Capítulo 12

El Axioma del Supremo y sus Aplicaciones

12.1 INTRODUCCION

De una manera sencilla, un número real x es un ente matemático que se representa mediante una expresión decimal infinita

$$x = \pm N.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

en donde N es un entero ≥ 0 y cada a_i es un dígito decimal 0, 1, ... , 9, tales como

10.000 ...	10.333 ...	–2.1428714287 ...
1.4142 ...	2.7182 ...	3.1415 ...

Dos números reales a y b pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse y también compararse: si son iguales o uno es menor que otro.

Un número real x es racional si puede ser representado por alguna fracción de enteros $\frac{n}{d}$, siendo n y d números enteros. En caso contrario, se dice que x es irracional.

Por ejemplo,

$$10 = 10.000\ldots \qquad \frac{31}{3} = 10.333\ldots \qquad -\frac{15}{7} = -2.1428714287\ldots$$

son números racionales.

Se demuestra que un número es racional si y sólo si tiene una expresión decimal periódica o recurrente, esto es, hay un grupo de dígitos que, a partir de un lugar de la expresión decimal, se repite indefinidamente.

En resumen, el conjunto de los números reales se compone de:

a) los números racionales, que comprende a los números enteros

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

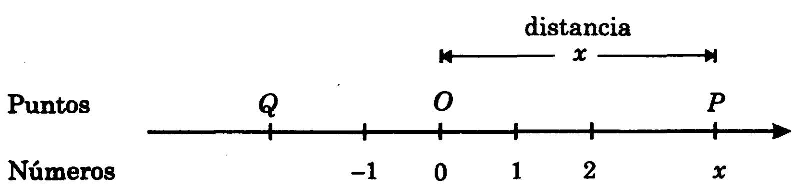
y las fracciones de enteros $\dfrac{n}{d}$, en donde n y d son enteros;

y **b)** los números irracionales, tales como

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$
$$e = 2.7182\ldots \quad \text{(el número } e\text{)}$$
$$\pi = 3.1415\ldots$$

que no pueden ser expresados como fracciones de enteros.

Geométricamente, los números reales pueden ser identificados con los puntos de una línea recta en la forma que se describe a continuación. Elegimos un punto O de la recta, llamado origen, y la recta queda dividida en dos semirrectas que tienen un extremo en O. Luego convenimos en llamar positiva a una de las semirrectas y negativa a la otra. También, suponemos que es dada una unidad de longitud para medir distancias entre puntos de la recta.



La correspondencia entre números reales y puntos de la recta se establece así:

1) al número 0 le corresponde el origen O

2) al número $x > 0$, le corresponde el punto P de la semirrecta positiva que dista x unidades del origen;

y **3)** a $x < 0$, le corresponde el punto Q que se encuentra en la semirrecta negativa a la distancia $-x$ unidades del origen.

12.2 AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

A partir de la descripción directa de los números reales dada en la sección anterior, es posible definir las operaciones de números y la relación de comparación, y luego deducir las reglas que éstas deben cumplir.

Otra forma de presentar a los números reales consiste simplemente en asumir o postular la existencia de un conjunto abstracto que cumple ciertas reglas o axiomas, y son suficientes para obtener no sólo la representación de los números mediante expresiones decimales (o en cualquier base entera ≥ 2) sino también los elementos y recursos para realizar procesos de límites (continuidad, derivación e integración) del análisis matemático, cuyos resultados se aplican constantemente en los modelos de los fenómenos naturales y sociales.

Formalmente postulamos (la existencia de) un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos se denominan números reales, tal que:

(1) existe una operación de adición, designada por $+$, que asocia a cada par de números a y b un único número real $a+b$, llamado suma de a y b.

(2) existe una operación de multiplicación, designada por $\cdot$, que asocia a cada par de números a y b un único número $a \cdot b$, llamado producto de a y b;

(3) existe una relación menor, designada por $<$, que se expresa por $a<b$, *a es menor que b*, si a y b son números reales;

y **(4)** las operaciones de adición y multiplicación y la relación menor, satisfacen los axiomas o reglas **A1–A4, M1–M4, D, 01–04** y **S**, que se describen a continuación.

AXIOMAS DE LA ADICION.

A1 Ley asociativa

$$(a+b)+c = a+(b+c)\,, \quad \text{para } a, b \text{ y } c \text{ en } \mathbb{R}$$

A2 Ley conmutativa

$$a+b = b+a\,, \quad \text{para todo par de números } a \text{ y } b$$

A3 Existencia de cero

Existe un único número 0 tal que $a+0=a$ para todo a de $\mathbb{R}$

A4 Existencia de opuestos

Para cada a de $\mathbb{R}$ existe un único número $-a$, llamado opuesto de a, tal que

$$a+(-a) = 0$$

Nota. Es usual escribir $a-b$ en lugar de $a+(-b)$.

