→.

Este teorema implica de inmediato $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$. Con lo que en DNS5 valen:

$$\Diamond\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$$

$$\Box\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$$

$$\Diamond\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$$

$$\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$$

Y, a partir de ellos, puede probarse, por inducción matemática sobre el número de operadores, que en DNS5, si $*$ es cualquier operador modal (□ o ◊), vale:

$$***\ldots*\Box\varphi \leftrightarrow \Box\varphi \qquad \text{y} \qquad ***\ldots*\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$$

Es decir, que en DNS5 las únicas modalidades auténticas (salvo negaciones) son lo necesario y lo posible. Decíamos que DNS5 era considerado por muchos filósofos más natural que los otros sistemas modales,[34] punto de vista que se debe a que, gracias al resultado anterior, en DNS5 se puede hablar de solo dos modalidades, como intuitivamente lo hacíamos al empezar. Si α es una proposición elemental, las

---

[34] Por ejemplo, Plantinga en [89].

modalidades (considerando correctamente la ausencia de operador modal una modalidad) en S5 son:

$$\begin{array}{c} \Box\alpha \\ \Downarrow \\ \alpha \\ \Downarrow \\ \Diamond\alpha \end{array}$$

Ejercicios

1) Modifique E◊ para adecuarla a DNS5.

2) Probar las que son teoremas de DNS5:

   a) $(p \vee \Box q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
   b) $(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$
   c) $(p \vee q) \rightarrow \Box(\Box p \vee \Diamond q)$
   d) $(p \wedge \Box q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$
   e) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee \Box q)$
   f) $(p \wedge \Box q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Box q)$
   g) $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge \Diamond q)$
   h) $(p \wedge \Box q) \rightarrow \Diamond(p \wedge \Box q)$
   i) $(p \vee \Diamond q) \rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$
   j) $(\Box p \vee \Diamond q) \rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$

3) Pruebe que todo teorema DNS4 es teorema de DNS5.

Capítulo IV

Lógica cuantificacional modal

IV-1 Lenguaje cuantificacional modal. L_{CM}

El lenguaje cuantificacional (L_C) de la lógica de primer orden se puede ampliar hasta convertirse en el lenguaje cuantificacional modal (L_{CM}). Para eso basta añadir a L_C las reglas que regulen el empleo del nuevo operador $\Box$ y, vía definición, los operadores $\Diamond$, $\rightarrow$ y $\equiv$. En lo que sigue:

φ y ψ, con o sin subíndices, designan FBFs (fórmulas bien formadas) cualesquiera;

Π y Ω, con o sin subíndices, letras de predicados cualesquiera;

α, con o sin subíndices, términos cualesquiera;

β, con o sin subíndices, variables cualesquiera;

γ, con o sin subíndices, constantes individuales cualesquiera.

A) Símbolos primitivos

Constantes individuales: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (normalmente a, b, c, ...)

Variables: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (normalmente x, y, z)

Las constantes individuales y las variables se llaman «términos».

Predicados: F^r_1, F^s_2,..., F^t_n (donde los superíndices indican cuántas variables deben seguirlos, i.e. la llamada ariedad del predicado. Normalmente usaremos F, G, H, sin superíndices).

Operadores o conectores: $\sim$, $\wedge$, $\Box$

Cuantificador: $(\forall\beta)$

Símbolos auxiliares: ( ), [ ], { }

B) Reglas de formación

1) Sea Π un predicado de ariedad r y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ r términos (no necesariamente distintos), entonces: $\Pi\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ es una FBF. Estas fórmulas se llaman fórmulas atómicas.
2) Si φ y ψ son FBFs entonces $\sim\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$ y $\Box\varphi$ son FBFs.
3) Si φ es una FBF y β una variable entonces $(\forall\beta)\varphi$ es una FBF (y se dice que todas las ocurrencias de β en φ caen bajo el alcance del cuantificador).

C) Símbolos definidos

1) $\varphi\vee\psi =_{def} \sim(\sim\varphi\wedge\sim\psi)$
2) $\varphi\rightarrow\psi =_{def} \sim(\varphi \wedge \sim\psi)$
3) $\varphi\leftrightarrow\psi =_{def} (\varphi\rightarrow\psi) \wedge (\psi\rightarrow\varphi)$
4) $(\exists\beta)\varphi =_{def} \sim(\forall\beta)\sim\varphi$
5) $\Diamond\varphi =_{def} \sim\Box\sim\varphi$.

6) $\varphi \Rightarrow \psi =_{def} \Box(\varphi \rightarrow \psi)$

7) $\varphi \equiv \psi =_{def} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

D) Convenciones y definiciones

Seguiremos las convenciones usuales sobre el uso de paréntesis y simplificación de escritura. Así, son FBFs:

$\Box Fx$,	$\Diamond[\Box Fx \rightarrow (\exists y)\Diamond(\forall z)Gzyz]$,
$Gaxa$,	$\Box(\forall x)[Fx \rightarrow (\exists y)Gyx]$,
$(\forall x)Gaxa$,	$(\exists x)(\forall y)(\Diamond Fxx \Rightarrow \Box Gxy)$, etc.

En los casos en que en una fórmula o subfórmula cerrada no interese mostrar su estructura la reemplazaremos con alguna de nuestras antiguas letras proposicionales: p, q, r etc.

Por ejemplo, si en $(\exists x)[(\forall y)Fy \wedge Gba \rightarrow Hxx]$ no nos interesa mostrar la estructura de la subfórmula cerrada: $(\forall y)Fy \wedge Gba$, podemos reemplazar la subfórmula con p obteniendo $(\exists x)[p \rightarrow Hxx]$.

Recordemos las habituales definiciones de variable libre, variable ligada, fórmula abierta, fórmula cerrada y sustitución propia de variables.

Def. ocurrencia ligada de una variable

Una ocurrencia de una variable β en una FBF ψ se dice que está ligada si cae bajo el alcance de algún cuantificador en esa variable.

Nótese que en $(\forall x)(Fxy \rightarrow Hx)$ la variable x está ligada en los tres lugares en que aparece y que la variable *y* no lo está.

Def. variable ligada

Si todas las ocurrencias de una variable en una fórmula están ligadas se dice que la variable está ligada (en esa fórmula).

Def. ocurrencia libre de una variable

Una ocurrencia de una variable β en una fórmula φ se dice que está libre si no está ligada.

Def. variable libre

Una variable que no está ligada en una fórmula se llama libre (en esa fórmula). Es decir, tiene por lo menos una ocurrencia libre en la fórmula.

Def. fórmula cerrada

Una fórmula que no tiene variables libres se denomina cerrada.

Def. fórmula abierta

Una fórmula que tiene alguna variable (con alguna ocurrencia) libre se llama fórmula abierta.

Def. sustitución propia de variables

Una fórmula φ se obtiene de una fórmula ψ por la sustitución propia de la variable β_1 con la variable β_2, **ssi** φ es como ψ, salvo que tiene β_2 **libre** en todos los lugares en que ψ tenía a β_1 **libre**.

Se acostumbra escribir $\varphi[\beta_1]$ o $\varphi[\beta_2]$. Así, diremos que $\varphi[\beta_2]$ se obtiene de $\varphi[\beta_1]$ por la sustitución propia de β_1 con β_2.

IV-2 La fórmula Barcan FB $(\forall\beta)\Box\varphi \rightarrow \Box(\forall\beta)\varphi$

La lógica cuantificacional modal (LCM) tiene especial importancia filosófica y ha estado en el centro de debates en los que han participado Quine, Barcan, Plantinga, entre otros muchos,[35] y en los que de una forma u otra se han tocado temas clásicos de ontología y metafísica, en particular se ha revivido un debate acerca de lo que hay y sobre las esencias. Buscamos presentar la relevancia que tiene la LCM en la discusión ontológica. Para lograrlo, presentaremos el tema informalmente haciendo hincapié en los supuestos semánticos que acompañan a las leyes en este campo. Una fórmula que se presta especialmente bien para esto es la llamada fórmula Barcan (en honor a Ruth Barcan Marcus). Y directamente vinculado a su análisis aparece el tema clásico de la lógica medieval de las modalidades *de re* y *de dic-*

---

[35] A modo de ejemplo, citemos Quine [92] y [93], Barcan [10], Plantinga [89]. Véase las antologías [86], [81], [101] y [109].

to. Estos temas los presentaremos partiendo de tres aproximaciones: histórica (aprovechando algunos pasajes clásicos), semántica (con una aproximación informal de mundos posibles) y una sintáctica. Empecemos con la aproximación histórica.

IV-2.1 Consideraciones históricas sobre modalidades

A) La distinción de re / de dicto

Considérense las siguientes cinco proposiciones:

1. Todas las mujeres son necesariamente racionales.
2. Cleopatra es mujer.
3. Cleopatra es necesariamente racional.
4. Cleopatra es (actualmente) racional.
5. Cleopatra es posiblemente racional.

Si bien no se requiere de un concepto especial de necesidad para justificar que de 1 y 2 se sigue 3 ($1,2 \models 3$), pues basta definir: «interesante» como «necesariamente racional» y reemplazar en 1, 2 y 3 para darse cuenta de que «necesariamente» puede obviarse en la inferencia. En cambio, para justificar que $1,2 \models 4$ o que $3 \models 5$ (entre otras inferencias posibles) es imprescindible justificarlas a partir del rol que juega «necesariamente» como elemento separado.

En la lógica modal proposicional «necesario» o «necesariamente» ($\Box$) podía entenderse como una necesidad lógica en el sentido de lo que es válido lógicamente. Pero en los ejemplos anteriores, 3 es una oración contingente (pues Cleopatra podría no haber existido) y sin embargo sigue lógicamente de 1 y 2 que «Cleopatra es necesariamente racional», y por tanto se sigue con necesidad lógica de 1 y 2, sin por eso dejar de ser contingente. Esta aparente contradicción nos obliga a replantear nuestro análisis de la necesidad. El término «necesariamente» que figura en 3 no puede entenderse o reducirse a la necesidad lógica.

En el Capítulo 1 apuntamos que se podía distinguir entre una necesidad amplia, una necesidad física, una histórica, una lógica o matemática. Construimos en los capítulos 2 y 3 tres sistemas que interpretaban la idea de necesidad de diferentes maneras. Encontramos que, por lo menos, podíamos hablar de una necesidad T, una S4 y una S5. Ahora, además de todas estas distinciones, también debemos distinguir dos formas de presentar la modalidad, formas que solo pueden apreciarse al entrar a analizar la estructura de las proposiciones y que tienen especial relevancia en la discusión filosófica acerca de la lógica modal. Veamos un ejemplo de una de estas formas, la necesidad *de dicto*:

(6) Necesariamente el número nueve es compuesto.

En (6) se predica la verdad necesaria de otro *dictum* o proposición, que es:

(7) El número nueve es compuesto.

Y esta era la única forma de aparecer de la modalidad que se apreciaba en la lógica modal proposicional. Otra noción de necesidad es la que atribuye verdad necesaria no a una proposición, sino (en algún sentido) a un individuo o al modo como un individuo posee una propiedad.

(8) El número nueve necesariamente es compuesto.

Nueve tiene la propiedad de ser compuesto y esa propiedad la posee con necesidad. Se trata de la llamada modalidad *de re*, (como la racionalidad de Cleopatra). Esta distinción ya se encuentra, por lo menos esbozada, en Aristóteles. La modalidad *de re* se vincula con el poseer una cosa (*res*) una propiedad esencialmente. Resumiendo:

La modalidad *de re*: es la modalidad relativa a la cosa (*res*)

y

La modalidad *de dicto*: es la modalidad relativa al enunciado (*dictum*).

De re

$$\text{algo posee} \left\{ \begin{array}{l} \text{necesariamente} \\ \\ \text{posiblemente} \end{array} \right\} \text{una propiedad}$$

De dicto

un enunciado es verdadero o falso { necesariamente / posiblemente

Así, la primera se refiere a la manera en que una cosa (un ente) posee una propiedad, mientras que la segunda se refiere a la manera de ser verdad del enunciado. Por ejemplo, es necesariamente verdadero que todo soltero no sea casado (*de dicto*), mientras que el casado necesariamente es monógamo (*de re*).

En todo caso, las dos modalidades no deben confundirse, pues tenemos ejemplos de proposiciones que tienen distinto valor de verdad en una y otra modalidad. Un ejemplo de esto ocurre si estoy pensando en el número 17, entonces:

Aquello en lo que estoy pensando es necesariamente primo.

es una verdad *de re*,

Necesariamente lo que pienso es primo.

es una falsedad *de dicto*.

Un problema adicional que complica la situación es que en general 3: «Cleopatra es necesariamente racional» puede entenderse tanto como:

a) Cleopatra es necesariamente racional: modalidad *de re.* [La relación entre Cleopatra y la racionalidad es necesaria],

como

b) El ser Cleopatra racional es verdadero necesariamente: modalidad *de dicto*. [El enunciado que afirma la racionalidad de Cleopatra es necesario]

Como a) es verdadero, (asumiendo, probablemente en contra de Octavio, que Cleopatra era humana) y, en cambio, b) es falso (pues Cleopatra pudo no haber existido); la ambigüedad con que normalmente se los emplea puede conducir a confusión.

El tema de la lógica modal cuantificacional nace con la lógica misma. Aristóteles en los *Analíticos primeros*, capítulo 9[36] afirma que: «el silogismo A pertenece necesariamente a B y B pertenece a C entonces A pertenece necesariamente a C» es válido, pero no lo es el silogismo «A pertenece a B y B pertenece necesariamente a C entonces A pertenece necesariamente a C». El primero vale porque C es uno de los B que posee A con necesidad. El segundo no vale, porque si se siguiese que A pertenece necesariamente a C, ocurriría que A pertenecería necesariamente a algún B, pero esto último no se sigue de las premisas, pues podría ser que A no convenga necesariamente a ningún B. Sin

---

[36] Cito traduciendo del francés de la edición Tricot. [4].

perdernos en la silogística de Aristóteles vemos que en el tema de la pertenencia necesaria nuestra modalidad *de re* ya estaba presente.

El significado de las fórmulas modales no es un tema que pueda dejarse de lado y se discute mucho sus implicaciones filosóficas, así como prácticas. En la actualidad aparece mucho en temas que están a caballo entre la filosofía del lenguaje y la lógica. Más adelante mencionaremos uno de ellos: los contextos opacos.

En relación con la distinción *de re/de dicto*, también cabe mencionar otras venerables distinciones entre distintos tipos de afirmaciones modales que no han sobrevivido en nuestros tiempos. O, dicho con más propiedad, cuya importancia ha disminuido a causa de que el uso de un simbolismo adecuado evita algunas confusiones propias a los lenguajes naturales. Mencionaremos las siguientes:

B) Sentido compuesto / Sentido dividido

La distinción viene de Aristóteles *Refutaciones sofísticas* 166 a 23. La cita que sigue está tomada de Bochenski 11.19[37] «En la composición se apoyan (sofismas):tales como p. e., "Es posible que el que está sentado camine y el que no está escribiendo escriba". Pues no significa lo mismo cuando se dice en composición, el que está sentado anda que cuando

---

[37] En [15].

se dice en división...; y lo mismo pasa cuando se dice, en composición que el que no escribe escribe. Pues (en división)[38] significa que el que no escribe tiene potencia de escribir. Y si se dice en composición, que tiene potencia, cuando no escribe, de escribir».

En símbolos:

$\Diamond(\exists x)(x \text{ es hombre} \wedge x \text{ no escribe} \wedge x \text{ escribe})$ Sentido compuesto.

$(\exists x)[x \text{ es hombre} \wedge x \text{ no escribe} \wedge \Diamond(x \text{ escribe})]$ Sentido dividido

Casi lo mismo se encuentra en un texto de Pedro Hispano [Bochenski 29.06]

«Hay dos especies de composición (compositio). La primera resulta de que un *dictum* puede suponer por sí mismo (en cuanto totalidad) o por una parte de sí, p.e., "es posible que el que está sentado ande". En efecto, si el *dictum* "que el que está sentado ande" se hace en cuanto tal (en cuanto totalidad) sujeto del predicado "posible", entonces (la sentencia) es falsa y compuesta, porque en tal caso incluyen en el sujeto actos opuestos, a saber, estar sentado y andar, y el sentido es: "El que está sentado está andando". Mas, si este *dictum* supone por una parte del *dictum*, entonces (la sentencia) es verdadera y dividida, y su sentido es: "El que está sentado tiene capacidad de andar". De igual manera hay que distinguir en esta (sentencia): "Es imposible que quien no está es-

---

[38] Corregimos a la edición de Bochenski.

cribiendo esté escribiendo". El *dictum* "que quien no está escribiendo esté escribiendo" hace, en efecto, de sujeto del predicado "imposible",[39] mas unas veces (suponiendo) por sí (en cuanto totalidad), otras por una parte de sí. E igualmente esta (sentencia): "Que una cosa blanca sea negra, es posible". Y se ha de saber que tales oraciones se denominan habitualmente *de re* o *de dicto*».

E inmediatamente añade Bochenski:

«Como se ve, aparece aquí una doble terminología, al par *de dicto-de re* corresponde un segundo: *composita - divisa.* A parte de esto, Pedro Hispano introduce el concepto de suposición, mientras Tomás de Aquino, en el texto citado (29.05), procede solo sintácticamente. Sin embargo, Santo Tomás tiene otras expresiones más para el mismo concepto».

En el texto de Pedro Hispano, al final parece asimilarse el par *de dicto/de re* con el par dividido/compuesto, pero eso es un error, pues es fácil encontrar ejemplos que muestran que se trata de conceptos independientes.

Dos proposiciones *de re* son: La primera de sentido compuesto y falsa,

$$(\exists x)\ [x \text{ es hombre} \wedge \Diamond\ (x \text{ no escribe} \wedge x \text{ escribe})]$$

La segunda de sentido dividido y verdadera,

$$(\exists x)\ [x \text{ es hombre} \wedge x \text{ no escribe} \wedge \Diamond\ (x \text{ escribe})].$$

O por ejemplo, dos enunciados con necesidad *de dicto*: uno compuesto,

---

[39] Adopto la lectura «impossibile» en lugar de «possibile».

Es posible que escriba y no escriba . $\Diamond(p\wedge \sim p)$

El otro dividido,

Es posible que escriba mientras no esté escribiendo $\Diamond p\wedge\sim p$ lo que muestra claramente que se trata de distinciones basadas en propiedades diferentes. En nuestros tiempos el par dividido/compuesto ha perdido vigencia, debido a que el empleo de lenguajes simbólicos evita que se confundan las jerarquías.

C) Necesidad de la consecuencia / necesidad del consecuente

Otra distinción interesante y que se debe tomar en cuenta al simbolizar es la que aparece en el siguiente texto de Santo Tomás [Bochenski 29.07]:

«(Se objeta además: si todo es conocido por Dios como presente a sus ojos (*praesentialiter visum*), entonces lo que Dios ve, necesariamente ha de ser, como p. e., es necesario que Sócrates esté sentado porque es visto sentado. Más esto no es necesario absolutamente, (o), como algunos dicen, con necesidad del consecuente (*necessitate consequentis*), sino solo condicionalmente (*sub conditione*) o con necesidad de la consecuencia (*necessitate consequentiae).* Pues la siguiente (*haec*) (sentencia) condicional es, en efecto, necesaria "Si se ve a alguien estar sentado, está sentado". Por tanto, aún cuando (esta) condicional se transforme (*transferatur*) es una categórica, como si se dijera: "Lo que se ve estar sentado, necesariamente está sentado", es evidente que es verdadera entendida (como sentencia modal) *de dicto* y en cuanto compuesta, pero es falsa entendida (como sentencia modal) de re y en cuanto dividida. Y así se yerra en este y en otros (casos) semejantes... en cuanto a la composición y la división».

En realidad hay tres distinciones y no siempre coinciden como parece sugerirlo Santo Tomás, aunque en este caso sí. La diferencia entre:

$$\Box(p \rightarrow q) \quad y \quad p \rightarrow \Box q$$

(necesidad de la consecuencia vs. necesidad del consecuente)[40] parece ser una de alcance, y lo mismo podemos decir de la necesidad compuesta vs. la dividida. Pero en el caso *de dicto/de re* esto no es tan claro.

Muchas veces en la modalidad *de re*, para evitar confusiones, el término necesariamente se reemplaza por el de 'esencialmente' así:

De re: Cleopatra es esencialmente racional.

De dicto: Cleopatra es necesariamente racional.

Para algunos filósofos contemporáneos, este recurso a la esencia genera desconfianza y preferirían solo aceptar una modalidad *de re* si se pudiese reducir a la *de dicto*. En cambio en la Edad Media para lógicos como Abelardo, la *de re*

---

[40] A pesar de tratarse de una confusión que puede parecernos inactual, recientemente J. Etchemendy ha acusado a Tarski de haberla cometido. Véase [102].

era la fundamental, y se explicaba la *de dicto* como una verdad esencialmente poseída por el enunciado.

Para nosotros ambos se presentan y diremos que '$\Box$' en '$\Box\varphi$' es:

de re: si φ tiene una variable libre

de dicto: si φ tiene todas sus variables ligadas.

Esta demarcación es definitiva en un lenguaje cuantificacional modal sin constantes, pero no lo es cuando se presentan constantes. Pues, ¿qué pasa con: $\Box Fa$? a pesar de no tener variable libre $\Box$ puede ser *de re*. En estos casos preferible sería utilizar la eliminación de variables de Quine. Habitualmente para simbolizar 'Cleopatra es racional' tomamos

$$\left.\begin{array}{l} \text{a: Cleopatra} \\ \\ \text{Fx: x es racional} \end{array}\right\} \text{ lo que da: Fa,}$$

pero si seguimos la sugerencia quineana de eliminar constantes debemos adoptar además:

Hx: x es Cleopatra,

lo que transforma 'Cleopatra es racional' en: hay un x tal que x es Cleopatra y x es racional, Es decir: $(\exists x)\ (Cx \wedge Fx)$.

Así, distinguiríamos: $\Box(\exists x)(Cx \wedge Fx)$ que es *de dicto* de $(\exists x)(Cx \wedge \Box Fx)$ que es *de re*. Podemos lograr, con este recurso, desaparecer la ambigüedad al escribir fórmulas de modo que toda fórmula con una variable libre dentro del alcance de un operador modal exprese una modalidad *de re*. Así, la oración «Cleopatra es necesariamente racional», si es *de dicto* se simbolizaría como $\Box(\exists x)(Cx \wedge Fx)$; en cambio, si fuese *de re* sería $(\exists x)\ (Cx \wedge \Box Fx)$. En síntesis, por desgracia, nuestro simbolismo usual, con constantes, mantiene en algunos casos la ambigüedad *de dicto/de re*.

La modalidad *de re* es especialmente interesante cuando se asocia con un cuantificador. Por ejemplo, en $(\exists x)\Box(Cx \wedge Fx)$ el cuantificador $\exists x$ actúa sobre la variable x de Cx y de Fx que están dentro de lo que se llama un contexto modal, como $\Box(Cx \wedge Fx)$. El interés reside en el hecho de que, como mostrara Quine, lo que un lenguaje formalizado dice que hay es expresado por el cuantificador existencial, de allí su famosa frase: «Ser es ser el valor de una variable», que aplicada a este caso afirma la existencia de esencias. Vemos que muchos interesantes problemas clásicos de filosofía reaparecen bajo el ropaje de la modalidad *de re*. No los trataremos.[41] Discutiremos más bien algunas fórmulas lógicas que condensan, desde un punto de vista formal, estos problemas.

D) Problemas de simbolización

Simbolizar una oración teniendo en cuenta todas estas distinciones, muestra de manera clara que toda simbolización

---

[41] Véase, entre muchas otras, la selección de artículos [81].

es una interpretación, por ejemplo «los cuerpos son necesariamente divisibles» puede entenderse de las siguientes maneras:

1. $\Box(\forall x)[Cx \rightarrow Dx]$ *de dicto.*
2. $(\forall x)[Cx \rightarrow \Box Dx]$ *de re*, sentido dividido, necesidad del consecuente.
3. $\Box(\forall x)[Cx \rightarrow \Box Dx]$ *de dicto* y *de re*, sentido dividido, necesidad del consecuente.
4. $(\forall x)\Box[Cx \rightarrow Dx]$ *de re*, sentido compuesto, necesidad de la consecuencia.
5. $(\forall x)\Box[Cx \rightarrow \Box Dx]$ *de re*, sentido compuesto y dividido, necesidad del consecuente y de la consecuencia.

1) Es *de dicto*, se la entiende como que todo cuerpo es divisible es una verdad necesaria.

2) Es *de re*, en aquellos casos en que es verdadera y de haber cuerpos, estos entes, los cuerpos, poseen esencialmente la divisibilidad

3) 1+2

4) *De re.* En esta lectura lo esencial es la conexión que establece el condicional entre el ser cuerpo y el ser divisible. A todo lo que hay le es esencial el que si es cuerpo, es divisible.

5) *De re*. A todo lo que hay le es esencial que si es cuerpo tiene la divisibilidad esencialmente.

Cabe observar que:

3 implica a los otros cuatro.

5 implica a 4

Ejercicios

1) Construya modelos en los que, respecto de las fórmulas 1 a 5 últimas, ocurra:

a) 1 sea válido y no 2
b) 1 sea verdadero y no 4
c) 4 sea verdadero y no 5
d) 3 sea verdadero en todos los mundos.

E) Extensión vs. intensión

Un problema asociado a la aparición de la modalidad *de re* es el de los llamados contextos opacos. En la lógica de primer orden, tanto proposicional como cuantificacional, valían la sustitución de equivalentes y de iguales; es decir:

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \models \psi \approx [\varphi_1/\varphi_2]\psi$$
$$t_1 = t_2 \models \psi \approx [t_1/t_2]\psi.$$

Se trata de lógicas extensionales. En ellas solo interesan los valores de verdad o los elementos del dominio (universo del discurso). En palabras, diríamos que si Francisco Pizarro es el Marqués Gobernador entonces da lo mismo decir 'el Marqués Gobernador fundó Lima', que decir 'Francisco

Pizarro fundó Lima'. Un término igual puede sustituir al otro sin problema (Leibniz diría *salva veritate*). Quine[42] llama a estos contextos en que la sustitución procede contextos «puramente referenciales».

Distintos son los contextos opacos donde la sustitución no procede. Veamos algunos:

Citas (entrecomillados):

(1) El profesor dijo: «Francisco Pizarro recibió el título de Marqués Gobernador».
(2) Francisco Pizarro = Marqués Gobernador
(3) El profesor dijo: «el Marqués Gobernador recibió el título de Marqués Gobernador».

De la verdad de (1) y (2) no se sigue la de (3).

Verbos de actitud proposicional como saber, creer, descubrir, dudar, sospechar y otros presentan dificultades similares.

(4) El investigador descubrió que Francisco Pizarro recibió el título de Marqués Gobernador.
(5) Francisco Pizarro = Marqués Gobernador
(6) El investigador descubrió que el Marqués Gobernador recibió el título de Marqués Gobernador.

Y nuevamente (6) no se sigue de (4) y (5). Hay muchos

---

[42] Véase Quine [92].

contextos opacos que en el tratamiento del lenguaje remiten a la interesantísima pregunta de la filosofía del lenguaje: ¿cómo operan los nombres propios y las descripciones definidas?[43] Pero nosotros estamos en el tema de la modalidad, por lo que nos interesa en particular el siguiente contexto opaco:

contextos modales

(7) Necesariamente nueve es mayor que siete.

(8) Nueve = número de los planetas.

(9) Necesariamente el número de los planetas es mayor que siete.

Pero, claro, (9) no es una proposición necesaria, el que el número de los planetas sea mayor que siete es un hecho contingente.

La salida de este problema con, por ejemplo, una semántica de mundos posibles (lógica intensional) es factible como veremos, pero presenta dificultades filosóficas.[44]

Una salida para (9) es sostener que es ambigua por tener dos lecturas:

(10) $\Box (\exists x)($ x es el número de planetas $\wedge x>7)$

(11) $(\exists x)[$ x es el número de planetas $\wedge \Box(x>7)]$

(11) salva el problema pero presenta una modalidad de re y

---

[43] Puede consultarse Engel [27].

[44] Puede consultarse además de Engel a Kaplan [67].

una cuantificación dentro de un contexto modal. Aclarar qué significa $(\exists x)\Box Fx$ no es fácil. Las lógicas, como las modales; en que intervienen otras entidades además de los valores de verdad y de los elementos del dominio, son ejemplos de lógicas intensionales.

IV-2.2 Aproximación semántica formal a la FB

Discutiremos aquí los supuestos formales de la fórmula Barcan (FB) que aclaran el contenido semántico de la cuantificación dentro de contextos modales. Las dos formas de la FB:

a) $(\forall x)\Box Fx \rightarrow \Box(\forall x)Fx$ o equivalentemente

b) $\Diamond(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)\Diamond Fx$.[45]

son muy discutidas, pues pueden validar inferencias bizarras como son:

a) Toda cosa existe necesariamente.
Por tanto necesariamente todo existe.

b) Es posible que alguien quiera regalarme un millón de soles.
Por tanto hay alguien que posiblemente quiere regalarme un millón de soles.

Que parecen inválidas. Si fuesen válidas se seguiría de a)

---

[45] Preferimos Fx a j por razones exclusivamente didácticas.

que la existencia del mundo es necesaria, y de b) que en vez de seguir escribiendo este texto yo haría bien en buscar a ese hombre generoso. Viendo los modelos que aceptan a FB o la invalidan trataremos de resolver este rompecabezas. O, más que resolverlo, mostrar sus aristas.

Orden de las modalidades

En general en los sistemas que consideraremos, derivados de alguna forma de T, S4 y S5, valen las implicaciones que generan los operadores cuando siguen cierto orden. Este orden lo muestra el siguiente cuadro donde las flechas indican implicaciones válidas en los tres sistemas considerados.

$$\begin{tikzcd}
\Box(\forall \beta)\ \varphi \arrow[d] & (\exists\beta)\ \Diamond\varphi \arrow[d] \\
(\forall \beta)\Box\varphi \arrow[ur] & \Diamond\ (\exists\beta)\varphi
\end{tikzcd}$$

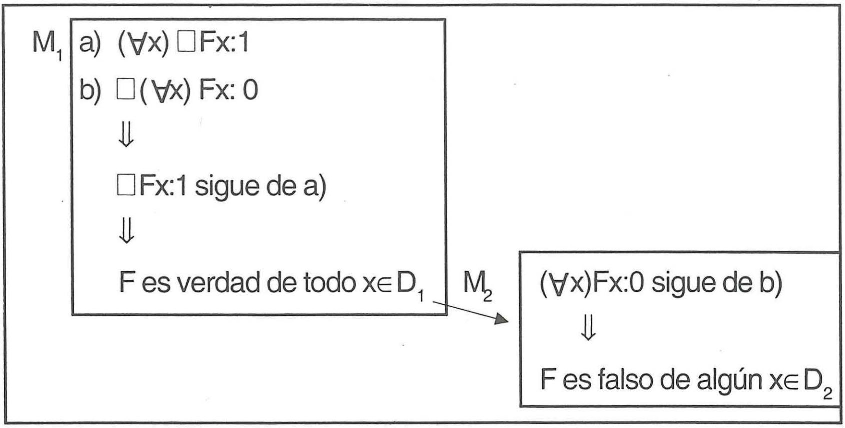
Podemos justificar rápidamente la primera implicación. De $\Box(\forall\beta)\varphi$ en un mundo se sigue que en todo mundo accesible del modelo que se esté considerando vale $(\forall\beta)\varphi$, por lo que φ es verdadera de cualquier α en todo mundo y, por tanto, $\Box\varphi$ es verdadera en el mundo de origen de todo α; por lo que $(\forall\beta)\Box\varphi$ vale en él. Pero la fórmula interesante no es esta, que es la conversa de la fórmula Barcan, sino la propia FB: $(\forall\beta)\Box\varphi\rightarrow\Box(\forall\beta)\varphi$. En la FB un necesario dentro de un contexto cuantificacional sale de él.

¿Cuándo es falsa FB?

La pregunta que nos va a ayudar a entender lo que dice FB es: ¿qué ocurre en un mundo posible en el que FB sea falsa? Para responder consideremos la falsedad de la fórmula $[(\forall x)\Box Fx\rightarrow\Box(\forall x)Fx]$ en un mundo M_1, lo que equivale a afirmar la verdad del antecedente y la falsedad del consecuente en ese mundo M_1:

$(\forall x)\Box Fx$	verdadero (vale 1) y
$\Box(\forall x)Fx$	falso (vale 0).

De lo primero se sigue que $\Box Fx$ es verdadero para cualquier x del dominio D_1 del mundo M_1; mientras que de la falsedad del consecuente se sigue que existe un mundo accesible, por lo menos, en el que $(\forall x)Fx$ es falso, llamémoslo M_2. Como en M_2 $(\forall x)Fx$ es falso, Fx debe ser falso de algún x del dominio D_2 de este mundo. Pero teníamos que en M_1 la fórmula $\Box Fx$ es verdadera para todo x en D_1, por lo que Fx debe serlo en todo mundo accesible, en particular M_2. Para que las dos afirmaciones sean compatibles, se requiere que Fx sea verdadera de elementos distintos de aquellos para los que es falsa. Esto se logra haciendo $D_2\not\subset D_1$ (lo que implica $D_1\neq D_2$). Todo lo anterior puede resumirse en el siguiente cuadro:



El análisis de la FB en su forma $\Diamond(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)\Diamond Fx$ lleva a conclusiones idénticas, como era de esperarse. Si la suponemos falsa en el mundo M_1, tenemos que su antecedente es verdadero y su consecuente falso en él. Al ser el antecedente una proposición de posibilidad debemos suponer por lo menos un mundo posible, asequible por la relación de accesibilidad R, (llamémosle M_2) en el que $(\exists x)Fx$ es verdadero. El consecuente es falso en M_1, por lo que para todo x del dominio de objetos de ese mundo (llamémosle D_1) es falso $\Diamond Fx$. Por lo que predicar F es falso de esos x en todo mundo accesible, en particular M_2.

Así, si dos mundos, uno asequible al otro por R, pueden tener dominios diferentes y el asequible individuos que no están en el que lo accesa, la fórmula Barcan no es válida. En cambio, si los mundos que R vincula obligatoriamente tienen los mismos individuos o sus dominios son crecientes ($D_1 \subseteq D_2$), entonces la FB es válida. El lector debe realizar un cuadro resumen de esta situación.

El lector debe, además, analizar la validez de $\Box(\forall x)Fx \rightarrow (\forall x)\Box Fx$ y de $(\exists x)\Diamond Fx \rightarrow \Diamond(\exists x)Fx$ para comprobar que esta no reside en la igualdad o diferencia de los elementos de los mundos accesibles.

Semántica modal e individuos

Dado un modelo de mundos posibles, si deseamos aplicarlo a un lenguaje modal cuantificacional, necesariamente tenemos que considerar individuos que constituyan el dominio de las variables y los correlatos de las constantes y otros términos que puedan aparecer en el lenguaje. Como consecuencia, se plantea la pregunta de si esos dominios deben ser el mismo en todos los mundos o si cada mundo debe tener su propio dominio. Y si cada mundo puede tener su propio dominio ¿la accesibilidad entre mundos debe influir en los distintos dominios o no? Hay tantas respuestas como se quiera. Para un lingüista tal vez todas sirvan, pues podría ser que en diversas circunstancias unas expliquen mejor que otras fenómenos lingüísticos. Para el filósofo interesará buscar la o las que mejor den cuenta de su ontología o por lo menos habrá que rechazar aquellas que dan pie a ontologías equivocadas. Como lógicos nos interesará buscar cuáles de esas posibilidades terminan en sistemas consistentes, sus consecuencias y requisitos formales, pues esa es la precondición para toda valorización, tanto la del lingüista como la del filósofo.

Si consideramos un dominio común para todo el modelo, entonces es fácil identificar a un individuo en cada mundo. El Vargas Llosa ingeniero de un mundo posible, a pesar de diferir del que conocemos, lo podemos identificar porque es el mismo individuo con otras propiedades. En este caso, claramente un nombre propio, una constante de L_{CM}, siempre designa lo mismo. En el lenguaje de Kripke es un designador rígido.[46] Si escogemos un modelo en el que cada mundo tiene distintos individuos entonces aparece el problema de qué individuo de un mundo corresponde a uno del actual o en general ¿cómo establecer correspondencias entre individuos de mundos distintos?. En el primer modelo surge el problema filosófico de que si un individuo existe en todo mundo, entonces la existencia de los individuos no es contingente.[47]

IV-2.3 Presentación sintáctica de FB

En la lógica cuantificacional no modal vale la siguiente fórmula:

$$(\forall\beta)\ (\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow [(\forall\beta)\ \varphi\rightarrow(\forall\beta)\psi]$$

o en una formulación más simple

$$(\forall x)(Fx\rightarrow Gx)\rightarrow[(\forall x)Fx\rightarrow(\forall x)Gx] \qquad (1)$$

---

[46] Kripke [75] y [76].

[47] Para una presentación clara e introductoria de estos problemas véase [37] T2 cap 3. Una presentación muy completa en Garson [45].

Es decir, el cuantificador universal se distribuye con el condicional. En palabras puede ejemplificarse como: Si todos los alumnos son lógicos, entonces si todos son alumnos, todos son lógicos. La conversa de esta fórmula (Si ,si todos son alumnos entonces todos son lógicos, entonces todos los alumnos son lógicos) no vale.[48] Cabe preguntarse si, por analogía, en alguno de los cálculos cuantificacionales modales vale (es teorema):

$$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \rightarrow [(\forall x)\, Fx \Rightarrow (\forall x)\, Gx]$$

Que se parece a la fórmula cuantificacional. Desarrollando $\Rightarrow$ la fórmula dice lo mismo que:

$$(\forall x)\, \Box(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \Box[(\forall x)\, Fx \rightarrow (\forall x)\, Gx] \qquad (2)$$

que si bien parece ser un caso particular de: $\Box(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box\varphi\rightarrow\Box\psi)$, no lo es por el intercambio en la jerarquía entre $\Box$ y $(\forall x)$ del antecedente al consecuente.

Puede pensarse que podemos obtener la fórmula (2) de (1), utilizando la regla que permite colocar $\Box$ en el antecedente y consecuente de una fórmula condicional válida:

$$\Box(\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \Box[(\forall x)Fx \rightarrow (\forall x)Gx] \qquad \text{de (1)}$$

Pero no es exactamente la fórmula (2) que buscábamos. Lo que realmente necesitamos es $(\forall x)\Box(Fx\rightarrow Gx)\rightarrow\Box(\forall x)(Fx\rightarrow Gx)$. Para poder llegar a esta requeriríamos una ley que autorizara el intercambio del cuantificador $\forall$ con el operador $\Box$, la siguiente fórmula:

---

[48] Para probar la invalidez de la conversa basta con considerar un universo de personas donde alguno no sea alumno y algún alumno no sea lógico, pues en ese caso se tendría:

[Si ($\forall$x) x alumno entonces ($\forall$x) x lógico] entonces todo alumno es lógico
F V F F

$$(\forall x)\Box Fx \rightarrow \Box(\forall x)\,Fx \qquad \text{(FB)}$$

que es la llamada Fórmula Barcan (FB).