AXIOMAS DE LA MULTIPLICACION

M1 Ley asociativa

$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)\,, \text{ para } a,\ b \text{ y } c \text{ en } \mathbb{R}$$

M2 Ley conmutativa

$$a \,.\, b = b \,.\, a\,, \text{ para todo par de números } a \text{ y } b$$

M3 Existencia de elemento unidad

Existe un único número 1, distinto de 0, tal que $1 \,.\, a = a$, para todo a de $\mathbb{R}$.

M4 Existencia de inversos

Para cada a de $\mathbb{R}$, distinto de 0, existe un único número a^{-1}, llamado inverso de a, tal que $a \,.\, a^{-1} = 1$.

Nota. En lugar de $a \,.\, b$ se suele escribir ab, y si $b \neq 0$, también se escriben

$$\frac{1}{b} \quad (\text{o } \ 1/b\,) \quad \text{en lugar de } b^{-1}$$

y

$$\frac{a}{b} \quad (\text{o } \ a/b\,) \quad \text{por } ab^{-1}$$

D Ley distributiva

$$a \,.\, (b+c) = a \,.\, b + a \,.\, c\,, \text{ cualesquiera que sean } a,\ b \text{ y } c$$

AXIOMAS DE ORDEN

01 Ley de tricotomía

Para todo par de números reales a y b se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

$a = b$ (*a y b son iguales*)

$a < b$ (*a es menor que b*)

o $b < a$ (*b es menor que a*)

02 Ley transitiva

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

O3 Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

O4 Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < bc$

Nota.

1) Se suele escribir:

   $a > b$, a *es mayor que* b , si $b < a$

   $a \leq b$, a *es menor o igual a* b, si $a < b$ o $a = b$

   $a \geq b$, a *es mayor o igual a* b, si $a > b$ o $a = b$

2) Se dice que a es positivo o negativo si $a > 0$ o $a < 0$, respectivamente.

AXIOMA DEL SUPREMO

S Si X es un conjunto de números no vacío, cuyos elementos son todos menores o iguales a un número c, entonces existe $s \in \mathbf{R}$, llamado supremo de X, que cumple las siguientes propiedades:

SUP1: $x \leq s$ para todo x de $\mathbf{R}$

y **SUP2:** Si $t \in \mathbf{R}$ cumple $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq t$.

Nota. Cualquier $c \in \mathbf{R}$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, se denomina cota superior de X. Además, se dice que X es acotado superiormente si tiene al menos una cota superior.

La hipótesis del axioma **S** exige que X tenga una cota superior y en este caso el axioma asegura la existencia de un número real s con la propiedad de ser la *mínima* cota superior de X. En efecto, **SUP1** establece que s es una cota superior de X y **SUP2**, que si t es cualquier cota superior de X, entonces s es menor o igual a t.

Algunas de las consecuencias del axioma del supremo se desarrollan más adelante. Utilizando los axiomas anteriores (A1–A4, M1–M4, D Y O1–O4) se demuestran las propiedades básicas conocidas de los números (ver 12.4).

12.3 NUMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES

Definimos ahora los sistemas de números naturales, enteros y racionales, que se designan por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, respectivamente.

Existe un subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbf{R}$ que cumple:

N1) $1 \in \mathbb{N}$, y si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$.

y **N2) Principio de inducción matemática**

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

$$1 \in S, \text{ y si } s \in S \text{ implica } s+1 \in S \qquad (*)$$

entonces S es igual a todo el conjunto $\mathbb{N}$.

En particular, por N1), se tiene que los números 1, $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, etc., son elementos de $\mathbb{N}$, y por lo tanto $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS NATURALES

De la definición de $\mathbb{N}$ se deducen las siguientes propiedades de los números naturales, en las que a y b designan números naturales arbitrarios.

Se cumplen:

1) $a+b$ y $a.b \in \mathbb{N}$

2) $a \geq 1$

3) si $a \leq b \leq a+1$ entonces $a = b$ o $a = b+1$

4) Si $a < b$, entonces $a+1 \leq b$

5) Principio del buen orden

Si A es un subconjunto no vacío de números naturales, entonces existe $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo a de A.

m se denomina mínimo de A.

6) Segundo Principio de Inducción Matemática

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $1 \in S$

y **b)** si $1, \dots, m-1, m \in S$, implica que $m+1 \in S$ entonces S es igual a $\mathbb{N}$.

Por definición, el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ consiste de los números z tales que $z = 0$ y z ó $-z \in \mathbb{N}$.

Así,
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Finalmente,
$$\mathbb{Q} = \left\{ q \in \mathbb{R} \ / \ q = \frac{n}{d}, \text{ siendo } n \text{ y } d \in \mathbb{Z}, \ d \neq 0 \right\}$$

Presentamos sin demostración las propiedades básicas de los números reales. Estas propiedades se deducen empleando los axiomas dados y desde luego también las propiedades previamente establecidas, pues ya son consecuencias lógicas de tales axiomas.