Pero el sistema de deducción natural cuantificacional modal-T (DNCM-T) no contiene a FB, ni tampoco el S4 (DNCM-S4).[49]

La fórmula Barcan también puede aparecer bajo la forma equivalente de:

$$\Diamond(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)\Diamond Fx$$

que parece corresponder a:

Es posible que alguien sea espía,
por lo tanto, hay alguien que es un posible espía,

Que, por decir lo menos, parece inválida.

También cabe mencionar que la fórmula Barcan sí es válida en los cálculos derivados de S5 (se tiene $\vdash_{DNCM\text{-}S5}$ FB).

IV-3 Modelos modales cuantificacionales

Esperamos que la discusión anterior permita ver de manera más intuitiva el hecho de que la lógica modal cuantificacional introduce en realidad nuevas nociones de modalidad estrechamente ligadas a la ontología que se asume. Así, se pueden definir varios sistemas de lógica modal cuantificacional distintos; nosotros solo veremos unos pocos, que presentaremos a partir de su semántica.

---

[49] Véase Hughes y Cresswell [63] cap. 10 y 11, así como Konyndyk [71] cap. 4.

IV-3.1 Semántica T+FB: modelo-T+ FB

Para poder definir la noción de validez, introducimos la noción de modelo-T+FB (M_{T+FB}).

Un *modelo-T+FB* para un lenguaje L_{CM} es un cuarteto ordenado: $M_{T+FB} = <M, R, D, i>$ cuyos elementos son:

M: Conjunto de mundos posibles: $\{M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots\} \neq \phi$

R: Relación de accesibilidad entre elementos de M. Es decir, R es un subconjunto de MxM. Esta relación debe ser reflexiva.

D: Dominio de individuos (conjunto cualquiera no vacío). Es el mismo conjunto para todos los mundos de M.

i Función de interpretación que asigna a cada:

- constante γ de L_{CM} un elemento de D (i como función de las constantes hacia D no tiene por que ser inyectiva o sobreyectiva).
- predicado Π^r de L_{CM} una extensión en cada mundo. Así, $i(\Pi^r, M_i) \subseteq D^r x\mathbf{M}$.

Para utilizar el modelo M_{T+FB} en la asignación de valores de verdad a FBFs cualesquiera de L_{CM} necesitamos además considerar funciones g del conjunto de variables de L_{CM} a D llamadas asignaciones. Estas funciones solo afectan el valor de verdad de las fórmulas abiertas, pero son útiles a la hora de definir las valuaciones de fórmulas cuantificadas.

Valuación V_{MT+FBg}

Ahora podemos definir una valuación para un modelo dado y una asignación dada, para todas las fórmulas de L_{CM}. Es decir, una función que va a variar si varía el modelo, la asignación o la fórmula.

V_{MT+FBg} es la función de valuación que asigna un valor de verdad a cada FBF de L_{CM}; en adelante, si no hay lugar a confusión, escribiremos simplemente V_{Mg}. Esta función V_{Mg}, es una función que se define para cada categoría de elementos del lenguaje cuantificacional modal a los que se aplica, como en los modelos cuantificacionales no modales. Debemos recordar que el valor de V_{Mg} depende del modelo y de la asignación con la que se este trabajando. Esto lo recordaremos escribiendo V_{Mg}. La novedad en relación con la lógica cuantificacional no modal reside en que ahora la asignación del valor además puede variar de acuerdo con el mundo en el que se evalúe la expresión. En L_{CM}, como en la lógica cuantificacional no modal, la valuación de fórmulas cerradas no es afectada por **g**. Definiremos la función V_{Mg} por categoría gramatical.

Previamente es conveniente recordar más en detalle las características de la función de interpretación `i`:

A) `i` lleva cada término γ, constante, sobre un individuo, es decir:

$$\mathbf{i(\gamma,M_i)\in D}$$

Cabe resaltar que en este modelo `i`(γ, ...) será un mismo individuo en todos los mundos, es decir:

$\mathtt{i}(\gamma, M_i) = \mathtt{i}(\gamma, M_j) \forall \quad i,,j$. Por lo que bastará indicar $\mathtt{i}(\gamma)$ sin especificar el mundo.

B) $\mathtt{i}$ hará corresponder a cada relator n-ádico (letra de predicado) evaluado en un mundo dado una relación n+1-ádica entre n elementos de D y el mundo. Al incluir el mundo hacemos que esta correspondencia varíe de mundo a mundo. Así, si Π es un relator n-ádico:

$$\mathtt{i}(\Pi,M_i) \subseteq \mathbf{D^n \times M}$$

Con estos elementos, podemos hablar de la **interpretación de un término bajo un modelo dado** M_{T+FB} **y una asignación dada g**, designado con $||\alpha||_{MT+FB}g$ o simplemente $||\alpha||_M g$

$$||\alpha||_M g = \begin{cases} \mathtt{i}(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ es una constante} \\ g(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ es una variable} \end{cases}$$

Ejemplifiquemos con un lenguaje modal cuantificacional L_{CM} reducido, en el que haya tres variables *x, y, z*, dos constantes a y b, y dos predicados uno monádico F y el otro diádico G. Un modelo-T+FB debe indicarnos que ítems del dominio corresponden a las constantes en esa interpretación. Por ejemplo, supongamos que en el modelo se tiene $D=\{d_1, d_2, d_3\}$ una interpretación sería:

$\mathtt{i}(a)=d_1 \quad \mathtt{i}(b)=d_3$

Para asignar valores semánticos a los predicados, en cambio, sí tenemos que considerar el mundo. Supongamos que en nuestro caso hay dos mundos: M_1 y M_2. En cada mundo cada relator se interpreta de la manera usual:

$\mathtt{i}(F,M_1)=\{<d_1, M_1>, <d_2, M_1>\} \quad \mathtt{i}(F, M_2)=\{<d_1, M_2>, <d_3, M_2>\}$

Indica que en el M_1 los ítems d_1 y d_2 poseen la propiedad F, en cambio en el M_2 solo d_1 y d_3 la poseen.

$\mathtt{i}(G,M_1)=\{<d_1,d_1,M_1>, <d_1,d_2,M_1>\}$

$\mathtt{i}(G,M_2)=\{<d_1,d_2,M_2>, <d_1,d_3,M_2>, <d_3,d_2,M_2>\}$

nos dice que en M_1 la relación G la tiene d_1 consigo mismo y con d_2. En M_2 la relación vincula d_1 con d_2, d_1 con d_3 y d_3 con d_2.

En estos casos, constantes y relatores, su rol semántico se establece a través de `i`. A partir de estas atribuciones, lograremos obtener valores de verdad para las fórmulas en las que aparecen.

Para las variables tomamos una función g arbitraria, en la que lo único que interesa es la asignación de un elemento de D a cada variable. Llamémosla g_1:

$g_1(x)=d_1, \quad g_1(y)=d_2, \quad g_1(z)=d_3$

En todo modelo se producen asignaciones e interpretaciones como las del ejemplo, con estos elementos se definen las valuaciones por categorías sintácticas:

1) Valuación de fórmulas atómicas. [V_Mg,atóm]

$$V_{Mg}(\Pi\alpha_1\alpha_{2\ldots}\alpha_n, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} <||\alpha_1||, ||\alpha_2||, \ldots, ||\alpha_n||, M_i> \in \mathtt{i}\Pi, M_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Leamos pausadamente la regla [V_{Mg},atóm]. Ella nos dice que se trata de la regla relativa a las fórmulas atómicas. Recordemos que una fórmula atómica es una en la que no aparecen ni cuantificadores, ni conectores, por ejemplo: Fxy, Gcyy, o Ha son tres fórmulas atómicas.

'$V_{Mg}(\Pi\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, M_i)=$' , nos dice que vamos a dar el valor semántico de la fórmula atómica $\Pi\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ en el mundo M_i tomando en cuenta el modelo y la asignación. Π es un relator (o letra de predicado) n-ádico, esto es uno que debe ser seguido por n términos, en este caso por α_1, α_2, ..., α_n.

$$V_{Mg}(\Pi\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, M_i)=1 \text{ si } <||\alpha_1||, ||\alpha_2||, \ldots, ||\alpha_n||, M_i> \in \mathtt{i}(\Pi, M_i)$$

Dice que el valor semántico será 1 (verdad) si se cumple que el elemento $<||\alpha_1||, ||\alpha_2||, \ldots, ||\alpha_n||, M_i>$ pertenece al conjunto $\mathtt{i}(\Pi, M_i)$. El elemento $<||\alpha_1||, ||\alpha_2||, \ldots, ||\alpha_n||, M_i>$ es un conjunto ordenado de n+1 elementos. Los primeros n (como $||\alpha_1||$, $||\alpha_2||$, ..., $||\alpha_n||$) son los que corresponden a cada uno de los términos de la fórmula atómica, en el orden que tienen en ésta, de acuerdo con la función `i` o g. El n+1 ésimo es el mundo en el que se está evaluando la fórmula atómica. Por último, el conjunto $\mathtt{i}(\Pi, M_i)$

es el que la función i le asigna a el relator Π de la fórmula atómica en el mundo M_i.

0 en caso contrario

Dice que siempre que no ocurra el caso anterior el valor semántico será 0 (falso). Todo esto se escribe en forma compacta como:

$$V_{Mg}(\Pi\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, M_i)= \begin{cases} 1 \quad \text{si} <\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\|, \ldots, \|\alpha_n\|, M_i> \in i(P,M_i). \\ 0 \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Veamos el ejemplo basándonos en los valores asignados a i y g_1:

Calculemos Gay en el mundo M_1. Necesitamos averiguar si el elemento $<i(a), g_1(y), M_1>$ (que es un conjunto ordenado) pertenece al conjunto $i(G,M_1)$. Si leemos más arriba observamos que $<i(a), g_1(y), M_1>=<d_1, d_2, M_1>$ y que $i(G,M_1)=\{<d_1,d_1,M_1>, <d_1,d_2,M_1>\}$. Por lo tanto V_{Mg1} $(Gay,M_1)=1$, pues:

$<d_1, d_2, M_1> \in \{ <d_1,d_1,M_1>, <d_1,d_2,M_1>\}$.

Las reglas 2, 3, 4, 5, son las relativas a los conectores lógicos proposicionales y no requieren mayor explicación, en ellas φ y ψ son fórmulas bien formadas cualesquiera del lenguaje.

2) Valuación de una negación $[V_{Mg}, \sim]$

$$V_{Mg}(\sim\varphi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{Mg}(\varphi, M_i) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3) Valuación de una conjunción $[V_{Mg}, \wedge]$

$$V_{Mg}(\varphi\wedge\psi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{Mg}(\varphi, M_i) = V_{Mg}(\psi, M_i) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4) Valuación de una disyunción $[V_{Mg}, \vee]$

$$V_{Mg}(\varphi\vee\psi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{Mg}(\varphi, M_i) = 1 \text{ o } V_{Mg}(\psi, M_i) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5) Valuación de un condicional $[V_{Mg}, \rightarrow]$

$$V_{Mg}(\varphi\rightarrow\psi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{Mg}(\varphi, M_i) = 0 \text{ o } V_{Mg}(\psi, M_i) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6) Valuación de un bicondicional $[V_{Mg}, \leftrightarrow]$

$$V_{Mg}(\varphi \leftrightarrow \psi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_{Mg}(\varphi, M_i) = V_{Mg}(\psi, M_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las reglas que siguen son relativas a los cuantificadores, para leerlas correctamente es necesario recordar que en ellas se hace intervenir más de una asignación g.

Rápidamente refresquemos algunas nociones de la semántica cuantificacional no modal. Una fórmula como $(\forall x)Fx$ para interpretarse verdadera requiere de un dominio de individuos D (conjunto no vacío cualquiera) en el que todo elemento posea la propiedad F. Esto se debe traducir en términos de la función g. Pero la función g asigna a x solo un elemento de D. Para paliar este inconveniente es necesario recurrir a todas las otras posibles asignaciones que dan a x otro valor en D. Y como en este caso no interesa lo que ocurra con las variables que no están en la fórmula que se valúa, basta considerar todas las asignaciones que difieren de la dada solo en x, o como se acostumbra a decir: todas las g' que difieren de la asignación g en a lo más el valor de x.

7) Valuación de una fórmula universal $[V_{Mg}, \forall]$

$$V_{Mg}((\forall\beta)\varphi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si para toda g' igual a g salvo tal vez en } \beta, \\ & \text{ocurre } V_{Mg'}(\varphi, M_i)=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8) Valuación de una fórmula existencial $[V_{Mg}, \exists]$

$$V_{Mg}((\exists\beta)\varphi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si para alguna g' igual a g salvo tal vez en } \beta, \\ & \text{ocurre } V_{Mg'}(\varphi, M_i)=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que hasta ahora (reglas 1 a 8) la valuación de una fórmula en un mundo dado no requiere la intervención de ningún otro mundo del modelo. En las reglas que quedan, relativas a los operadores modales, los mundos posibles accesibles intervendrán en la valuación de una fórmula.

9) Valuación de una fórmula necesaria $[V_{Mg}, \Box]$

$$V_{Mg}(\Box\varphi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo Mj tal que } M_i\text{RMj}, \\ & \text{ocurre } V_{Mg}(\varphi, \text{Mj})=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10) Valuación de una fórmula posible $[V_{Mg}, \Diamond]$

$$V_{Mg}(\Diamond\varphi, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si para algún Mj tal que } M_iRMj\text{ ,} \\ & \text{ocurre } V_{Mg}(\varphi, Mj)=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En general, cuando no haya lugar a confusión no especificaremos de qué modelo se trata; es decir, M aparecerá por M_{T+FB} o por el modelo que corresponda.

Con estas definiciones se pueden definir las nociones centrales de la semántica:

1) Validez-T+FB

Una fórmula φ es válida-T+FB si para todo M_{T+FB},=<**M**, R, D, i>, ocurre que $V_{Mg}(\varphi, M_i)=1$ Para todo $M_i \in$ **M**.

Debe notarse que en esta definición la fórmula φ debe valer 1 en todos los mundos de cada modelo posible. A continuación desarrollamos otros ejemplos de utilización del modelo.

Ejemplo 1

Construyamos un sistema T+FB = <**M**,R,D, i>, para un lenguaje con un predicado monádico F, y tres variables x, y, z.

Sea D = {*a, b, c*} (*a, b, c* son individuos no constantes).

M = $\{M_1, M_2, M_3\}$ M_1RM_2, más la reflexividad de R.

$$\mathrm{i}(F) = \{ <a,M_1>, <a,M_2>, <b,M_2>, <c,M_2>, <c,M_3> \}$$

$$g(x)=c \qquad g(y)=b \qquad g(z)=c$$

Además, solo para fines ilustrativos consideraremos otras dos asignaciones g' y g" de las muchas que hay. Una g' se diferencia de g solo en z, y la otra g" solo en x:

$$g'\!: \begin{array}{l} x \rightarrow c \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow b \end{array} \qquad g''\!: \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow c \end{array}$$

Valuemos algunas fórmulas:

$V_{Mg}(Fx, M_3)=0$ $V_{Mg}(Fz, M_2)=1$ $V_{Mg}(Fx, M_1)=0$

$V_{Mg}((\exists x)Fx, M_3)=1$ Pues, por ejemplo, para g' se tiene: $g'(x)=c$ y por tanto $V_{Mg'}(Fx,M_3)=1$.

$V_{Mg}((\exists x)Fx, M_2)=1$ y $V_{Mg}((\exists x)Fx, M_1)=1$. De estos tres últimos sigue que:

$V_{Mg}(\Box(\exists x)Fx, M_1)=1$ $V_{Mg}(\Box(\exists x)Fx, M_2)=1$ $V_{Mg}(\Box(\exists x)Fx, M_3)=1$

$V_{Mg}(\Box Fx, M_1)=0$ $V_{Mg}((\forall x)Fx, M_1)=0$ $V_{Mg}(\Box Fx, M_2)=1$

$V_{Mg}((\forall x) Fx, M_2)=1$ $V_{Mg}(\Box Fx, M_3)=1$ $V_{Mg}((\forall x)Fx, M_3)=0$

$V_{Mg}((\forall x)\Box Fx, M_1)=0$ $V_{Mg}(\Box(\forall x)Fx, M_1)=0$ $V_{Mg}((\forall x)\Box Fx, M_2)=1$

$V_{Mg}(\Box(\forall x)Fx, M_2)=1$ $V_{Mg}((\forall x)\Box Fx, M_3)=1$ $V_{Mg}(\Box(\forall x)Fx, M_3)=0$

$V_{Mg}[(\forall x)\Box Fx \rightarrow \Box(\forall x)Fx, M_1]=1$. (OJO: esta es FB)

Ejemplo 2

φ: $(\forall x)\Pi x \rightarrow \Pi y$

Se trata de un conocido esquema de fórmula de lógica cuantificacional. Para probar su validez utilizaremos una demostración por el absurdo, para lo cual supondremos un modelo cualquiera $<M,R,D,\mathrm{i}>$ en el cual haya un mundo M_1 tal que $V_{Mg}(\varphi, M_1)=0$, para alguna g. Es decir, suponemos inválida la fórmula y buscamos mostrar que esto implica una contradicción. Como φ es un condicional tenemos:

A) $V_{Mg}((\forall x)\Pi x, M_1)=1$ y B) $V_{Mg}(\Pi y, M_1)=0$

La primera valuación, A, implica por la regla 7 que para toda asignación g' diferente de g en a lo más el valor que asigna a x ocurre: $V_{Mg'}(\Pi x, M_1)=1$. Y por la regla 1

C) $g'(x) \in i(\Pi, M_1)$ para toda g'.

Y la parte B implica que $g(y) \notin i(\Pi, M_1)$. Llamemos d a ese elemento del dominio D que g asigna a la variable *y*. Tenemos:

D) $d \notin i(\Pi, M_1)$

Los resultados C y D encierran una contradicción, pues alguna de las g' consideradas en C atribuye el elemento d a x. Es decir, existe una asignación que podemos llamar g^2 tal que $g^2(x)=d$ y es igual a g en el resto. Esto hace que de C se siga:

E) $d \in i(\Pi, M_1)$.

E y D se contradicen. Esto termina la prueba de que φ es válida.

Ejemplo 3

FB: $(\forall x)\Box Fx \rightarrow \Box(\forall x)Fx$

Nuevamente empezaremos con la suposición que FB es falsa en algún mundo M_i de un modelo-T+FB arbitrario $<\mathbf{M}, R, D, i>$ para alguna g, por lo que:

i) $V_{Mg}((\forall x)\Box Fx, M_i)=1$ ii) $V_{Mg}(\Box(\forall x)Fx, M_i) = 0$

i) nos lleva a considerar asignaciones g' similares a g salvo en x, mientras que ii) nos conduce a un mundo M_1 accesible a M_i.

iii) $V_{Mg'}(\Box Fx, M_i) = 1$ para toda g'

iv) $V_{Mg}((\forall x)Fx, M_1)=0$ con M_iRM_1

iii) es la valuación de una fórmula necesaria, lo que nos obliga a considerar a todos los mundos Mj accesibles desde M_i. iv) valúa una fórmula universal, lo que nos lleva a considerar que hay por lo menos una g" que se diferencian de g a lo más en x.

v) $V_{Mg'}(Fx, M_j) = 1$ para toda g' y todo Mj tal que M_iRMj

vi) $V_{Mg''}(Fx,M_1)=0$ para alguna g" y M_1 tal que M_iRM_1

Como v) vale para todo mundo accesible a M_i, en particular debe valer para M_1. Además, vale para toda g' del tipo en cuestión y una de ellas es g". Así:

vii) $V_{Mg''}(Fx, M_1) = 1$ vi) $V_{Mg''}(Fx, M_1) = 0$

que se contradicen. Luego FB es válido-T+FB

Fíjese que lo que tiene un modelo-T+FB es un universo de individuos único para todos los mundos del modelo y que la función de i no cambia, para los términos, al cambiar de mundo.

Ejercicios

1) Enuncie las reglas de lo que sería un modelo-S4+FB

2) Enuncie las reglas de lo que sería un modelo-S5+FB

3) Adecue el modelo del ejemplo 1 para que sea uno

S4+FB y calcule las fórmulas del ejemplo.

4) Adecue el modelo del ejemplo 1 para que sea uno S5+FB y calcule las fórmulas del ejemplo.

IV-3.2 Modelos con distintos dominios

Estos son modelos en los que no es necesario que todos los mundos tengan los mismos individuos. Por tanto, se requiere especificar el dominio de individuos en cada mundo. Son conjuntos ordenados de cinco elementos.

M_{D+T} =<**M**, R, D, Q, i >, donde

M: Conjunto de mundos posibles.

R: Relación entre mundos totalmente definida en **M** y tal que es reflexiva para T, (además es transitiva para S4 y de equivalencia para S5.)

D: Dominio de individuos $\{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$. Estos son todos los individuos del modelo, pero no todos ellos están en todo mundo. Utilizaremos la denominación {*a, b, c*, ... } cuando no se preste a confusión.

Q: Función que indica qué individuos pertenecen a qué mundo, va del conjunto **M** de mundos al conjunto potencia de D sin incluir a ϕ (conjunto de los subconjuntos de D no vacíos): $Q{:}M \Rrightarrow P(D)-\{\phi\}$ así,

$Q(M_i)$ son los individuos del modelo que existen en M_i, lo llamaremos D_i. $Q(M_i)= D_i$.

En este tipo de modelos también se exige que si M_iRMj entonces $D_i \subseteq D_j$.[50] Es decir, que un mundo accesible puede tener más elementos, pero no menos, que aquel para el que es accesible.

i Es la función de interpretación.

En este caso, nuevamente V_{Mg} es la función de valuación, otorga valores de verdad a las FBF de L_{CM}, y g es una función del conjunto de variables de L_{CM} a D.

En esta semántica se presenta una complicación al definir V_{Mg} pues ¿Qué debemos hacer con $V_{Mg}(F\alpha, M_1)$ cuando $||\alpha|| \notin D_1$? O dicho de otro modo ¿Cómo interpretar en un mundo una expresión relativa a un individuo que no pertenece a ese mundo? Una solución posible, que es la adoptada aquí, es considerarla no definida. Así, ocurrirá que V_{Mg} aplicada a una fórmula está definida o no lo está. Si está definida debe ser 1 ó 0. A continuación damos las definiciones de V_{Mg} que gobiernan esta semántica:

Definición de:

Interpretación de un término en un mundo M_i de un modelo dado M_{D+T} según una asignación dada g.

---

[50] Véase Gamut [37] T2 §3.3 para una discusión de esta última exigencia.

$$||\alpha,M_i||_M g= \begin{cases} \mathrm{i}(\alpha,M_i) & \text{si } \alpha \text{ es una constante} \\ g(\alpha) & \text{si } \alpha \text{ es una variable} \end{cases}$$

Donde las asignaciones no dependen de los mundos.

Definición de:

Interpretación de un predicado en un modelo M_{D+T}

Si Π^n es un predicado n-ádico,

$\mathrm{i}(\Pi^n,M_i)=\{<d_1, d_2, ..., d_n, M_i>\}$

con la condición que cada $dj\in D_i$, es decir la «propiedad» asociada a Π^n se define en cada mundo con individuos que pertenecen a ese mundo.

Definición de:

V_{Mg}. Función de valuación de fórmulas para un modelo M_{D+T} dado y una asignación dada.

[V_{Mg},atóm.]

$V_{Mg}[P\alpha_1\alpha_2...\alpha_n, M_i]$ no está definido si $||\alpha_i||\notin D_i$ para alguno de los términos α_i que aparece.

Cuando está definida es como en los modelos-T+FB.

$$V_{Mg}(\Pi\alpha_1\alpha_{2...}\alpha_n, M_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} <||\alpha_1||, ||\alpha_2||, \ldots, ||\alpha_n||, M_i>\in \mathrm{i}(\Pi,M_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$[V_{Mg}, \sim\varphi]$

$V_{Mg}[\sim\varphi, M_i]$ no está definida si $V_{Mg}[\varphi, M_i]$ no lo está.

Cuando está definida como en los modelos-T+FB.

$[V_{Mg}, \varphi\wedge\psi]$

$V_{Mg}[\varphi\wedge\psi, M_i]$ no está definida cuando $V_{Mg}[\varphi, M_i]$ o $V_{Mg}[\psi, M_i]$ no lo están.

Cuando está definida como en los modelos-T+FB.

El lector deberá completar en detalle las reglas $[V_{Mg}, \varphi\vee\psi]$, $[V_{Mg}, \varphi\rightarrow\psi]$, $[V_{Mg}, \varphi\leftrightarrow\psi]$.

$[V_{Mg}, \forall\beta]$

$V_{Mg}[(\forall\beta)\varphi, M_i]$ está definida si $V_{Mg'}[\varphi, M_i]$ lo está para toda asignación g' que difiera de g en a lo más el valor que le asigna a β en D_i. Es decir, interesan las g' para las cuales $g'(\beta)\in D_i$.

Cuando está definida como en los modelos-T+FB considerando solo las g' que llegan a elementos de D_i.

$[V_{Mg}, \exists\beta]$ queda para el lector.

$[V_{Mg}, \Box]$

$V_{Mg}[\Box\varphi, M_i]$ está definida cuando $V_{Mg}[\varphi, Mj]$ lo está para todo Mj tal que M_iRMj.

Cuando está definida como en los modelos-T+FB.

$[V_{Mg}, \Diamond]$ queda para el lector.

Ejemplos 1

Sea el modelo $<M,R,D,Q,i>$ donde:

$\mathbf{M}=\{M_1, M_2\}$, con M_1RM_2 $D=\{a, b\}$, con $D_1=\{a\}$ y $D_2=\{a, b\}$.
$g(x)=a$, $g(y)=b$ y $i(F)=\{<a, M_1>, <a, M_2>\}$.
$V_{Mg}[Fx,M_1]=1$ $V_{Mg}[Fy,M_1]=*$ $V_{Mg}[Fx,M_2]=1$ $V_{Mg}[Fy, M_2]=0$
$V_{Mg}[\Box Fx,M_1]=1$ $V_{Mg}[\Box Fy, M_1]=*$ $V_{Mg}[\Box Fx, M_2]=1$
$V_{Mg}[(\forall x)Fx,M_1]=1$ $V_{Mg}[(\forall x)\Box Fx,M_1]=1$ $V_{Mg}[(\forall x)Fx, M_2]=0$
$V_{Mg}[\Box(\forall x)Fx, M_1]=0$

Y por último la famosa FB:

$$V_{Mg}[(\forall x)\Box Fx \rightarrow \Box(\forall x)Fx, M_1]=0$$

Resulta que en estos modelos FB no vale. Esto se sigue de la posibilidad que los mundos del modelo difieran en sus individuos.[51]

---

[51] Véanse Hughes y Cresswell [63] cap. X, y Kripke [74].

Capítulo V

Deducción natural cuantificacional modal

Al igual que en la lógica modal proposicional, también tendremos diferentes sistemas de lógica modal cuantificacional. En primer lugar, veremos uno llamado DNC+T. El nombre es un compuesto de cálculo de deducción natural cuantificacional de primer orden más sistema T, pues es el resultado de «cuantificar» sobre la base del sistema modal T.

V-1 Sistema DNC+T

A) Reglas DNC+T

A las reglas del cálculo proposicional T les añadimos:

1) Eliminación del cuantificador universal E∀.
2) Introducción del cuantificador existencial I∃.
3) Introducción del cuantificador universal I∀.
4) Eliminación del cuantificador existencial E∃.

Eliminación del cuantificador universal E ∀

	⋮	
i	$(\forall\beta)\varphi[\beta]$	
	⋮	
j	$\varphi[\alpha]$	i, E∀
	⋮	

Donde $\varphi[\alpha]$ se obtiene por la sustitución propia de la variable β por el término α en $\varphi [\beta]$.

Introducción del cuantificador existencial I∃

	⋮	
i	$\varphi [\alpha]$	
	⋮	
j	$(\exists\beta)\ \varphi [\beta]$	i,I∃.
	⋮	

Donde debe existir la siguiente relación: $\varphi[\alpha]$ se obtiene de $\varphi[\beta]$ por una sustitución propia. Obsérvese que, si bien la línea $\varphi[\alpha]$ precede a la línea $(\exists\beta)\varphi[\beta]$, debe cuidarse se cumpla que la línea que antecede pueda obtenerse de $\varphi[\beta]$, que aparece en la que sigue, por una sustitución propia de α por β en la subfórmula $\varphi[\beta]$.

Eliminación del cuantificador existencial E∃

	⋮	
i	$(\exists\beta)\varphi[\beta]$	Hip.
	⋮	
j	$\beta \mid \underline{\varphi}[\alpha]$	Hip.∃.
	$\mid$ ⋮	
k	$\mid \psi$	Justif.(sin β libre)
	⋮	
l	ψ	i,j-k E∃.
	⋮	

Introducción del cuantificador universal I ∀

```
  | ⋮
i |    β |
  |      | ⋮
j |      | ψ           Justif.
  | ⋮
k | (∀β)ψ              j-k, I∀.
  | ⋮
```

Ejemplo: Probar □(∀x)Fx→(∀x)□Fx

```
1 | | □(∀x)Fx                 Hip.
  | |________
2 | |    x | □(∀x)Fx         1,Reit
3 | |      |    □ | (∀x)Fx   2,R-T
4 | |      |      | Fx       3, E∀
5 | |      | □Fx             3-4,I□
6 | | (∀x)□Fx                2-5,I∀
7 | □(∀x)Fx→(∀x)□Fx          1-6, I→
```

Ejercicios

1) Probar:

   1) (∃x)◊Fx→◊(∃x)Fx
   2) ◊(∀x)Fx→(∀x)◊Fx
   3) (∀x)□(Fx∧Gx)↔[(∀x)□Fx∧(∀x)□Gx].

V-2 Otros cálculos: DNC+S4 y DNC+S5

El sistema DNC+S4 se obtiene añadiendo las reglas del cálculo cuantificacional a las de DNS4. Y de modo similar obtenemos DNC+S5. Solo probaremos que en DNC+S5 vale FB.

A) Prueba de FB en CEP+S5

Es conveniente probar primero:

Teorema ◊(∀x)□Fx→(∀x)Fx

```
1 │    │◊(∀x)□Fx                 Hip.
2 │    │   x │◊(∀x)□Fx           Hip.
3 │    │     │     □ │(∀x)□Fx    Hip. □
4 │    │     │       │□Fx        3, E∀
5 │    │     │◊□Fx               2, 3-4, E◊
6 │    │     │□Fx                5, Teor. S5
7 │    │     │Fx                 6, E□
8 │    │(∀x)Fx                   2-7, I□
9 │ ◊(∀x)□Fx→(∀x)Fx             1-8, I□
```

Teorema $(\forall x)\Box Fx\rightarrow\Box(\forall x)Fx$ FB

1	$\vert\ \underline{(\forall x)\Box Fx}$	Hip.
2	$\vert\ \Diamond(\forall x)\Box Fx$	1, I$\Diamond$
3	$\vert\ \quad \Box\ \vert\ \Diamond(\forall x)\Box Fx\rightarrow(\forall x)Fx$	Teor. anterior
4	$\vert\ \qquad\ \vert\ \Diamond(\forall x)\Box Fx$	2, R-S5
5	$\vert\ \qquad\ \vert\ (\forall x)Fx$	3, 4, E$\rightarrow$
6	$\vert\ \Box(\forall x)Fx$	3-5, I$\Box$
7	$(\forall x)\Box Fx\rightarrow\Box(\forall x)Fx$	1-6, I$\rightarrow$

Capítulo VI

Lógica deóntica

VI-1 Introducción

La lógica deóntica es por lo menos tan antigua como la lógica. Y su desarrollo parece acompañarse siempre de paradojas que cuestionan al mismo tiempo su valor. Una, tal vez la más antigua, es la siguiente: Protágoras, el conocido sofista, dio clases de retórica a su alumno Euatlo, bajo el convenio que le serían pagadas tan pronto Euatlo ganara su primer caso. Tiempo después como no había recibido ningún pago Protágoras demandó a su ex-alumno. Euatlo argumentó que todavía no había ganado ningún caso.[52] ¿Qué sentenciaría Ud.?

Las nociones deónticas intuitivas básicas son las de obligación y permiso. Si utilizamos los símbolos 'O' para 'es obligatorio que' y 'P' para 'está permitido que' podemos formalizar expresiones como:

(1) Es obligatorio que se honre a los padres por Op

y (2) Está permitido que se honre a los tíos por Pq

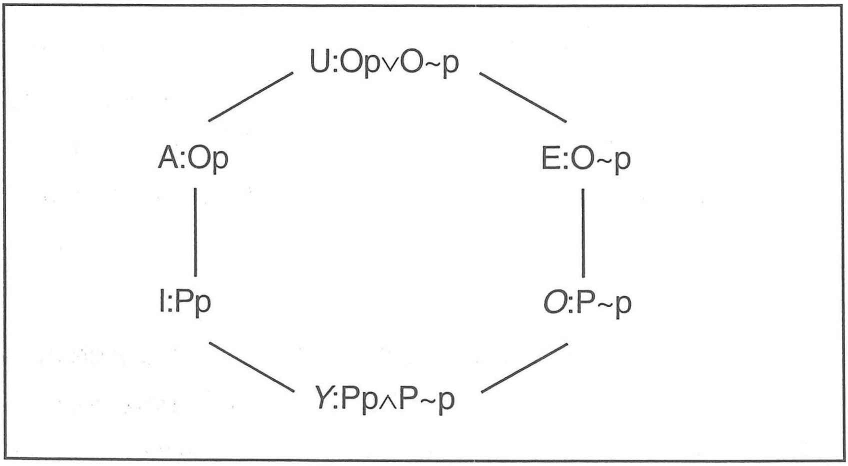
con, cuando menos, las ventajas de una notación abreviada. Para efectos prácticos consideraremos: es obligatorio honrar a los padres como una forma sinónima de (1), aunque es

---

[52] Diógenes Laercio [77] Libro IX.

evidente que no es lo mismo decir que una acción es obligatoria que decir que un estado de cosas es obligatorio.[53] Evitaremos la discusión del tema y consideraremos que la forma (1) es la estándar.

Con las nociones deónticas podemos establecer un paralelismo evidente O-□ y P-◊. Así, sin adentrarnos demasiado en dificultades podemos reconstruir un hexágono de relaciones:[54]



Donde U es lo reglamentado, ya sea porque es obligatorio o porque está prohibido, A es lo obligatorio, E lo prohibido, I lo permitido, *O* (que debe distinguirse de la O de obligatorio) lo facultativo y, por último, *Y* lo indiferente o lo doblemente facultativo. Al analizar sus interrelaciones encontramos que repiten el hexágono de la modalidad óntica (Cap. 1, Ejercicios p.45). Por ejemplo, la negación de la afirmación que una si-

---

[53] Veáse [66] cap. 1.

[54] Blanché [14].

tuación es indiferente es la afirmación que está reglamentada. Recomendamos al lector desarrollar todas las relaciones que se establecen.

VI-2 Lenguaje deóntico. L_D

Símbolos primitivos

Proposicionales: p, q, r ...

Conectores u operadores veritativos: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Operador deóntico: O

Auxiliares: ( ), [ ], { }.

Reglas de formación

1) Toda letra proposicional es una FBF
2) Si φ es una FBF, entonces $\sim\varphi$ también lo es.
3) Si φ y ψ son FBFs, entonces también lo son: $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$ y $(\varphi\leftrightarrow\psi)$.
4) Si φ es una FBF, entonces $O\varphi$ también.

Nota: O es un operador monádico como la negación. Op se lee: es obligatorio que p.

Símbolos definidos

$Pp =_{def.} \sim O \sim p.$

Desde el punto de vista de su comportamiento como símbolos O y P se comportan como $\Box$ y $\Diamond$. Pp se lee: está permitido p.

VI-3 Semántica deóntica

La noción de obligación que manejamos no se basa en una manera de ser especial, sino en una valoración: lo que debe ser. Para lograr que, sin muchas modificaciones, el aparato de mundos posibles se utilice en este caso consideramos mundos peculiares. Si en lo que consideramos un mundo bueno suponemos que una proposición es verdadera, entonces debe ser así: si p es un enunciado verdadero en cualquier situación buena entonces afirmamos Op. Esta noción de obligación se parece a la noción de necesidad pero no se confunde, pues para la justificación de un juicio deóntico no interesa lo que ocurre en un mundo posible cualquiera, sino lo que ocurre en un mundo posible bueno. Llamaremos utopías a estos mundos posibles buenos. En consecuencia, los mundos posibles de nuestros modelos deónticos serán utopías: utopías posibles. No es que se afirme que si una situación es buena (recomendable, deseable o adecuada) sea, sino que esa situación es la que vale a la hora de considerar lo que debe ser; es decir, el mundo real no es uno de esos mundos buenos y no vale $Op \rightarrow p$.

VI-3.1 Modelos deónticos M_D

Como procedíamos en la lógica modal óntica, el lenguaje L_D se interpreta sobre modelos. Un modelo-D es un conjunto de tres elementos $M_D = <\mathbf{M}, S, V>$. **M** es el conjunto de mundos, S es una relación binaria entre elementos de **M**, llamada relación de *permisibilidad*; y V es la función de valuación del modelo. La relación S es *serial*. Esto es, está definida en todo **M** y, además, $\forall M_i \in M \quad \exists M_j \in M$ tal que M_iSM_j . Intuitivamente M_j es una utopía de M_i y todo mundo tiene por lo menos una utopía. La función de asignación V es la habitual función definida para cada proposición atómica en cada mundo con las definiciones estándares de los conectores veritativos. Solo deben añadirse las reglas de los operadores deónticos:

$$V[O\varphi,M_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall Mj \in \mathbf{M} \text{ tal que } M_iSMj \text{ se tiene } V[\varphi,Mj]=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$V[P\varphi,M_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists Mj \in \mathbf{M} \text{ tal que } M_iSMj \text{ y } V[\varphi,Mj]=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De este modo, generamos las definiciones semánticas básicas: fórmula verdadera en un mundo de un modelo-D, fórmula verdadera en un modelo-D y, por último, fórmula válida-D. Puede probarse compleción y consistencia en relación al sistema DND[55] que desarrollaremos más adelante.