12.4 PROPIEDADES BASICAS DE LOS NUMEROS REALES

Asumimos que a, b, c y d designan números reales. Se cumplen las siguientes reglas:

1) **Ley de cancelación de la adición:**

   Si $a+c=b+c$ entonces $a=b$

2) $-(a+b) = -a-b$

3) $-(-a)=a$

4) $a.0 = 0.a = 0$ para todo número real a.

5) $-a = (-1).a$

6) $(-a).b = -a.b$

7) $(-a).(-b) = a.b$, y en particular $(-1)(-1) = 1$

8) **Ley de cancelación de la multiplicación:**

   Si $a.c = b.c$ y c es distinto de cero, entonces $a=b$

9) Si $a \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{a} \neq 0$ y su inverso es a, esto es, $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a$

10) $a.b=0$ implica $a=0$ o $b=0$

11) Si a y b son distintos de cero, entonces $ab \neq 0$

12) Si b y $d \neq 0$ entonces

    i) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ ii) $\dfrac{da}{db} = \dfrac{a}{b}$

    iii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{(ad+bc)}{bd}$ iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

13) Si $a<b$ y $c<d$ entonces $a+c<b+d$

14) Si $a<b$ entonces $-b<-a$

15) Si $a<b$ y $c<0$ entonces $ac>bc$

16) Si $a\neq 0$ entonces $a\,.\,a$ es positivo

17) 1 es positivo

18) Si a y b son positivos, entonces también lo son $a+b$ y ab.

19) Si $a\geq 0$ y $b\geq 0$ entonces $a+b=0$ si y sólo si $a=0$ y $b=0$

20) Si a es positivo, entonces $\dfrac{1}{a}$ es positivo y $a<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}>1$

21) $a\leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon>0 \Leftrightarrow a\leq 0$

22) Si b y d son positivos, entonces $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad>bc$

23) Para $a\in\mathbb{R}$, se define $|a|=$ valor absoluto de a, por

$$|a| = \begin{cases} 0 & \text{si } a=0 \\ a & \text{si } a>0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$$

Entonces se cumple:

i) $|a|\geq 0$ y $|a|=0$ si y sólo si $a=0$

ii) $|-a|=|a|$

iii) $a\leq |a|$ y $-a\leq |a|$

iv) $|a+b|\leq |a|+|b|$

v) $|ab|=|a|\,|b|$

vi) $|a-b|<c \Leftrightarrow b-c<a<b+c$

vii) $|a|\leq\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0 \Leftrightarrow a=0$

24) Potencias enteras

Si $a\neq 0$ y n es un entero ≥ 0, se define a^n por inducción sobre n: $a^0=1$ y $a^n=a^{n-1}a$, si $n\geq 1$.

Y si n es negativo, $a^n=\dfrac{1}{a^{-n}}$.

Entonces para todo a, b distintos de cero y enteros $m, n,$ se verifican las propiedades:

i) $a^m a^n = a^{m+n}$

ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

iii) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

iv) $(ab)^n = a^n b^n$

12.5 APLICACIONES DEL AXIOMA DEL SUPREMO

Recordamos que en el sistema de los números reales $\mathbb{R}$ se cumple el Axioma del Supremo:

S Si X es un conjunto de números, no vacío y acotado superiormente (esto es, hay un número c tal que $x \leq c$ para todo x de X), entonces existe $s \in \mathbb{R}$, llamado supremo de X, que satisface

SUP1: $x \leq s$ para todo x de X

y **SUP2:** Si $t \in \mathbb{R}$ cumple $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq t$.

Nótese que el axioma implica que existe supremo de X si y sólo si X es acotado superiormente.

Se prueba que un número s que cumpla **SUP1** y **SUP2** es único y por lo tanto se llama el supremo de X.

12.5.1 PROPIEDADES

Se asume que X e Y son conjuntos de números no vacíos

1) Para $s \in \mathbb{R}$ son equivalentes

SUP1 : Si $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq t$.

y **SUP2':** Si $\varepsilon > 0$ entonces $s - \varepsilon < x_0$, para algún x_0 en X

2) **Infimo de un conjunto**

Si X es acotado inferiormente, —esto es, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x$, para todo x de X— entonces existe un único número i, llamado ínfimo de X, tal que

INF1 $i \leq x$, para todo x de X

INF2 si $t \leq x$, para todo x de X, entonces $t \leq i$

Nota. **INF2** es equivalente a

INF2' Si $\varepsilon > 0$ entonces $x_0 < i + \varepsilon$, para algún x_0 de X

3) Si X es un subconjunto de Y, entonces

a) supremo $X \leq$ supremo Y , si Y tiene supremo

y **b)** ínfimo $X \geq$ ínfimo Y, si Y tiene ínfimo

4) **Parte entera de un número real**

Para todo número real a existe un único entero z tal que $z \leq a < z+1$

Se define $[\![a]\!] = z$, la parte entera de a.