Una consecuencia de las definiciones semánticas, es que si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash O\varphi$: si ocurre que un enunciado es válido entonces es válido que deba serlo. Dicho de otro modo, 2+2=4

---

[55] En Bailhache [8] cap. I y anexo 1 se encuentran las líneas generales de las demostraciones.

no solo es un teorema aritmético, sino que es un teorema deóntico: debe ser que 2+2=4. Las tesis de la lógica y de la aritmética se convierten en principios éticos. Es algo chocante, pero tal vez la siguiente situación justifique intuitivamente su validez. Si el cajero de un banco recibe 2 soles y después otros 2 esperamos que entregue 4 al banco, si no lo hiciera pondríamos en tela de juicio su honestidad.

En los modelos DT la relación S debe ser, además de serial, postreflexiva. Para explicar qué significa esto recordemos que llamamos a todo mundo M_i bueno u utopía si lo es para otro. Es decir, M_i es una utopía si $\exists Mj \in \mathbf{M}$ tal que $MjSM_i$, o en palabras M_i es un mundo permisible para algún otro. La postreflexividad establece que para todo mundo utópico M_j vale M_jSM_j, la relación de permisibilidad es reflexiva en los mundos utópicos. En otras palabras, todo mundo utópico para otro lo es también para sí, en un mundo bueno lo que debe ser es.

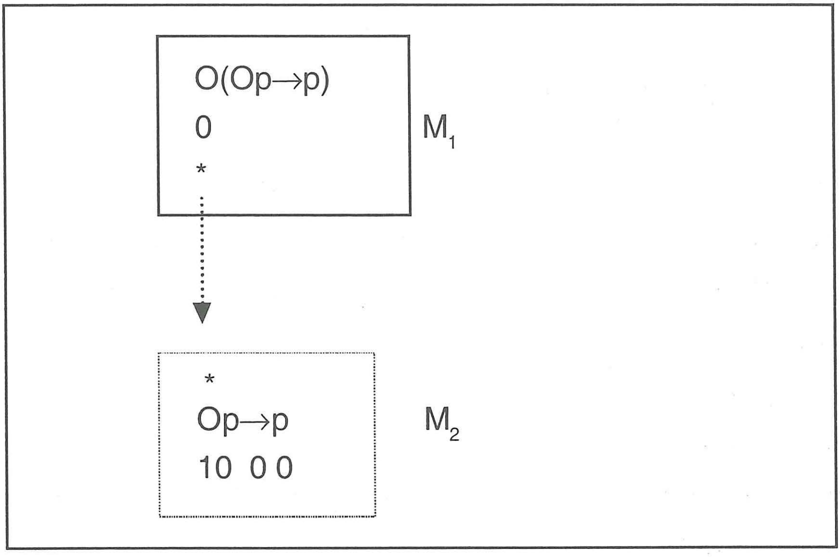
Los modelos DS4 requieren que la relación S sea serial, postreflexiva y transitiva. Así vale $Op \to OOp$. Si no valiera, en un mundo M_i ocurriría que Op sería verdadera y OOp falsa, por lo que habría un mundo Mj permisible desde M_i en el que Op sería falsa y esto a su vez supondría un mundo M_k donde p es falsa. Pero al ser la relación de permisibilidad transitiva, M_k sería un mundo permisible para M_i y al ser Op verdadera en M_i p sería verdadera en él. Tendríamos así que p es verdadera y falsa en M_k, lo que no es posible y demuestra la validez de $Op \to OOp$ en los modelos DS4.

En los modelos DS5 la relación de permisibilidad S es serial, postreflexiva, transitiva y postconmutativa (S es conmutativa entre mundos utópicos). Es fácil comprobar POp→Op.

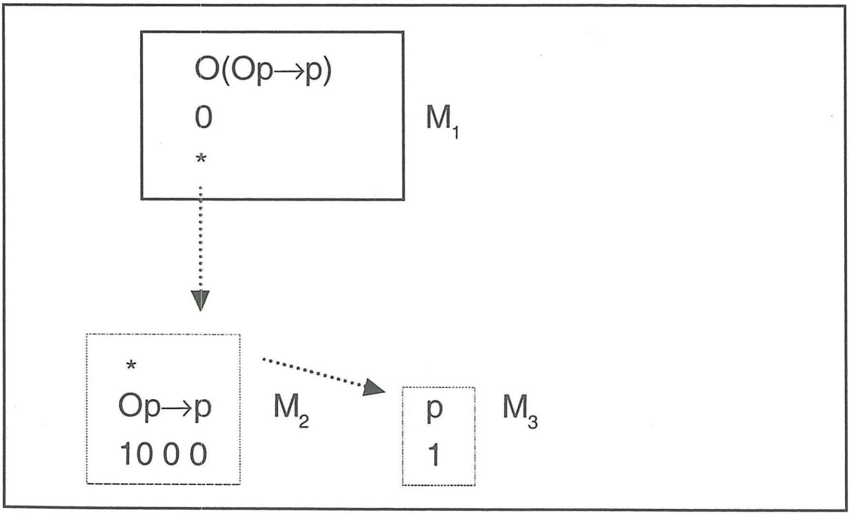
VI-3.2 Método de diagramas deónticos

El método de diagramas deónticos es similar al de la lógica modal óntica y también es un método decisorio. Solo que en este caso los mundos utópicos los distinguiremos de los mundos posibles encerrándolos en rectángulos punteados y la relación S de permisibilidad la representaremos por flechas discontinuas. Veamos algunos ejemplos:

En el sistema D evaluar O(Op→p):



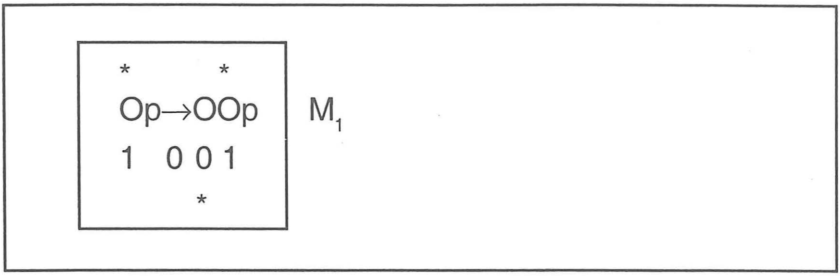
En D no hay contradicción, pues la relación de permisibilidad S no es ni reflexiva ni postreflexiva. Pero al ser serial debemos siempre considerar un mundo permisible para todo mundo. Así, las reglas RC para nuevos mundos se modifican, ahora todo asterisco genera un mundo permisible. En nuestro caso, por la falta de reflexividad unida a la serialidad de la relación de permisibilidad. Debemos completar el diagrama:



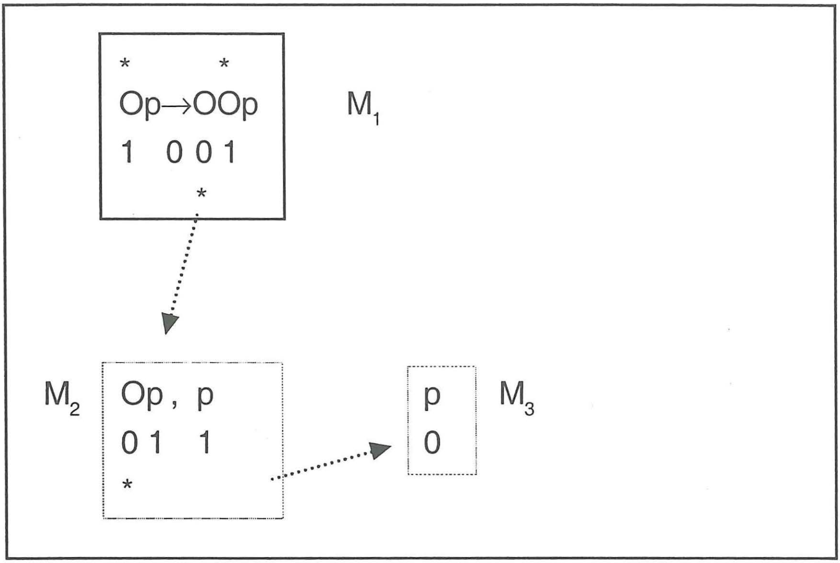
Sin contradicciones. Es una fórmula inválida en D. Es decir, en este sistema no es ley que deba ser que lo obligatorio sea.

En un modelo-DT, en cambio, la postreflexividad produciría una contradicción en M_2, pues al ser Op verdadero en él, p tendría que serlo también. Además, en DT no se requeriría considerar M_3.

Evaluemos la validez de Op→OOp en un modelo-DT



M_1 no es un mundo permisible, luego la postreflexividad no lo toca y no podemos inferir que p sea verdadero en él.



Como los modelos DT no son transitivos, no se produce ninguna contradicción.

Ejercicios

1) Evalúe la validez, por diagramas deónticos, de:
   - a) $O(Op \rightarrow p)$ en un modelo-DT,
   - b) $Op \rightarrow OOp$ en un modelo-DS4
   - c) $POp \rightarrow Op$ en un modelo-DS4
   - d) $POp \rightarrow Op$ en un modelo-DS5.

VI-3.3 Ser y deber ser

A) Lenguaje modal óntico y deóntico L_{MO}

La lógica modal óntica y la deóntica que hemos expuesto por separado pueden unirse en una sola. Para esto necesitamos un nuevo lenguaje, el lenguaje modal óntico deóntico $L_{MO,}$ que será una ampliación del lenguaje proposicional al cual aumentamos:

Símbolos primitivos

Operadores monádicos $\Box$ y O.

Reglas de formación

RF: si φ es una FBF entonces $\Box\varphi$ y $O\varphi$ también lo son.

Definiciones

Hay que definir, por lo menos, $\Diamond\varphi$ y $P\varphi$ lo que dejamos al lector.

B) Semántica óntica y deóntica

La lógica modal óntica y la deóntica se unen en una sola, considerando que todo mundo utópico o bueno es un mundo posible, pero que no necesariamente un mundo posible es bueno. En términos formales, todo mundo permisible es accesible:

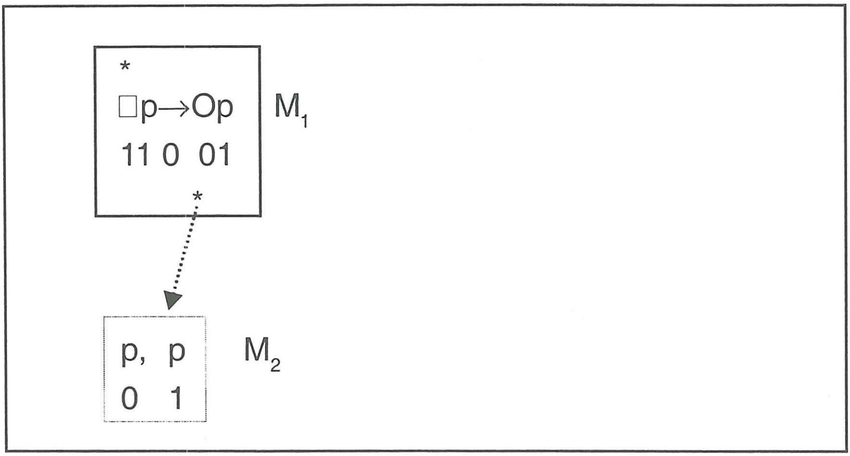
$$\forall M_i, M_j \in \mathbf{M} \text{ si } M_i S M_j \text{ entonces } M_i R M_j.$$

Según incluyamos exigencias de reflexividad, postreflexividad, conmutatividad, etc., generaremos modelos que son mezclas de sistemas tipo T, S4 o S5 con D, DT, etc. La nueva semántica genera nuevos principios. Algunos interesantes son:

$\Box p \rightarrow Pp$	Si p es necesaria, es permisible.
$\Box p \rightarrow Op$	Si p es necesaria, es obligatoria.
$Pp \rightarrow \Diamond p$	Si p está permitida, es posible.
$Op \rightarrow \Diamond p$	Si p es obligatoria, es posible.

O su formulación deóntica: $O(\Box p \rightarrow Pp)$, $O(\Box p \rightarrow Op)$, $O(Pp \rightarrow \Diamond p)$, $O(Op \rightarrow \Diamond p)$. Adoptar uno u otro es debatible. Formalmente podemos evaluar su validez si definimos su semántica.

Sin entrar en muchas complicaciones, podemos bosquejar lo que es un modelo $M_{T\text{-}DT}$: $\langle \mathbf{M}, R, S, V \rangle$ donde tanto R como S se definen en **M**, es decir, son subconjuntos de **MxM.** Aquellos mundos Mj para los que exista un mundo M_i tal que $M_i S M_j$ son los mundos buenos de **M** (utopías). No necesariamente todo mundo posible es bueno, pero todo mundo bueno es posible. Comprobemos la validez de uno de los nuevos principios:



En M_1 obtenemos que p:1 debido a la reflexividad de la relación de accesibilidad, la serialidad de la permisibilidad nos lleva a considerar el mundo bueno M_2 en él p:0. Pero como todo mundo permisible es accesible, □p:1 del M_1 nos obliga a tener p:1 en M_2, con lo que se produce una contradicción.

Ejercicios

1) Parafrasee en español los principios de esta sección en sus dos versiones. ¿Incorporaría alguno de ellos en una moral universal?

2) Demuestre la validez-T-DT de:

a) $\Box p \rightarrow Pp$

b) $Pp \rightarrow \Diamond p$

c) $Op \rightarrow \Diamond p$

3) Encuentre principios intuitivamente interesantes en otros sistemas (S4-DT, S5-DT, S4-DS4, etc.).

VI-4 Sistema de deducción natural deóntico mínimo (DND)

En el sistema DND aparecen subpruebas marcadas con O similares a las subpruebas marcadas con □. Para generar el sistema DND le añadimos al sistema DN las siguientes reglas:

Regla de reiteración deóntica R-O-D

Si aparece $O\varphi$ se puede ingresar φ en una subprueba marcada con O.

```
  | ⋮
i | Oφ          Hip.
  | ⋮
  | O | ⋮
j |   | φ       i, R-O-D
  |   | ⋮
  | ⋮
```

Regla de introducción de la obligación IO-D

Similar a I□.

$$\begin{array}{l|l}
 & \vdots \\
i & \quad O\,\big|\,\vdots \\
j & \quad\;\;\;\big|\,\varphi \\
 & \vdots \\
 & O\varphi \qquad\qquad\qquad i\text{-}j,\ IO\text{-}D. \\
 & \vdots
\end{array}$$

Como ocurre con su similar I□-T, si en la regla IO al enunciarla no cautelamos, con la introdución de una subprueba marcada, la utilización de pasos previos, podríamos llegar a demostrar $p\rightarrow Op$.

Debemos recalcar que no es válida ni $Op\rightarrow p$ ni $Op \vdash p$. Por tanto, aquellos teoremas del sistema T basados en E□-T no tienen correlato deóntico.

Ejercicios

1) Demostrar los teoremas:

   a) $O(p\rightarrow q)\rightarrow(Op\rightarrow Oq)$
   b) $Op\rightarrow Pp$
   c) $\vdash\varphi$ entonces $\vdash O\varphi$
   d) $O(p\wedge q)\leftrightarrow(Op\wedge Oq)$
   e) $(Op\vee Oq)\rightarrow O(p\vee q)$
   f) $P(p\vee q)\leftrightarrow(Pp\vee Pq)$

g) P(p∧q)→(Pp∧Pq)

h) ⊢φ→ψ entonces ⊢Oφ→ Oψ

VI-5 Sistemas DNDT, DNDS4, DNDS5

VI-5.1 Sistema DNDT

Para obtener este sistema basta con añadir al sistema DND que dentro de una subprueba marcada con O vale Op⊢p. Esto es:

Regla EO-DT

```
  | :
  | O | :
i |   | Oφ
  |   | :
j |   | φ            i,EO-DT
  |   | :
  | :
```

Para aclarar qué entendemos por «dentro de una subprueba marcada con O», probaremos el teorema O(Op→p):

```
1 | O |   | Op       Hip.
  |   |   |‾‾
2 |   |   | p        2,EO-DT
3 |   | Op→p         1,2 I→
4 | O(Op→p)          1-2, IO.
```

Así, el concepto «dentro de una subprueba» engloba a todas las subpruebas relativas a la mencionada.

En DT también vale OOp→Op.

VI-5.2 Sistema DNDS4

Como ocurría en los sistemas T y S4, DNDS4 se obtiene modificando la regla R-O-DT del modo siguiente:

Regla R-O-DS4

Si aparece Oφ se puede ingresar Oφ en una subprueba marcada con O.

```
  | :
i | Oφ        Hip.
  | :
  | O| :
j |  | Oφ     R-O-DS4
  |  | :
  | :
```

Así, se obtiene que la regla IO permite en S4 la repetición de fórmulas obligatorias dentro de la subprueba obligatoria (marcada con O). En este sistema se mantiene la validez de la regla EO al interior de una demostración obligatoria. Es fácil comprobar que el sistema DNDT está incluido en este.

En DNDS4 valen, como era de esperar, OOφ↔Oφ y PPφ↔Pφ.

VI-5.3 Sistema DNDS5

Nuevamente este sistema se obtiene modificando R-O-DS4 para que se permita tanto la repetición de Oφ como de Pφ.

Regla R-O-DS5

```
  | :
i | &φ          Hip.    donde & es cualquier operador
  | :                   deóntico: P u O.
  | O| :
k |  | &φ       i, R-DS5
  |  | :
  | :
```

Ejercicios

1) Demostrar :

a) En DNDS4, OOp↔Op y PPp↔Pp.

b) En DNDS5, Pp↔OPp y Op↔POp.

VI-6 Paradojas

Esperaríamos que después de toda la pena que nos hemos tomado para formalizar las nociones de necesidad y obligatoriedad, que al inicio parecían ajenas a la lógica, ahora nos tocase ya disfrutar los frutos de nuestro esfuerzo. Desgraciadamente, todo indica que en nuestro paraíso se ha infiltrado el demonio de la contradicción.[56] En realidad, no es correcto decir que se ha infiltrado; siempre estuvo ahí, pues desde los primeros sistemas formales de Mally aparecieron resultados cuestionables.[57] Su discusión ha sido fuente de avances en la comprensión de las nociones deónticas. Veamos dos de ellas:

Paradoja de la obligación derivada

Está paradoja aparece con la fórmula válida: $\sim Pp \rightarrow O(p \rightarrow q)$ leída de la siguiente manera. Sea p un hecho prohibido, entonces debe ser que si hago p puedo hacer cualquier cosa. Por ejemplo:

si p: fumo en un lugar público y
q: asesino a José.

Parecería que la lógica deóntica sostuviese que es lógico que si fumo entonces debo matar a José.

En este caso no solo José pondría reparos a la lógica

---

[56] En [33] pueden verse varias y varios modos de superarlas.
[57] Véase [33].

deóntica, sino cualquiera que tuviese esperanzas de lograr una aproximación formal a nuestras nociones intuitivas.

Paradoja de la obligación contraria al deber

Se construye de la siguiente manera. 1) Juan debe ayudar a José a apagar un incendio. 2) Es obligatorio que si Juan ayuda a José a apagar un incendio, le pida permiso. 3) Si Juan no va a ayudar a José, entonces no debe pedirle permiso. 4) Juan no va a ayudar a José. Formalizado:

1) Op
2) $O(p\rightarrow q)$
3) $\sim p\rightarrow O\sim q$
4) $\sim p$.

Como $\models O(p\rightarrow q)\rightarrow(Op\rightarrow Oq)$ de 1 y 2 se sigue Oq.

De 3 y 4 se sigue $O\sim q$.

La contradicción es flagrante.

Una solución a estos problemas obliga a considerar simultáneamente la lógica modal óntica, deóntica y temporal. Daremos una visión rápida del tema empezando con la lógica temporal.

Capítulo VII

Lógica temporal

Otra aplicación importante de la lógica modal se relaciona con el tiempo. Hay diversas maneras de abordar el fenómeno que dan lugar a distintos sistemas.[58] Mostraremos muy rápidamente algunos.

VII-1 Tiempos gramaticales

En esta lectura los operadores modales se transforman en los operadores **G**, **H**, **F** y **P**. Su sintaxis es similar a la de □. Es decir, antepuestos a FBFs originan FBFs. Su lectura y significado intuitivo es:

Gp: Siempre será p ó Siempre ocurrirá p.

Hp: Siempre fue p ó Siempre ocurrió p.

que en la vida diaria no se usan mucho, pero asociados a ellos tenemos:

Fp≈~**G**~p: Alguna vez será p ó alguna vez ocurrirá p.

Pp≈~**H**~p: Alguna vez fue p ó alguna vez ocurrió p.

Recuérdese que «alguna» se entiende como «por lo menos una». De este modo si

p: el perro ladra entonces tenemos:

---

[58] Véase Gardies [42] para un panorama general.

Fp: el perro ladrará.

Pp: el perro ladró.

FPp: el perro habrá ladrado.

No toda combinación de operadores temporales corresponderá a un tiempo verbal, el lector podría investigar algunas correspondencias que le permitan una comprensión intuitiva de los mismos. La semántica de estos operadores es:

VII-1.1 Semántica de los tiempos gramaticales

Sea $\mathbf{M}_t$ un modelo temporal <**M**, R, V>, donde **M** es un conjunto de instantes de tiempo (hablaremos de t_1, t_2 etc en vez de M_1, M_2, etc.) y R la relación **anterior a,** las propiedades de R las veremos luego.

$$V_{Mt}(\mathbf{G}\varphi, t) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } t' \in \mathbf{M} \text{ tal que } tRt' \text{ se tiene } V_{Mt}(\varphi, t')=1 \\ 0 & \text{si para algún } t' \in \mathbf{M} \text{ tal que } tRt' \text{ se tiene } V_{Mt}(\varphi, t')=0 \end{cases}$$

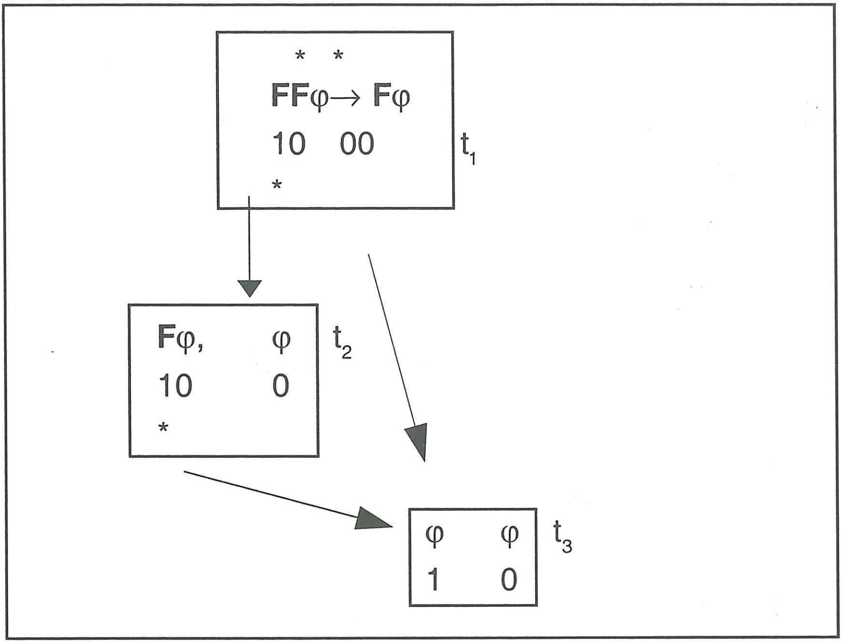
$$V_{Mt}(\mathbf{F}\varphi, t) = \begin{cases} 1 & \text{si para algún } t' \in \mathbf{M} \text{ tal que } tRt' \text{ se tiene } V_{Mt}(\varphi, t')=1 \\ 0 & \text{si para todo } t' \in \mathbf{M} \text{ tal que } tRt' \text{ se tiene } V_{Mt}(\varphi, t')=0 \end{cases}$$

El lector debe formular $V_{Mt}(\mathbf{H}\varphi, t)$ y $V_{Mt}(\mathbf{P}\varphi, t)$.

VII-1.2 Diagramas de los tiempos gramaticales y algunas leyes del modelo

Procederemos a enunciar algunas leyes que valen para **G** y para **F**. Lo haremos al mismo tiempo que iremos precisando las características de R.

$\mathbf{G}(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\mathbf{G}\varphi\rightarrow\mathbf{G}\psi)$ se sigue del hecho de que los instantes posteriores dado R (=anterior a). Mientras que $\mathbf{G}\varphi\rightarrow\varphi$ y $\mathbf{F}\varphi\rightarrow\varphi$ no son válidas pues R no es reflexiva. $\mathbf{G}\varphi\rightarrow\mathbf{GG}\varphi$ y $\mathbf{FF}\varphi\rightarrow\mathbf{F}\varphi$, siguen de la transitividad de R. Comprobémoslo tratando de falsear una de ellas:



En el diagrama en t_1 no podemos determinar el valor de φ, por cuanto R no es reflexiva. t_2 se explica por que en t_1 se requiere de un tiempo posterior en el que $\mathbf{F}\varphi$:1, y como en t_1 $\mathbf{F}\varphi$ vale 0 esto obliga que en todo tiempo futuro φ valga 0. t_3 se origina en que $\mathbf{F}\varphi$:1 en t_2, por lo que en él φ:1. La transitividad, señalada en el diagrama, hace que en t_3 φ:0 lo que produce la contradicción que cierra el diagrama.

La esperada linealidad del tiempo la recoge (dado el orden en que estamos presentando las propiedades) la siguiente FBF:

$$(\mathbf{F}\varphi\wedge\mathbf{F}\psi)\rightarrow[\mathbf{F}(\varphi\wedge\mathbf{F}\psi)\vee\mathbf{F}(\varphi\wedge\psi)\vee\mathbf{F}(\mathbf{F}\varphi\wedge\psi)] \qquad (1)$$

Por linealidad entendemos que, dados tres instantes distintos de tiempo, uno está entre los otros dos. No puede ocurrir que siendo t_1 anterior a t_2 y a t_3, no sea t_2 anterior a t_3 o t_3 anterior a t_2 (si son diferentes),i.e. no puede ocurrir:

$$\begin{tikzcd} & t_2 \\ t_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & t_3 \end{tikzcd}$$

Si suponemos el antecedente de (1) verdadero tendremos que en t_1 $\mathbf{F}\varphi$:1 y $\mathbf{F}\psi$:1. Luego hay un tiempo t_2 en que φ:1 y un tiempo t_3 en que ψ:1. Caben tres casos:

a- Si t_2 es anterior a t_3 ocurrirá que en t_2 vale $\varphi\wedge\mathbf{F}\psi$:1, por lo que en t_1 es verdadero $\mathbf{F}(\varphi\wedge\mathbf{F}\psi)$, y por tanto todo el consecuente de (1).

b- Si t_2 y t_3 son el mismo instante, en él $\varphi\wedge\psi$:1, y por tanto en t_1 es verdadero $\mathbf{F}(\varphi\wedge\psi)$ y en consecuencia todo el consecuente de (1).

c- es simétrico a *a-*

luego (1) no es falseable.

La infinidad del tiempo hacia el futuro está reflejada en la FBF:

$$\mathbf{G}\varphi \rightarrow \mathbf{F}\varphi$$

Pues solo es falseable en el último instante de tiempo. R es una relación que siempre tiene un punto de llegada, nunca termina. Este tipo de característica se denomina, como vimos en la lógica deóntica, serial; R es una relación serial.

Densidad del tiempo: entre dos instantes de tiempo siempre hay otro caracterizado por:

$$\mathbf{GG}\varphi \rightarrow \mathbf{G}\varphi$$

Pues esta fórmula puede ser falsa si en un instante t_1 ocurre $\mathbf{GG}\varphi{:}1$ y $\mathbf{G}\varphi{:}0$, como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{GG}\varphi{:}1 & \mathbf{G}\varphi{:}1 & \varphi{:}1 & \varphi{:}1 & \\
t_1 \arrow[r] & t_2 \arrow[r] & t_3 \arrow[r] & \ldots t_n \arrow[r] & \ldots \\
\mathbf{G}\varphi{:}0 & \varphi{:}0 & & &
\end{tikzcd}$$

Esto es posible porque entre t_1 y t_2 no cabe un instante intermedio; si cupiese entonces nunca se tendría $V_{Mt}(\mathbf{G}\varphi, t_1)=0$.

En resumen, R es una relación transitiva, lineal, serial y densa. Esta caracterización del tiempo correspondería bien con nuestra intuición de lo que es la flecha del tiempo, si además de denso este fuera continuo (sin agujeros), como lo es la recta de los números reales. La fórmula que caracterizaría a R como continua escapa al alcance de nuestro texto.[59]

Ejercicios

1) Simbolizar, discutiendo las diversas posibilidades:

   a) Siempre estudio lógica

   b) Siempre estudiaré lógica

   c) Si hubiese estudiado lógica nunca habría caído en el error esencialista.

   d) Alguna vez cometeré un pecado y luego no podré ya más tirar la primera piedra.

2) Decidir qué fórmulas son válidas en el modelo de tiempo gramatical.

   a) $p \to \mathbf{HF}p$
   b) $p \to \mathbf{GP}p$
   c) $p \to \mathbf{HP}p$
   d) $\mathbf{P}p \to \mathbf{GP}p$
   e) $\mathbf{P}p \to \mathbf{PF}p$
   f) $\mathbf{F}p \to \mathbf{G}(\mathbf{P}p \vee p \vee \mathbf{F}p)$

3) Traduzca al castellano: (clave p: Yo estudio lógica).

---

[59] Véase Gardies [42] cap. 3.

a) $\mathbf{F}p$
b) $\mathbf{P}p$
c) $\mathbf{FP}p$
d) $\mathbf{PF}p$
e) $\mathbf{HF}p$
f) $\mathbf{GP}p$

4) Si p: como una manzana y q: estoy satisfecho, traduzca al castellano:

a) Fp b) FPp c) PGq d) $Pp \rightarrow G{\sim}q$ e) $GPq \rightarrow {\sim}Fp$

VII-2 Lógica temporal de pseudofechas

En este sistema el tiempo es tratado de una manera discreta, como lo hacemos cuando pensamos en los días o las horas.

$\mathbf{F}_n p$: p será despues del lapso n o dentro de n ocurrirá p.

$\mathbf{P}_n p$: p fue antes del lapso n o hace n ocurrió p.

De esta forma pueden analizarse las referencias temporales como mañana, ayer, dentro de un mes, etc. Solo resaltaremos que acá:

$\mathbf{G}_n p \approx {\sim}\mathbf{F}_n {\sim}p \approx \mathbf{F}_n p$ y $\mathbf{H}_n p \approx {\sim}\mathbf{P}_n {\sim}p \approx \mathbf{P}_n p$

Es importante señalar, como lo hace Bailhache,[60] que en estas fórmulas se habla del futuro (único) después de n y no

---

[60] Véase Bailhache [7] cap. II.

de un futuro posible dentro de n (múltiple). Y por eso vale:

$$\mathbf{F}_n p \rightarrow \mathbf{G}_n p$$

VII-3 Lógica temporal de fechas

Otra aproximación al fenómeno temporal requiere del uso de fechas. Ahora t es el nombre de un instante específico:

$R_t p$: Ocurre en t que p ó en t se realiza p.

Podemos señalar como sus propiedades más saltantes las siguientes:

$R_t(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (R_t\varphi \rightarrow R_t\psi)$	
$R_t\varphi \leftrightarrow \sim R_t \sim \varphi$	Infinidad del tiempo y realidad del tiempo.
$R_{t'}R_t\varphi \leftrightarrow R_t\varphi$	Transparencia de las fechas u omnitemporalidad de la verdad.
Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash R_t\varphi$	Lo válido lo es siempre.
Si $\vdash R_t\varphi$ entonces $\vdash \varphi$	(Si φ no depende de t, i.e. si t no está libre en φ.). Lo que es válido en un momento, es válido.

En estos casos, generalmente t se toma como una variable en la recta de los números reales.

Ejercicios

1) Formule la noción de modelo y la valuación correspondiente de sus operadores para:

a) el modelo de pseudofechas.

b) el modelo de fechas.

2) Analice cómo se comporta R_t con un operador proposicional. Es decir, si * es un operador proposicional: ¿$R_t(p*q) \rightarrow (R_tp*R_tq)$ es válida? ¿Lo es $R_t{\sim}p \rightarrow {\sim}R_tp$?, ¿Qué ocurre con sus conversas?.

VII-4 Relación entre los modelos temporales

Como es de esperarse los modelos pueden interpretarse uno en el otro con pequeños añadidos. Para esto necesitamos la constante μ definida como:

μ: ahora, (un instante particular)

y el relator: <

t<t': t es anterior a t', así como de la cuantificación sobre los intervalos de tiempo n

Con esto podemos dar las equivalencias:

$\mathbf{G}\varphi \approx (\forall n)\ \mathbf{G}_n\varphi \approx (\forall n)\ \mathbf{F}_n\varphi$ con $n>0$

$\mathbf{G}\varphi \approx (\forall t)\ (\mu < t \rightarrow R_t\varphi)$

Ejercicios

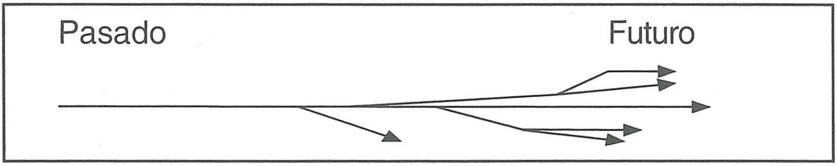
1) Dé la lista de todas las equivalencias entre los operadores de los distintos sistemas temporales.

Capítulo VIII

Lógica modal óntica, temporal y deóntica

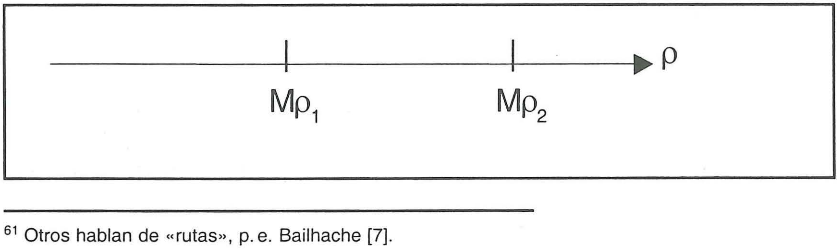
VIII-1 Modelos occamistas M_{oc}: sus características

En estos modelos consideraremos al tiempo como una flecha que se ramifica hacia el futuro.



Desde un pasado común, el tiempo se ramifica hacia el futuro, hacia futuros posibles. Pero, aclaremos, que esos tiempos futuros no todos son reales, solo uno lo es: el que ocurre realmente, los otros son solo posibles.

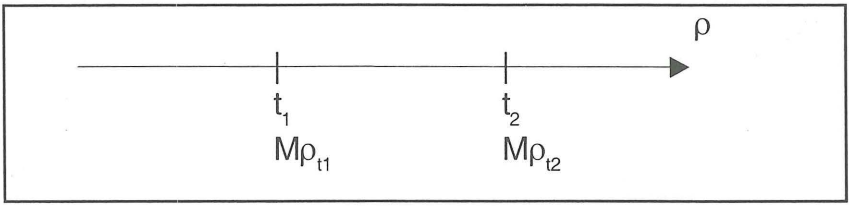
La idea es integrar en una sola teoría la lógica del tiempo de fechas, más la lógica deóntica y la lógica modal óntica. Para hacer esto, consideraremos que cada punto de una flecha del tiempo, que llamaremos «historia»,[61] es un mundo posible. Así, si solo consideramos una historia ρ con dos mundos en ella, por ejemplo:



---

[61] Otros hablan de «rutas», p. e. Bailhache [7].

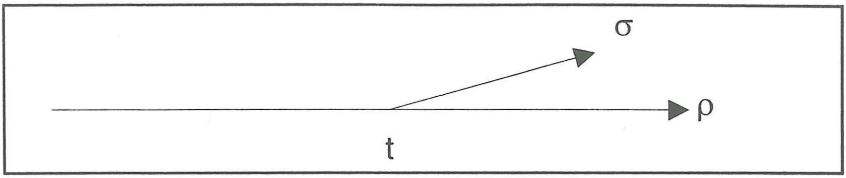
La relación entre $M\rho_1$ y $M\rho_2$ será intuitivamente la de posterioridad (anterioridad). En estos modelos es preferible hablar de instantes t_1 y t_2 y de los mundos de esos instantes de la historia en cuestión:



Al contemplar la posibilidad de distintas alternativas en el futuro, aparece de manera natural la noción de mundos posibles como los instantes de esas historias futuras. Y al considerar varias historias aparece la ramificación de historias y con ella una relación entre historias (no entre mundos). Esta relación entre historias se llama relación de accesibilidad entre historias y la designaremos con **R**. Así, $\mathbf{R}_t\rho\sigma$ dice que la historia σ es accesible desde la historia ρ en el instante t. Intuitivamente queremos decir que el futuro representado por la historia σ es asequible a un mundo de la historia ρ en el instante t. Es una relación triádica. Si **T** es el conjunto de instantes de tiempo y **H** el conjunto de historias entonces:

$$\mathbf{R} \subseteq T \text{ x } \mathbf{H} \text{ x } \mathbf{H}$$

Para entender y precisar la accesibilidad entre historias es bueno definir la noción de divergencia entre historias. Por ejemplo, en el diagrama:



se tiene que las historias σ y ρ divergen en el instante t. Es decir, σ y ρ están confundidas (o son la misma historia) antes de t. Luego podemos decir:

Divergencia de historias

Dos historias σ y ρ distintas se dice que divergen en un instante t si todo mundo de σ anterior a t es también un mundo ρ. Es decir:

$$(\forall t')\ [t'<t \rightarrow M\rho_{t'} = M\sigma_{t'}] \qquad y \quad \sigma \neq \rho$$

En consecuencia, si dos historias divergen en t, son mutuamente accesibles en todo instante anterior.

La relación de accesibilidad entre historias tiene las siguientes propiedades:

Reflexividad de historias

Para cualquier historia ρ y cualquier instante t: $\mathbf{R}_t\rho\rho$

Pues es obvio que una historia tiene todos sus mundos idénticos a sí mismos en todo instante. Llamamos reflexiva a esta propiedad a pesar de que, siendo triádica, no lo es propiamente; la que es reflexiva es $\mathbf{R}_t$, la accesibilidad en un instante dado, pero el abuso del lenguaje nos parece justificado y aparecerá en las otras propiedades.