Entonces $a = [\![a]\!] + r$, en donde $[\![a]\!]$ es un número entero y $r = z - a$ cumple $0 \leq r < 1$.

5) **Propiedad arquimediana de los números reales**

Para cada número real a existe un número entero positivo n tal que $n > a$.

12.5.2 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Unicidad del supremo

Probar que si s y s' cumplen SUP1 y SUP2 respecto del conjunto X , entonces $s = s'$.

SOLUCION. Para s tenemos

(1) SUP1: $x \leq s$ para todo x de X

(2) SUP2: Si $t \in \mathbb{R}$ cumple $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq t$.

y de igual modo para s'

(3) SUP1: $x \leq s'$ para todo x de X

(4) SUP2: Si $t \in \mathbb{R}$ cumple $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s' \leq t$.

Por (3), el número $t = s'$ cumple $x \leq t$ para todo x en X, y por lo tanto (2) implica $s \leq t = s'$, esto es $s \leq s'$.

Similarmente, por (1), el número $t = s$ cumple $x \leq t$ para todo x en X, y por lo tanto (4) implica $s' \leq t = s$, o $s' \leq s$.

Luego, $s = s'$.

PROBLEMA 2. Si s es un número y X es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, probar que son equivalentes.

SUP2: Si $x \leq t$ para todo $x \in X$, entonces $s \leq t$.

y **SUP2':** Si $\varepsilon > 0$ entonces $s - \varepsilon < x_0$, para algún x_0 en X

SOLUCION.

SUP2 $\Rightarrow$ SUP2'

Sea $\varepsilon > 0$. Si fuese falso $s - \varepsilon < x_0$, para algún x_0 de X, entonces se tendría que $x \leq s - \varepsilon$, para todo x de X, y por SUP2 (con $t = s - \varepsilon$) resultaría que $s \leq s - \varepsilon$, de donde $\varepsilon \leq 0$, lo que contradice $\varepsilon > 0$. En consecuencia, SUP2' es verdadera.

SUP2' $\Rightarrow$ SUP2

Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq t$, para todo x de X. Hay que probar que $s \leq t$. Si fuese cierto que $t < s$, entonces haciendo $\varepsilon = s - t$ se tendría $t = s - \varepsilon$ y $\varepsilon > 0$, y aplicando SUP2', resultaría $t < x_0$, para algún x_0, una contradicción con la hipótesis $x \leq t$ para todo x de X.

PROBLEMA 3. Infimo de un conjunto

Probar que si X es un conjunto de números no vacío y acotado inferiormente, entonces el número $i = -s$, en donde s =supremo de $Y = \{-x \ / \ x \text{ en } X\}$, cumple

INF1 $i \leq x$, para todo x de X

INF2 si $t \leq x$, para todo x de X, entonces $t \leq i$

SOLUCION. Sea c una cota inferior de X, esto es $c \leq x$ para todo x de X.

El conjunto Y es no vacío, pues X lo es, y tiene la cota superior $-c$, ya que $c \leq x$, x en X, implica $-x \leq -c$. Luego, por el axioma del supremo, existe s = supremo de Y, esto es, s cumple:

SUP1 $-x \leq s$, para todo $-x$ de Y

SUP2 si $-x \leq t$, para todo $-x$ de Y, entonces $t \leq s$

Haciendo $s = -i$, y escribiendo $-t$ en lugar de t en SUP2, vemos que estas propiedades son precisamente INF1 e INF2.

PROBLEMA 4. Si X, Y son conjuntos no vacíos de números tales que X es un subconjunto de Y, entonces

$$\text{supremo } X \leq \text{ supremo } Y$$

si Y tiene supremo.

SOLUCION. Sea s' = supremo de Y; luego $y \leq s'$ para todo y de Y, y en particular $x \leq s'$ para todo x de X, pues X es parte de Y; luego existe s = supremo de X, y puesto que s' es una cota superior de X, por SUP2 para x con $t = s'$, se debe cumplir $s \leq s'$, es decir

$$\text{supremo } X \leq \text{ supremo } Y.$$

PROBLEMA 5. Parte entera de un número real

Probar que para todo número real a existe un único entero z tal que $z \leq a < z + 1$.

SOLUCION. Existencia de z

Caso 1. $1 \leq a$

Sea $S = \{ m \in \mathbb{N} \ / \ m \leq a \}$.

Vemos que S es no vacío, pues contiene a 1 por hipótesis, y acotado superiormente porque a es una cota superior de S, por definición. Luego, por el axioma del supremo, existe el número s = supremo de S. Entonces por SUP2' (con $\varepsilon = 1$) resulta

$$s - 1 < m_0 \quad \text{o} \quad s < m_0 + 1, \quad \text{para algún } m_0 \text{ de } S \qquad \textbf{(1)}$$

Como m_0 está en S, se cumple $m_0 \leq a$ y sólo falta probar que $a < m_0 + 1$. En efecto, si fuese $m_0 + 1 \leq a$, entonces $m_0 + 1 \in S$ y, por SUP1, se tendría $m_0 + 1 \leq s$, en contradicción con (1).

Por tanto, el número entero positivo $z = m_0$ cumple $z \leq a < z + 1$.

Caso 2. $0 \leq a < 1$

En este caso, el entero $z = 0$ cumple la propiedad requerida.

Caso 3. $a < 0$

Entonces $-a > 0$ y por los dos casos anteriores, existe un entero u tal que $u \leq a < u + 1$, de donde $-u - 1 < a \leq -u$

Definiendo z por

$$z = \begin{cases} -u-1 & \text{si } a < -u \\ -u & \text{si } a = -u \end{cases}$$

se comprueba fácilmente que $z \leq a < z+1$

Unicidad

Sean w y z dos números enteros

$$w \leq a < w+1$$

y $$z \leq a < z+1$$

Debemos probar que $w = z$. Si fuesen distintos, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z < w$. Entonces $w - z$ es un entero ≥ 1, esto es $z+1 \leq w$, y de

$$a < z+1 \leq w \leq a$$

resulta $a < a$, una contradicción. Luego, se cumple $w = z$.

PROBLEMA 6. Propiedad arquimediana de los naturales

Demostrar que para cada número real a existe un entero positivo n tal que $n > a$.

DEMOSTRACION.

Si a es negativo tomamos $n = 1$. Y si $a \geq 0$, entonces $n = [\![a+1]\!]$ = parte entera de $a+1$, cumple $n \geq a+1$, y en consecuencia $n > a$ y $n \geq 1$.

PROBLEMA 7. Densidad de los números racionales

Probar que entre dos números reales distintos siempre existe un número racional, es decir, si $a < b$, con a y $b \in \mathbb{R}$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

PRUEBA. Por la propiedad arquimediana, para el número $\dfrac{1}{b-a}$ existe un número natural d tal que $d > \dfrac{1}{b-a}$, de donde

$$db - da > 1 \quad \text{o} \quad da + 1 < db \tag{1}$$

y también $$z \leq da < z+1 \tag{2}$$

si z = parte entera de da.

Sea $q = \frac{n}{d}$, con $n = z + 1$. Entonces q es un número racional y cumple $a < q < b$ pues:

$$\begin{aligned} a &= d\frac{a}{d} \\ &< \frac{z+1}{d} && (\text{ pues } da < z+1, \text{ por } (2)) \\ &= q \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q &= \frac{z+1}{d} \\ &\leq \frac{da+1}{d} && (\text{ pues } z \leq da, \text{ por } (2)) \\ &< d\frac{b}{b} && (\text{ por } (1)) \\ &= b \end{aligned}$$

PROBLEMA 8. Sea X un conjunto de números y $s \in \mathbb{R}$.

Probar que si a es una cota superior de X y $a \in X$, entonces a = supremo de X.

SOLUCION. El número a cumple SUP1 pues es una cota superior de X y también SUP2, ya que si

$$x \leq t \text{ para todo } x \text{ de } X$$

en particular para $x = a \in X$ se tiene $a \leq t$.

PROBLEMA 9. Hallar el supremo (si existe) de cada uno de los siguientes conjuntos de números

1) $A = \{ 2, -1, -10, 4 \}$

2) $B = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \ / \ n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

3) $C = \left\{ n^2 - 5n \ / \ n = 10, 11, 12, \ldots \right\}$

4) $D = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < 5 \}$

5) $E = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \middle/ \ n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$

6) $F = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x > 12 \}$

SOLUCION.

1) Se comprueba inmediatamente que 4 cumple SUP1 y SUP2 respecto del conjunto A; luego supremo $A = 4$

2) Vemos que $1-\frac{1}{n^2} \leq 1$ de modo que B es acotado superiormente y existe $s =$ supremo de B.

Por SUP2 se tiene $s \leq 1$. Y por SUP1 $1-\frac{1}{n^2} \leq s$, para todo n. Tomando límites cuando $n \to \infty$ resulta $1 \leq s$.

Luego, $s = 1$ es el supremo de B.

OTRA SOLUCION

Probaremos que 1 es el supremo de B comprobando directamente que además de SUP1 el número 1 satisface SUP2'.

En efecto, si $\varepsilon > 0$ es dado, por la propiedad arquimediana podemos encontrar un entero positivo n tal que $\frac{1}{\varepsilon} < n$; luego $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, $1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n^2} \leq 1$ y se cumple SUP2'.

Por lo tanto, 1 es el supremo de B.