Simetría de historias

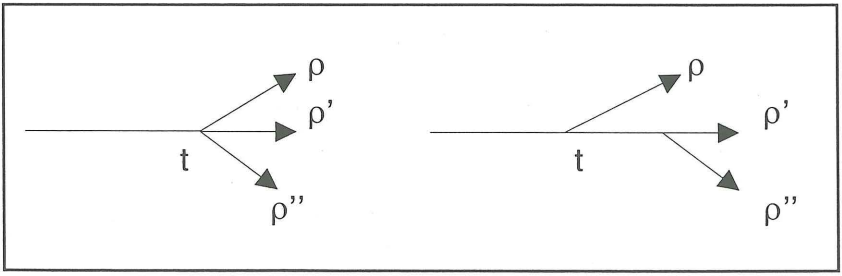
Para cualesquiera instante t e historias ρ, ρ' $\mathbf{R}_t\rho\rho' \leftrightarrow \mathbf{R}_t\rho'\rho$

Pues siendo los mundos anteriores a t idénticos en ambas historias la simetría de la identidad se refleja en la accesibilidad en un momento dado.

Transitividad de historias

$(\forall t, \rho, \rho', \rho'')\{ [\mathbf{R}_t\rho\rho' \wedge \mathbf{R}_t\rho'\rho''] \rightarrow \mathbf{R}_t\rho\rho'' \}$[62]

Que se ejemplifica en cada uno de los siguientes diagramas:



Ramificación de historias

$(\forall t,t',\rho, \rho') \quad [t'<t \wedge \mathbf{R}_t\rho\rho'] \rightarrow \mathbf{R}_{t'}\rho\rho'$

Es decir, dos historias accesibles en un instante t son accesibles en todo instante anterior.

En este modelo de historias con la relación de accesibilidad podemos evaluar proposiciones con operadores modales ónticos y temporales; solo nos falta incorporar los deónticos.

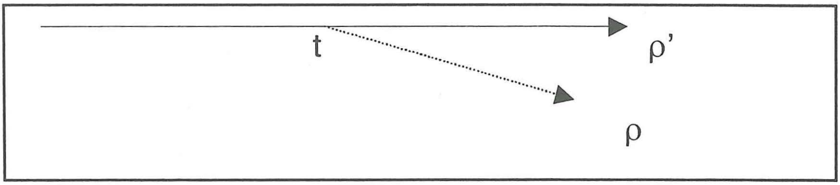
---

[62] '$(\forall b_1, b_2, \ldots, b_n)\varphi$' abrevia '$(\forall b_1)(\forall b_2)\ldots(\forall b_n)\varphi$'.

Esto lo haremos de modo similar a como lo hicimos en los modelos kripkeanos. Allí teníamos mundos utópicos, ahora tendremos historias utópicas (¿fin de la historia?). En nuestro modelo, una historia utópica seguirá siéndolo hacia el futuro y definiremos una relación de permisibilidad entre historias.

Relación de permisibilidad entre historias

Una historia ρ es permisible para otra ρ' en un instante t si ρ y ρ' divergen en t y ρ es una historia utópica. Escribimos $\mathbf{S}_t\rho'\rho$



Señalaremos las historias utópicas con trazos punteados. Las siguientes propiedades son inmediatas:

Serialidad de historias

$(\forall t,\rho)\ (\exists\rho')\ \mathbf{S}_t\rho\rho'$

Post-reflexividad de la permisibilidad de historias

$(\forall t,\rho)(\exists\rho')\ (\mathbf{S}_t\rho'\rho \rightarrow \mathbf{S}_t\rho\rho)$.

Post-ramificación de la permisibilidad de historias

$(\forall t,t',\rho,\rho',\rho'')\ [\ (t' \leq t\ \wedge \mathbf{S}_{t'}\rho\rho' \wedge \mathbf{S}_t\rho'\rho'') \rightarrow \mathbf{S}_{t'}\rho\rho''\ ]$

Implicación S-R

$(\forall t,\rho,\rho')\ [\mathbf{S}_t\rho\rho' \rightarrow \mathbf{R}_t\rho\rho'\ ]$

Post-implicación R-S

$(\forall t,t',\rho,\rho',\rho'')\ [\ (t' \leq t\ \wedge \mathbf{S}_{t'}\rho\rho' \wedge \mathbf{R}_t\rho'\rho'') \rightarrow \mathbf{S}_t\rho'\rho''\ ]$

Trataremos de ordenar un poco lo visto hasta aquí, pero antes realicemos algunos ejercicios.

Ejercicios

1) Traducir en palabras las relaciones **R** y **S**.
2) Al salir Colón del puerto de Palos en 1492 había algunas historias (posibilidades) que se podían considerar:

ρ: la que ocurrió (descubrir América... hasta nosotros ...)

ρ': la que se inicia con la destrucción de sus navíos por un monstruo marino.

Defina Ud. otras y trate de interpretar en ellas las relaciones de accesibilidad y permisibilidad entre historias, así como sus propiedades.

VIII-1.2 Modelo occamista óntico, temporal y deóntico $M_{OC\text{-}D}$

Para un lenguaje proposicional al que se le han añadido los operadores:

$R_t\varphi$: φ ocurre en el instante t.

$\Box\varphi$: φ es necesario. $\Diamond\varphi$: φ es posible

$O\varphi$: φ debe ser. Pp: φ está permitido.

El modelo es $M_{OC\text{-}D}$ = < **H**, **R**, **S**, V>, donde:

H: es un conjunto de historias. {ρ/ ρ es una historia} (a veces usaremos σ), además debe tenerse en cuenta que:

Cada historia ρ es un conjunto de mundos:

ρ= { $M\rho_t$ / $M\rho_t$ es un mundo de la historia ρ en el instante t}

t es una fecha y pertenece al conjunto de fechas T (números reales en la práctica).

R : es la relación de accesibilidad entre historias en cualquier instante t, cuyas propiedades hemos visto antes.

S : es la relación de permisibilidad entre historias en cualquier instante t, cuyas propiedades hemos visto antes.

V es la función de valuación en un mundo de una historia en un momento para el modelo considerado.

$V(\sim\varphi, M\rho_t)$, $V(\varphi\wedge\psi, M\rho_t)$, $V(\varphi\vee\psi, M\rho_t)$, $V(\varphi\rightarrow\psi, M\rho_t)$, $V(\varphi\leftrightarrow\psi, M\rho_t)$ se definen de la manera usual. En lo que sigue t y t´ son instantes de tiempo no necesariamente distintos:

$$V(R_t\varphi, M\rho_{t'})= \begin{cases} 1 & \text{si } V(\varphi, M\rho_t)=1 \\ 0 & \text{si } V(\varphi, M\rho_t)=0 \end{cases}$$

$$V(\Box\varphi, M\sigma_t)= \begin{cases} 1 & \text{si } V(\varphi, M\rho_t)=1,\ \forall\rho\in \mathbf{H} \text{ tal que } \mathbf{R}_t\sigma\rho \\ 0 & \text{si } V(\varphi, M\rho_t)=0,\ \exists\rho\in \mathbf{H} \text{ tal que } \mathbf{R}_t\sigma\rho \end{cases}$$

$$V(O\varphi, M\sigma_t)= \begin{cases} 1 \ \text{si } V(\varphi, M\rho_t)=1, \ \forall\rho\in \mathbf{H} \text{ tal que } \mathbf{S}_t\sigma\rho. \\ \\ 0 \ \text{si } V(\varphi, M\rho_t)=0, \ \exists\rho\in \mathbf{H} \text{ tal que } \mathbf{S}_t\sigma\rho. \end{cases}$$

A modo de ejemplo, veamos qué ocurre en este modelo con nuestras paradojas. Primero debemos de reformularlas con los recursos del nuevo lenguaje.

A) Paradoja de la obligación derivada: solución

Decíamos en VI-6 al presentar la paradoja que usaríamos:

p: fumo en un lugar público y

q: asesino a José.

Ahora debemos añadir los tiempos t''<t'<t. Con lo que la simbolización tomando en cuenta el factor temporal es:

$$R_{t''}OR_{t'}{\sim}p \rightarrow R_{t''}\, O(R_{t'}p{\rightarrow}R_tq)$$

Que es una expresión válida en nuestros modelos $M_{OC\text{-}D}$

Simbolizada así, temporalmente, la expresión pierde su veneno lógico; pues, como ${\sim}R_tp \approx \Box\Box R_t{\sim}p$, si en t'' ocurre que es obligatorio $R_{t'}{\sim}p$ entonces en ese momento es obligatorio ${\sim}R_{t'}p$. Y por tanto su disyunción con cualquier proposición como ${\sim}R_{t'}p{\vee}R_tq$ también es obligatoria. De donde sigue $R_{t'}p{\rightarrow}R_tq$. Pero esta última proposición no es obligatoria en t' sino en t''; pues no debemos confundir el hecho de que una proposición sea obligatoria en un momento con el hecho de que deba ser obligatoria en todo momento posterior. Es decir, la paradoja solo aparece al establecer idealmente la prohibición, solo vale en la ruta utópica en que no va a ocurrir su violación. Si posteriormente, en la ruta real, violamos la prohibición, ya no es obligatorio $R_{t'}p \rightarrow R_t q$. Por tanto, no se sigue que sea obligatorio al momento de fumar (t') que deba matar a José. En este caso, José no pondría reparos a la lógica deóntica, sino solo al humo del cigarrillo.[63]

B) Paradoja de la obligación contraria al deber: solución

Los enunciados. 1) Juan debe ayudar a José a apagar un incendio. 2) Es obligatorio que si Juan ayuda a José a apagar un incendio, le pida permiso. 3) Si Juan no va a ayudar a José, entonces no debe pedirle permiso. 4) Juan no va a ayudar a José. Al simbolizarlos tomando en cuenta el factor temporal:

1) $R_{t''}$ Op, para todo t''
2) $R_{t''}$ $O(p \rightarrow q)$, para todo t''
3) $R_{t'} \sim p \rightarrow OR_t \sim q$, con $t'<t$ (la obligación q es posterior a p).
4) $R_{t'} \sim p$.

Con lo que la paradoja desaparece: en t'' cuando se da la obligación absoluta Op, vale también Oq. Pero al violarse la norma en t', lo que vale después es la reparación de la misma. Este tema encierra numerosas complicaciones y sutilezas que

---

[63] Otros análisis pueden verse en [19] y en [57].

no estamos discutiendo aquí,[64] pero cuyo análisis muestra la potencialidad y la necesidad de la lógica deóntica.

Esperamos que estas páginas sirvan para que el lector medite acerca del lugar central que ocupa la lógica en la reflexión filosófica, tal como lo señaló Aristóteles hace más de 2,300 años. Si creemos que en la filosofía la razón no debe cederle el paso a la pasión, estaremos de acuerdo con Aristóteles. Y en esta perspectiva la lógica modal en sus distintas interpretaciones parece ser un instrumento indispensable al filósofo.

---

[64] Por ejemplo [8] y [57].

Bibliografía

[1] ALCHOURRÓN, Carlos E. (ed.). *Lógica.* en *Enciclopedia iberoamericana de filosofía.* vol. 7. Madrid: Editorial Trotta, 1995.

[2] ______________________. y Eugenio BULYGIN. «La clausura de sistemas normativos y el postulado de la plenitud hermética del derecho». En [20].

[3] ALEXY, Robert. *Teoría de la argumentación jurídica, la teoría del discurso racional como teoría de la fundamentación jurídica.* Madrid: Centro de Estudios Constitucionales, 1997.

[4] ANDERSON, John M. y Henry W. Jr. JOHNSTONE. *Natural Deduction The Logical Basis of Axioms Systems.* Belmont: Wadsworth Publishing Company, 1962.

[5] ARISTÓTELES. *Metafísica de Aristóteles.* Madrid: Gredos, 1970.

[6] ______________. *Organon: I Catégories. II De l'interprétation. III Les premiers analytiques. IV Les seconds analytiques. V les topiques. VI Les réfutations sophistiques.* París: Tricot, 1977.

[7] BAILHACHE, Patrice. *Essai de logique déontique.* París: Librairie Philosophique J. Vrin, 1991.

[8] __________________. *Les normes dans le temps et sur l'action, essai de logique déontique.* 2 vol. Nantes: Université de Nantes, 1986.

[9] BARCAN MARCUS, Ruth. *Modalities: philosophical essays.* Oxford: Oxford University Press, 1993.

[10] ______________________. «Extensionality». En [81].

[11] BLANCHÉ, Robert. *Introduction a la logique contemporaine.* París: Armand Colin, 1968.

[12] __________________. *L´axiomatique.* París: PUF, 1970.

[13] __________________. *Structures intelectuelles: essai sur l'organisation systématique des concepts.* París: Vrin, 1969.

[14] __________________. «Sur la trivalence». En *Logique et analyse, nouvelle serie,* 59-60, septiembre-diciembre 1972.

[15] BOCHEÑSKI, I. M. *Historia de la lógica formal.* Madrid: Gredos,1966.

[16] BOUDOT, Maurice. «Temps, nécesité et prédétermination». En *Les études philosophiques*, octubre-diciembre 1973, N.4

[17] BRADLEY, Raymond y Norman SWARTZ. *Possible worlds an introduction to logic and its philosophy.* Oxford: Basil Blackwell, 1979.

[18] CARROLL, Lewis. «Las Aventuras de Alicia en el país de las Maravillas». En [43].

[19] CASTAÑEDA, Héctor-Neri. «Las paradojas de la lógica deóntica: la solución más simple para todas y de un solo golpe». En [20].

[20] C.E.L.I.J.S. UNIVERSIDAD DE CARABOBO. *Antología de la lógica en América Latina.* Madrid: Fundación Banco Exterior, 1988.

[21] CERVANTES, Miguel de. *El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha.* Madrid, 1608, ed. facsimilar.

[22] CHELLAS, Brian. *Modal logic: an introduction.* Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[23] DEAÑO, Alfredo. *El resto no es silencio: escritos filosóficos.* Madrid: Taurus, 1983.

[24] ______________. *Las concepciones de la lógica.* Madrid: Taurus, 1980.

[25] ECHAVE, Delia Teresa; URQUIJO María Eugenia y Ricardo GUIBOURG. *Lógica, proposición y norma.* Buenos Aires: Astrea, 1995.

[26] ELSTER, Jon. *Lógica y sociedad.* Barcelona: Gedisa, 1994.

[27] ENGEL, Pascal. *Identité et référence: la théorie des noms propres chez Frege et Kripke.* Paris: PENS, 1985.

[28] ERNST, Bruno. *L'aventure des figures impossibles.* Colonia: Taschen, 1990.

[29] ESPARZA, Jesús. «La formalización de lo normativo». En [20].

[30] FITCH, Frederic Brenton. *Symbolic logic: an introduction.* Nueva York: The Ronald Press Company, 1952.

[31] FONDATION SINGER-POLIGNAC. *Mérites et limites des méthodes logiques en philosophie: colloque international organisé par la Fondation Singer-Polignac en juin 1984.* París: Vrin, 1986.

[32] FREGE, Gottlob. *Los fundamentos de la aritmética, investigación lógico-matemática sobre el concepto de número.* Barcelona: Laia, 1972.

[33] FØLLESDAL, Dagfinn y Risto HILPINEN. «Deontic logic: an introduction». En [54].

[34] FUENTES, Miguel-Humberto. *Lógica modal proposicional: el sistema T.* Versión mecanografiada.

[35] ________________________. «Los sistemas modales S4, B, S5 y MH». Versión mecanografiada.

[36] GABBAY, D. y F. GUENTHNER. *Handbook of philosophical logic.* vol I: *Elements of classical logic.* 1983; vol II: *Extensions of classical logic.* 1984; vol III: *Alternatives of classical logic.* 1986; vol IV: *Topics in the philosophy of language.* Dordrecht: Reidel, 1989.

[37] GAMUT, L. T. F. *Logic, language and meaning.* 2 vol. Chicago: University of Chicago Press, 1991.

[38] GARCÍA BELAUNDE, Domingo. «América latina y los orígenes de la lógica jurídica». Revista de la Facultad de Derecho de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 50, diciembre 1996.

[39] GARCÍA MAYNEZ, Eduardo. «Los axiomas de la ontología formal del derecho». En [20].

[40] GARDIES, Jean-Louis. *Essai sur la logique des modalités.* París: Puf, 1979.

[41] __________________. *Les fondements sémantiques du discours naturel.* París: Vrin, 1994.

[42] __________________. *Lógica del tiempo.* Madrid: Paraninfo, 1979.

[43] GARDNER, Martin (ed.) *Alicia anotada.* Madrid: Akal editor, 1984.

[44] GARRIDO, Manuel (ed.). *Lógica y lenguaje.* Madrid: Tecnos, 1989.

[45] GARSON, James W. «Quantification in modal logic». En [36] vol II.

[46] GIL, Fernando. *Preuves.* París: Aubier, 1988.

[47] GOCHET, Paul. *Quine en perspective: essai de philosophie comparée.* París: Flammarion, 1978.

[48] GOLDBLATT, Robert. *Logics of time and computation.* Stanford: Center for the study of language and information, 1992.

[49] GRACIA, Jorge J.E.; RABOSSI, Eduardo; VILLANUEVA, Enrique y Marcelo DASCAL. *El análisis filosófico en América Latina.* México: Fondo de Cultura Económica, 1985.

[50] GRANGER, Gilles-gaston. *Le probable, le possible et le virtuel: essai sur le rôle du non-actuel dans la pensée objective.* París: Editions Odile Jacob, 1995.

[51] HAACK, Susan. *Deviant logic, fuzzy logic: beyond the formalism.* Chicago: University of Chicago Press, 1996.

[52] ____________. *Filosofía de las lógicas.* Madrid: Cátedra, 1982.

[53] ____________. *Lógica divergente.* Madrid: Paraninfo, 1980.

[54] HILPINEN, Risto (ed.). *Deontic logic: introductory and systematic readings.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1971.

[55] __________________. *New studies in deontic logic, Norms, actions, and the Foundations of Ethics.* Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1981.

[56] HINTIKKA, Jaakko. *Fondements d'une théorie du langage.* París: PUF, 1994.

[57] ________________. *Some main problems of deontic logic.* En [54].

[58] ________________. *L'intentionnalité et les mondes possibles.* Arras: Presses Universitaires de Lille, 1989.

[59] ________________. *Lógica, juegos de lenguaje e información: temas kantianos de filosofía de la lógica.* Madrid: Tecnos, 1976.

[60] ________________. *Saber y creer: una introducción a la lógica de las dos nociones.* Madrid: Tecnos, 1979.

[61] HUGHES, G. E. y M. J. CRESSWELL. *A companion to modal logic.* Londres: Methuen, 1984.

[62] ____________________________. *A new introduction to modal logic.* Londres: Routledge, 1996.

[63] ____________________________. *Introducción a la lógica modal.* Madrid: Tecnos, 1973.

[64] HUSSERL, Edmundo. *Investigaciones lógicas.* Madrid: Revista de Occidente, 1967, 2 vol.

[65] JANSANA, Ramón. *Una introducción a la lógica modal.* Madrid: Tecnos, 1990.

[66] KALINOWSKI, Georges. *Lógica del discurso normativo.* Madrid: Tecnos, 1975.

[67] KAPLAN, David. «Quantifying in». En [81] traducido en [87].

[68] KNEALE, William y Martha KNEALE. *El desarrollo de la lógica.* Madrid: Tecnos, 1972.

[69] KNUUTTILA, Simo. *Modalities in medieval philosophy.* London: Routledge, 1993.

[70] ________________. «Modal logic». En [72].

[71] KONYNDYK, Kenneth. *Introductory modal logic.* Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1986.