3) De $n^2 - 5n = n(n-5) > n$, si $n \geq 6$, vemos que los valores de estos números crecen cuando n lo hace; por lo tanto el conjunto C no debe ser acotado superiormente (en particular, no puede tener supremo). Formalmente demostraremos que C no tiene supremo; por el absurdo, supongamos que existe $s =$ supremo de C; luego por SUP1 se tiene

$$n^2 - 5n \leq s , \quad \text{para todo } n$$

y por la desigualdad establecida $n < s$, si $n \geq 6$. **(1)**

Sin embargo, por la propiedad arquimediana podemos encontrar un entero n tal que $n > s$ y $n \geq 6$, lo que contradice a (1).

Concluimos entonces que B no tiene supremo.

4) Probaremos que $5 =$ supremo de D

Por definición del conjunto D, 5 cumple SUP1. Y también satisface SUP2'. Si $\varepsilon > 0$ es dado y elejimos un entero n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$, o $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces $x = 5 - \frac{1}{n}$ cumple $0 < x < 5$, o sea $x \in D$, y $5 - \varepsilon < x$.

5) sen$\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ toma el valor 0 si n es par y $(-1)^m$, si $n=2m+1$; luego el conjunto E es $\{-1,0,1\}$ y 1 = supremo de E.

6) La definición de F implica que no es acotado superiormente; por lo tanto no tiene supremo.

PROBLEMA 10. Probar que existe el número

$$s = \text{supremo de } A = \left\{ x \in \mathbf{R} \ / \ x^2 < 3 \right\}$$

y además que $s^2 = 3$, $1 \le s \le 2$.

SOLUCION. A es no vacío (1 es elemento de X), y 2 es una cota superior de A pues si $x^2 < 3$ entonces $|x|^2 < 2^2$, de donde $|x| < 2$ y $x < 2$.

Luego, existe s = supremo de A y cumple la desigualdad $1 \le s \le 2$, por SUP1, SUP2 y las observaciones anteriores.

Vamos a demostrar que $s^2 = 3$, esto es $s = \sqrt{3}$.

Método 1

Para cada $n \ge 1$ aplicamos SUP2' con $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ y encontramos x_n en A tal que $s - \dfrac{1}{n} < x_n$; luego

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 < x_n^2 \le 3 \qquad\qquad (\text{pues } x_n \in A)$$

y haciendo $n \to \infty$, $\quad s^2 \le 3$.

Por otra parte para todo $n \ge 1$ se tiene $s + \dfrac{1}{n} > s$ y por SUP1 $s + \dfrac{1}{n}$ no pertenece al conjunto A, esto es $3 \le \left(s + \dfrac{1}{n}\right)^2$; y haciendo $n \to \infty$ resulta $3 \le s^2$.

Luego $s^2 = 3$.

Método 2

Probaremos que no pueden ocurrir las desigualdades $s^2 < 3$ o $s^2 > 3$.

Si $s^2 < 3$ podemos encontrar $0 < \varepsilon < 1$ tal que $(s+\varepsilon)^2 < 2$ **(1)**

En efecto, la desigualdad es equivalente a $s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < 3$

y puesto que el primer miembro es menor que $s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon$ (pues $\varepsilon^2 \le \varepsilon$) bastará que este número sea menor que 3

o $(2s+1)\varepsilon < 3 - s^2$, esto es $\varepsilon < \dfrac{3-s^2}{2s+1}$; **(2)**

luego, si hacemos $\varepsilon = \dfrac{m}{2}$, con m = menor de 1 y $\dfrac{3-s^2}{2s-1}$, entonces son ciertas (2) y (1).

De la desigualdad (1) se sigue que $s+\varepsilon$ es un elemento de X y por SUP1 se debe tener $s+\varepsilon \le s$, una contradicción. Luego, es imposible que $s^2 < 3$.

Si $s^2 > 3$, procediendo como en el caso anterior, podemos encontrar $0 < \varepsilon < s$ tal que

$$(s-\varepsilon)^2 > 3 \qquad \textbf{(3)}$$

En efecto, de $\quad s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon$

será suficiente que $s^2 - 2s\varepsilon > 3$, o $\varepsilon < \dfrac{s^2-3}{2s}$; luego (3) se cumple si ε es igual a $\dfrac{m}{2}$, con m = menor de s y $\dfrac{s^2-3}{2s}$. Sin embargo, por SUP2', para ε, existe un x en A tal que $s-\varepsilon < x$; luego $(s-\varepsilon)^2 < x^2 < 3$, en contradicción con (3), y por consiguiente, tampoco es cierto que $s^2 > 3$.

En conclusión, se debe cumplir $s^2 = 3$.

PROBLEMA 11. Encontrar el supremo de los siguientes conjuntos

1) $A = \left\{ \dfrac{x-1}{x-2} \;\middle/\; x > 2 \right\}$ **2)** $B = \left\{ \dfrac{1}{1+x^2} \;\middle/\; \text{cualquier } x \right\}$

3) $C = \left\{ \operatorname{sen}(a)^n \;/\; n = 1, 2, \ldots \right\}$ si $0 \le a \le \pi$

SOLUCION.

1) Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Notamos que el valor $f(x)$ crece indefinidamente si $x > 2$ se acerca a 2 y por lo tanto el conjunto será no acotado. En efecto, dado $K > 0$ siempre podemos encontrar un $x > 2$ tal que

$$\frac{1}{x-2} > K \qquad \text{o} \qquad x > 2 + \frac{1}{K}$$

por ejemplo $x = 3 + \dfrac{1}{K}$, y por lo tanto $f(x) > K$.

Luego A no tiene supremo.

2) Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, entonces $1 = f(0) \geq f(x)$, para todo x, pues $1 \leq 1 + x^2$, y por lo tanto $1 \in B$ y también es una cota superior de B, lo cual implica

$$1 = \text{supremo de } B.$$

3) Sea $b = \text{sen}(a)$; de $0 \leq a \leq \pi$ se sigue que $0 \leq b \leq 1$ y por lo tanto $b^1 \geq b^n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$; luego $b \in C$ y es una cota superior de C y por consiguiente b = supremo de C.

PROBLEMA 12. Se dice que una función $f(x)$, x en X, es acotada superiormente si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq c$ para todo x en X; en este caso existe supremo $\{ f(x) \ / \ x \text{ en } X \}$ y se designa por $\sup\limits_X f$.

1) Si $f(x) \leq g(x)$, para todo x, y $g(x)$ es acotada superiormente, probar que $\sup\limits_X f \leq \sup\limits_X g$

2) Si $f(x)$ y $g(x)$ son acotadas superiormente y $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, probar que $\sup\limits_X (f+g) \leq \sup\limits_X f + \sup\limits_X g$

3) Si $f(x)$ es acotada superiormente y $c \in \mathbb{R}$, probar que

$$\sup_X (f+c) = \sup_X f + c$$

en donde $(f+c)(x) = f(x) + c$

SOLUCION.

1) Sean $A = \{ f(x) \ / \ x \text{ en } X \}$ y $B = \{ g(x) \ / \ x \text{ en } X \}$

Por SUP1 el número $s' = \sup_X g$ = supremo de B cumple

$$g(x) \leq s' , \quad \text{para todo } x \text{ en } X$$

y de $f(x) \leq g(x)$ resulta $f(x) \leq s'$.

de donde A tiene supremo $s = \sup_X f$ y cumple $s \leq s'$, por SUP2 para s;

luego $\sup_X f < \sup_X g$.

2) Sean $s = \sup_X f$ y $s' = \sup_X g$; luego para todo x en X se tiene $f(x) \leq s$ y $g(x) \leq s'$, $f(x) + g(x) \leq s + s'$ de modo que el conjunto

$$C = \{ (f+g)(x) \ / \ x \text{ en } X \}$$

es acotado superiormente por $s + s'$ y si $s'' = \sup_X (f+g)$ entonces $s'' \leq s + s'$, por SUP2 para s''.

Así, $$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$$

3) Sea $s = \sup_X f$. Entonces

SUP1 Si $f(x) \leq s$ para todo x en X

y SUP2 si $f(x) \leq t$ para todo x en X, entonces $s \leq t$

de donde $s + c$ cumple

$$f(x) + c \leq s + c \quad \text{para todo } x \text{ en } X$$

y si $f(x) + c \leq t'$ para todo x en X, entonces $f(x) \leq t' - c$ y por SUP2,

$$s \leq t' - c , \quad \text{o} \quad s + c \leq t'$$

esto es, $s + c$ es el supremo del conjunto $\{ (f+c)(x) \ / \ x \text{ en } X \}$ y por lo tanto $\sup_X (f+c) = s + c = \sup_X f + c$

12.6 CONVERGENCIA DE SUCESIONES NUMERICAS

Utilizando el axioma del supremo se establece el criterio de convergencia de las sucesiones monótonas acotadas, el criterio de Cauchy y la existencia de subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas. (Ver capítulo 0)

12.6.1 CRITERIO DE LAS SUCESIONES MONOTONAS ACOTADAS

Si (a_n) es una subsucesión tal que $a_n \leq a_{n+1} \leq C$, para todo n, y un determinado C, entonces (a_n) es convergente y $a_k \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq C$, para todo k.

De igual modo, si $a_n \geq a_{n+1} \geq B$, para todo n, entonces

$$a_k \geq \lim_{n\to\infty} a_n \geq B, \qquad \text{para todo } k.$$

PRUEBA. Supongamos que se cumple $a_n \leq a_{n+1} \leq C$, para todo n.

Sea X el conjunto formado por los términos de la sucesión, esto es $X = \{ a_n \ / \ n \geq 0 \}$.
X es no vacío y acotado superiormente por C; luego por el axioma del supremo existe L = supremo de X. Probaremos que L es el límite de (a_n).