[72] KRETZMANN, Norman; KENNY, Anthony y Jan PINBORG (ed). *The Cambridge history of later medieval philosophy: from rediscovery of Aristotle to the disintegration of scholasticism 1100-1600.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[73] KRIPKE, Saul. «Semantical analysis of modal logic I normal modal propositional calculi». *Zeitschrift für mathematical logik und grundlagen der math.* Bd. 9, S.67-96 (1963).

[74] ____________. «Semantical considerations on modal logic». En [81].

[75] ____________. «Identity and necessity». En [101] traducido en [109].

[76] ____________. *Naming and necessity.* Cambridge: Harvard University Press, 1980.

[77] LAERCIO, Diógenes. «Vidas opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres». En *Biografos griegos.* Madrid: Aguilar, 1964.

[78] LEWIS, David. *Counterfactuals.* Oxford: Basil Blackwell, 1986.

[79] ____________. *On the plurality of worlds.* Oxford: Basil Blackwell, 1986.

[80] ____________. *Philosophical papers.* 2 vol. Nueva York: Oxford University Press, 1986.

[81] LINSKY, Leonard (ed.). *Reference and modality.* Oxford: Oxford University Press, 1971.

[82] __________________. «Reference, essentialism, and modality». En [81].

[83] McCULLOCH, Gregory. *The game of the name: introducing logic, language, and mind.* Londres: Clarendon Press, 1989.

[84] MINTS, Grigori. *A short introduction to modal logic.* Stanford: CSLI, 1992.

[85] MIRÓ QUESADA C., Francisco. *Ensayos de filosofía del derecho.* Lima: Universidad de Lima, 1986.

[86] MORO, Tomás. «Utopía». En *Utopías del renacimiento.* México: Fondo de Cultura Económica, 1966.

[87] MORO SIMPSON, Thomas (ed.). *Semántica filosófica: problemas y discusiones.* Buenos Aires: Siglo Veintiuno ed., 1973.

[88] NUBIOLA, Jaime. *El compromiso esencialista de la lógica modal: estudio de Quine y Kripke.* Navarra: EUNSA, 1984.

[89] PLANTINGA, Alvin. *The nature of necessity.* Oxford: Clarendon Press, 1982.

[90] PRIOR, Arthur N. *Papers on time and tense.* Oxford: Clarendon Press, 1968.

[91] QUESADA, Daniel. *La lógica y su filosofía: introducción a la lógica.* Barcelona: Barcanova, 1985.

[92] QUINE, Willard V. O. «Reference and Modality». En [81].

[93] __________________. «Three grades of modal involvement». En [95].

[94] ________________. *Ontological relativity and others essays.* Nueva York: Columbia University Press, 1969.

[95] ________________. *The ways of paradox and others essays.* Cambridge: Harvard University Press, 1976.

[96] ________________. *Desde un punto de vista lógico.* Barcelona: Ariel, 1962.

[97] ________________. *Filosofía de la lógica.* Madrid: Alianza Universidad, 1973.

[98] ________________. *Palabra y objeto.* Barcelona: Labor, 1968.

[99] ________________. «Notas sobre existencia y necesidad». En [87].

[100] SCHREIBER, Rupert. *Lógica del derecho.* México: Biblioteca de Ética, Filosofía del Derecho y Política, 1995.

[101] SCHWARTZ, Stephen. *Naming, necessity and natural kinds.* Ithaca: Cornell University Press, 1977.

[102] SHER, G.Y. «Did Tarski Commit "Tarski's fallacy"?». En *The Journal of Symbolic Logic,* vol 61, 2, junio 1996.

[103] SINNOTT-ARMSTRONG, Walter (ed.). *Modality, morality and belief: essays in honor of Ruth Barcan Marcus.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[104] SMULLYAN, Arthur. «Modality and description». En [81].

[105] TALLET, J. A. *The possible universe.* Houston: Publitex, 1990.

[106] TARSKI, Alfred. *Logique sémantique et métamathématique 1923-1944.* París: Armand Colin, T1 1972, T2 1974.

[107] TARSKI, Alfred. «Le concept de vérité dans les langages formalisés». En [106].

[108] TRELLES, Oscar y Diógenes ROSALES. *Introducción a la lógica.* Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2000.

[109] VALDÉS VILLANUEVA, Luis M. L. (ed). *La búsqueda del significado: lecturas de filosofía del lenguaje.* Madrid: Tecnos, 1991.

[110] Van BENTHEM, Johan. *A manual of intensional logic.* Stanford: CSLI, 1988.

[111] VERNENGO, Roberto J. *La interpretación literal de la ley.* Buenos Aires: Abeledo-Perrot, 1994.

[112] ____________________. «Teoría general del derecho y ciencia jurídica». En [49].

[113] Von WRIGHT, Georg Henrik. *Ensayo de lógica modal.* Buenos Aires: Santiago Rueda, 1970.

[114] _________________________. *Norma y acción. Una investigación lógica.* Madrid: Tecnos, 1979.

[115] VUILLEMIN, Jules. *Nécessité ou contingence l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques.* Alençon: Les Editions de Minuit, 1984.

[116] WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus.* Madrid: Alianza Editorial, 1973.

Índice de temas

∇, 41
Δ, 41
◊, 40
□, 41
M_D, 180
M_{D+T}, 165
<**M**, R, D, Q, i>, 165
<**M**, R, V>, 65
M_{oc}, 209
$M_{oc\text{-}D}$, 212
M_{S4}, 90
M_{S5}, 95
M_t, 198
M_T, 65
M_{T+FB}, 152
$M_{T\text{-}DT}$, 187
$||\alpha,M_i||_M g$, 167
$||\alpha||_M g$, 154
<M, R, D, i>, 152
<**M**,R,S,V>, 187
<**M**,S,V>, 180
Adición, 99
Adjunción, 99
ariedad del predicado, 124
asignaciones, 152
Cierre de diagrama T, 89
conjunto de mundos, 65
constantes individuales, 123
contextos opacos, 142
contextos puramente
  referenciales, 142
D, 152
De Dicto, 131
De Morgan, 100
De Re, 130
Def.◊, 100
Def.→, 100
Def.≡, 100
designador rígido, 149
Diagramas de los tiempos
  gramaticales, 199
Diagramas S4, 91
Diagramas S5, 96
Diagramas T, 75
Divergencia de historias, 209
DM, 100
DN, 99
DNC+S4, 174
DNC+S5, 174
DND, 189
DNDT, 191
DNP, 100
DNS4, 116
DNS5, 119
DNT, 100
Doble Negación, 99
Dominio de individuos, 152
E□, 101
E◊, 110
E→, E∧, 99
E∨, E↔, E~, 100
E∀, 171
E∃, 172
EO-DT, 191
Extensión, 141
F, 197

FB, 127

$\mathbf{F}_n$, 203

fórmula abierta, 126

Fórmula Barcan, 127

fórmula cerrada, 126

fórmulas atómicas, 124

Función de interpretación, 152

$\mathbf{G}$, 197

$\mathbf{G}_n$, 203

$\mathbf{H}$, 197

Hexágono de Blanché, 47

historia, 207

$\mathbf{H}_n$, 199

I$\exists$, 172

I$\forall$, 173

IO-D, 190

I , 103

I$\Diamond$, 109

I$\wedge$, I$\vee$, I$\rightarrow$, 99

I$\leftrightarrow$, I$\sim$, 100

IE, 100

Implicación estricta, 43

Implicación S-R, 212

intensión, 141

Intercambio de equivalentes, 100

Interpretación de un predicado, 152

interpretación de un término, 154

interpretación de un término en un mundo $\mathbf{M}_i$, 153

la relación anterior a, 198

L_{CM}, 123

L_D, 179

Lenguaje Cuantificacional Modal, 123

Lenguaje de la lógica modal proposicional, 54

Lenguaje deóntico, 179

lenguaje modal óntico deóntico, 186

L_{MO}, 186

L_{MP}, 54

lo doblemente facultativo, 178

lo facultativo, 178

lo indiferente, 178

lo obligatorio, 178

lo permitido, 178

lo prohibido, 178

lo reglamentado, 178

Lógica Deóntica, 177

Lógica temporal de fechas, 204

Lógica temporal de Pseudo fechas, 203

L_p, 52

Método de diagramas deónticos, 183

M_{oc}, 207

modalidad *de dicto*, 130

modalidad de re, 130

Modelo occamista óntico, temporal y deóntico, 212

Modelo S4, 90

Modelo S5, 95

Modelo T, 65

Modelo T+ FB, 152

Modelos con distintos dominios, 165

Modelos Deónticos, 180

modelos DS4, 186

modelos DS5, 186

modelos DT, 186

Modelos modales cuantificacionales, 151

Modelos occamistas, 207

Modus Ponens, 99

MP, 99

Modus Tollens, 99

MT, 99

Mundo inconsistente, 89

Mundo posible noción intuitiva, 23

Mundos posibles y mundo real,24
Necesidad de la consecuencia, 136
necesidad del consecuente, 136
O , 177
obligación, 177
Ocurrencia libre de una variable, 126
Ocurrencia ligada de una variable, 125
P, 177
Paradoja de la obligación contraria al deber, 195
Paradoja de la obligación derivada, 194
Paradojas, 194
permiso, 177
P$_n$, 203
posible vs concebible, 21
Post reflexividad de la permisibilidad de historias, 211
postconmutativa, 183
Post-implicación R-S, 212
Post-ramificación de la permisibilidad de historias, 211
post-reflexiva, 182
procedimiento de decisión, 54
Procedimiento decisorio de la validez-T, 71
Propiedades modales de las proposiciones, 32
proposición necesariamente verdadera, 34
Proposiciones contingentes y no contingentes, 33
Proposiciones necesariamente verdaderas y necesariamente falsas, 35
Proposiciones posiblemente verdaderas y posiblemente falsas, 32
psicologismo, 23
Q, 165
Q(M$_i$), 166
Ramificación de historias, 210
Reducción de modalidades, 114
Reflexividad de historias, 209
Regla de Eliminación de la Necesidad, 101
Regla de introducción de la necesidad, 103
Regla de introducción de la obligación, 190
Regla de los Mundos Repetidos, 93
Regla de reiteración deóntica, 189
Regla EO-DT, 191
Regla para las alternativas, 87
Regla R-O-DS4, 192
Regla R-O-DS5, 193
Reglas de Colón, 83
Reglas de los asteriscos, 82
Reit, 99
Reiteración, 99
Reiteración S4, 116
Reiteración S5, 120
Reiteración-T, 102
relación de accesibilidad, 60
relación de accesibilidad entre historias, 208
relación de *permisibilidad*, 181
Relación de permisibilidad entre historias, 211
Relación posible-necesario, 43
relación S, 180
Rep, 99
Repetición, 99
Resumen DNT, 113
R-O-D, 189
R-S4, 116

R-S5, 120
R_t, 204
R-T, 102
$R_t\rho\sigma$, 209
S, 180
Semántica de los tiempos gramaticales, 198
Semántica deóntica, 180
Semántica óntica y deóntica, 187
Semántica S4, 89
Semántica S5, 94
Semántica T, 65
Semántica T+FB, 152
Sentido compuesto, 133
Sentido dividido, 133
Ser y Deber ser, 186
serial, 181
Serialidad de historias, 211
Simetría de historias, 210
Simplificación, 99
Sistema de deducción natural deóntico mínimo, 189
Sistema de deducción natural S5, 119
Sistema de deducción natural T, 100
Sistema DNC+T, 171
Sistema DNDS4, 192
Sistema DNDS5, 193
Sistema DNDT, 191
Subprueba marcada con □, 101
subprueba necesaria,101
Sustitución propia de variables, 127
técnica de contra ejemplificación modal, 55
Teorema Proposicional, 100
Teorema T, 69
términos, 123
Tiempos gramaticales, 199
TP, 100
Transitividad de historias, 210
utopías,180
Validez según los diagramas T, 89
Validez T+FB, 161
Validez-T, 69
Valuación V_{MT+FBg}, 153
Variable libre, 126
Variable ligada, 126
Variables, 123
Verdad en un Modelo-T, 69
Verdad en un Mundo de un Modelo-T, 68
Verdad y falsedad, 29
Verdad y mundos posibles, 31
V_{Mg}, 153
V_{MT}, 66
V_{MT+FBg}, 153

Índice de contenido

Introducción 9

Capítulo I. LAS NOCIONES MODALES 13

I-1 Las proposiciones necesarias 13

Ejercicios 18

I-2 Los mundos posibles y las nociones modales 18

I-2.1 Los mundos posibles 19

A) El dominio de lo posible 19

B) Posible no es lo mismo que concebible 21

I-3 Mundos posibles y mundo real 24

Ejercicios 27

I-3.2 Proposiciones, verdad y falsedad 29

A) Verdad y falsedad 29

B) Verdad y mundos posibles 31

I-3.3 Propiedades modales de las proposiciones 32

A) Proposiciones posiblemente verdaderas y posiblemente falsas 32

B) Proposiciones contingentes y no contingentes 33

C) Proposiciones necesariamente verdaderas y necesariamente falsas 35

Ejercicios 38

I-3.4 Simbolización 40

Ejercicios 41

B) Otras nociones 42

Ejercicios 44

Capítulo II. SEMÁNTICA T, S4 Y S5 49

II-1 La nueva lógica 49

II-1.1 Necesidad de una lógica modal 49

Ejercicios: 52

II-1.2 Lenguaje de la lógica proposicional L_P. 52

A) Símbolos: 52
B) Reglas de formación 53
II-1.3 Lenguaje de la lógica modal proposicional L_{MP} 54
A) Reglas de formación 54
II-2 Modelos y diagramas-T 54
II-2.1 Procedimiento de decisión y de contraejemplo 54
II-2.2 Semántica: mundos posibles 58
Ejercicios 64
II-2.3 Semántica T. Modelo-T 65
A) Definiciones centrales de la lógica 68
Ejercicios 70
II-2.4 Procedimiento decisorio de la validez-T 71
A) La validez en la lógica proposicional 71
B) Diagramas-T 75
II-3 Modelos y Diagramas-S4 y S5 89
II-3.1 Semántica S4 89
A) Modelo-S4 90
B) Diagramas-S4 91
Ejercicios 94
II-3.2 Semántica S5 94
A) Modelo-S5 95
B) Diagramas-S5 96
Ejercicios 97

Capítulo III. LOS SISTEMAS DE DEDUCCIÓN NATURAL T, S4 Y S5 99
III-1 El sistema T 99
III-1.1 La deducción natural proposicional. 99
III-1.2 Sistema de deducción natural T (DNT) 100
A) Reglas de deducción de DNT: 100
Ejercicios 108

III-1.3 Más reglas (Derivadas) 109
Ejercicios 112
III-1.4 Resumen DNT. Teoremas y reglas más importantes de DNT. 113
Ejercicios 114
III-2 Los sistemas S4 (DNS4) y S5 (DNS5) 114
III-2.1 Reducción de modalidades 114
Ejercicios 116
III-2.2 El sistema de deducción natural S4, DNS4 116
Ejercicios 118
III-2.3 El sistema de deducción natural S5, DNS5 119
Ejercicios 122

Capítulo IV. LÓGICA CUANTIFICACIONAL MODAL 123

IV-1 Lenguaje cuantificacional modal. L_{CM} 123
A) Símbolos primitivos 123
B) Reglas de formación 124
C) Símbolos definidos 124
D) Convenciones y definiciones 125
IV-2 La fórmula Barcan FB $(\forall\beta)\Box\varphi \rightarrow \Box(\forall\beta)\varphi$ 127
IV-2.1 Consideraciones históricas sobre modalidades 128
A) La distinción de re / de dicto 128
B) Sentido compuesto / Sentido dividido 133
C) Necesidad de la consecuencia / necesidad del consecuente 136
D) Problemas de simbolización 139
Ejercicios 141
E) Extensión vs. intensión 141
IV-2.2 Aproximación semántica formal a la FB 144
IV-2.3 Presentación sintáctica de FB 149
IV-3 Modelos modales cuantificacionales 151
IV-3.1 Semántica T+FB: modelo-T+ FB 152

Ejercicios 164
IV-3.2 Modelos con distintos dominios 165

Capítulo V. DEDUCCIÓN NATURAL CUANTIFICACIONAL MODAL 171
V-1 Sistema DNC+T 171
A) Reglas DNC+T 171
Ejercicios. 173
V-2 Otros cálculos: DNC+S4 y DNC+S5 174
A) Prueba de FB en CEP+S5 174

Capítulo VI. LÓGICA DEÓNTICA 177
VI-1 Introducción 177
VI-2 Lenguaje deóntico L_D 179
VI-3 Semántica deóntica 180
VI-3.1 Modelos deónticos M_D 180
VI-3.2 Método de diagramas deónticos 183
Ejercicios 186
VI-3.3 Ser y deber ser 186
A) Lenguaje modal óntico y deóntico L_{MO} 186
B) Semántica óntica y deóntica 187
Ejercicios 188
VI-4 Sistema de deducción natural deóntico mínimo (DND) 189
Ejercicios 190
VI-5 Sistemas DNDT, DNDS4, DNDS5 191
VI-5.1 Sistema DNDT 191
VI-5.2 Sistema DNDS4 192
VI-5.3 Sistema DNDS5 193
Ejercicios 193
VI-6 Paradojas 194

Capítulo VII LÓGICA TEMPORAL ______ 197
VII-1 Tiempos gramaticales ______ 197
VII-1.1 Semántica de los tiempos gramaticales. ______ 198
VII-1.2 Diagramas de los tiempos gramaticales y algunas leyes del modelo ______ 199
Ejercicios ______ 202
VII-2 Lógica temporal de pseudofechas 203
VII-3 Lógica temporal de fechas ______ 204
Ejercicios ______ 204
VII-4 Relación entre los modelos temporales ______ 205
Ejercicios ______ 205

Capítulo VIII. LÓGICA MODAL ÓNTICA, TEMPORAL Y DEÓNTICA ______ 207
VIII-1 Modelos occamistas M_{oc}: sus características 207
Ejercicios ______ 212
VIII-1.2 Modelo occamista óntico, temporal y deóntico $M_{OC\text{-}D}$ ______ 212
A) Paradoja de la obligación derivada: solución. ______ 214
B) Paradoja de la obligación contraria al deber: solución ______ 215

Capítulo IX. BIBLIOGRAFÍA ______ 217

Capítulo X. ÍNDICE DE TEMAS ______ 227

Apuntes de lógica modal recoge el contenido de los cursos de lógica modal dictados a los alumnos de filosofía en la PUCP. El texto presenta las nociones básicas de lógica modal general u óntica, deóntica y temporal. Si bien desarrolla un cálculo de deducción natural adaptado a cada uno de estos campos, el tema central lo constituye la semántica de mundos posibles. En particular, se discuten con detenimiento las implicancias ontológicas de la lógica modal cuantificacional a través del análisis de la llamada Fórmula Barcan. En la lógica deóntica se presenta un modelo estándar y las paradojas que en él ocurren, lo que sirve de pretexto para introducir nociones temporales que desembocan en un sistema lógico «occamista». Este sistema agrupa las tres modalidades: óntica, deóntica y temporal para enfrentar las paradojas deónticas.

El libro empieza con una presentación intuitiva de las nociones modales, sigue con el desarrollo de los sistemas S4, S5 y T proposicionales y luego introduce sistemas cuantificacionales, para continuar con el tratamiento de la lógica deóntica y temporal a nivel proposicional. Para cada tema se presenta un sistema de decisión a partir de diagramas con un alto contenido intuitivo que facilitan la comprensión del tema. En todos los capítulos se ofrecen ejercicios que facilitan el aprendizaje.