Sea dado $\varepsilon > 0$. Por SUP2' existe a_{n_0} tal que $L - \varepsilon < a_{n_0}$ **(1)**

Entonces si $n \geq n_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< a_{n_0} \\ &\leq a_n && \left[\text{pues } a_{n_0} \leq a_n\right] \\ &\leq L && [\text{por SUP1}] \\ &< L + \varepsilon \end{aligned}$$

esto es $|L - a_n| < \varepsilon$, cuando $n \geq n_0$

lo que significa $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Además es cierto que $a_n \leq L \leq C$, por SUP1 y SUP2.

12.6.2 SUBSUCESIONES CONVERGENTES DE SUCESIONES ACOTADAS

Si (a_n) es una sucesión de números tal que $c \le a_n \le d$ para todo n, entonces existe una colección de subíndices enteros $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tal que si $x_k = a_{n_k}$, entonces la sucesión (x_k) es convergente.

Nota. Se dice que (a_{n_k}) es una subsucesión convergente de (a_n).

Si $L = \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$, por definición se cumple:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $k \ge N$ implica $\left| L - a_{n_k} \right| < \varepsilon$.

Observemos además que $c \le L \le d$ y $n_k \ge k$, para todo k.

PRUEBA

Para cada n sea $X_n = \{ a_k \ / \ k \ge n \}$, esto es, X_n consiste de los términos a_n, $a_{n+1}, \ldots$, cuyos subíndices son mayores o iguales a n.

Es claro que los X_n son no vacíos y acotados inferiormente (c es una cota inferior) y por lo tanto existe i_n = ínfimo de X_n.

Puesto que X_{n+1} es parte de X_n, se tiene $i_n \le i_{n+1}$ lo que muestra que (i_n) es una sucesión monótona creciente. Además $c \le i_n \le d$, para todo n; en efecto,

$$c \le i_n \quad \text{por INF1 para } i_n \quad \text{y} \quad i_n \le a_n \le d$$

En particular (i_n) es acotada superiormente y por el criterio de las sucesiones monótonas acotadas existe $L = \lim\limits_{n \to \infty} i_n$ que cumple $a_n \le i_n \le L \le d$, para todo n, y en particular $c \le L \le d$.

Probaremos que L satisface la siguiente propiedad:

Para todo ε y entero $n \ge 0$, existe un $k > n$ tal que

$$\left| L - a_k \right| < \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

En efecto, de $L = \lim\limits_{n \to \infty} i_n$, para $\varepsilon > 0$ existe N tal que $L - i_N < \varepsilon$, $L - \varepsilon < i_N$, y como $i_N < i_m$, para todo $m \ge N$, podemos suponer que $N > n$, y por lo tanto tenemos un entero $N > n$, tal que

$$L - \varepsilon < i_N \le L \qquad \textbf{(2)}$$

En forma similar, de $\qquad i_N$ = ínfimo de $\{ a_N , a_{N+1} , \dots \}$

por INF1 e INF2' existe un a_k , $k \geq N$, tal que

$$i_N \leq a_k \leq i_N + \varepsilon \tag{3}$$

Luego
$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< i_N && [\text{ por } (2)] \\ &\leq a_k < i_N + \varepsilon && [\text{ por } (3)] \\ &\leq L + \varepsilon && [\text{ por } (2)] \end{aligned}$$

esto es $|L - a_k| < \varepsilon$, para algún $k \geq N > n$, lo que prueba (1).

Ahora procedemos a encontrar una sucesión de subíndices

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \quad \text{tales que} \quad \left| L - a_{n_k} \right| < \frac{1}{k} \tag{4}$$

Aplicando (1) con $\varepsilon = 1$ y $n = 1$, elegimos $n_1 = k > 1$ tal que $\left| L - a_{n_1} \right| < 1$.
Suponiendo que ya se hallaron $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_p$, aplicamos (1) con $\varepsilon = \dfrac{1}{p+1}$ y $n = n_p$ y podemos elegir

$$n_{p+1} = k > n_p \quad \text{tal que} \quad \left| L - a_{n_{p+1}} \right| < \frac{1}{(p+1)}$$

lo que completa el proceso de inducción y establece (4).
De (4) se sigue $L = \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$.

12.6.3 CRITERIO DE CAUCHY

(a_n) es convergente si y sólo si satisface el criterio de Cauchy: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N, que depende de ε , tal que si m y $n \geq N$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

PRUEBA. Supongamos que (a_n) es convergente y que su límite es L. Probaremos que se cumple el criterio de Cauchy: Dado $\varepsilon > 0$, sea N tal que si $n \geq N$ entonces $|L - a_n| < \varepsilon/2$; luego si m y $n \geq N$ se tiene

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \varepsilon .$$

Recíprocamente, si (a_n) satisface el criterio de Cauchy demostraremos que es convergente.

Primero probaremos que (a_n) tiene una subsucesión convergente, lo que, por el problema anterior, será cierto si (a_n) es acotada.

La propiedad asumida puede expresarse en la forma:

Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si m y $n \geq N$ entonces

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon \tag{1}$$

En particular, si $m = N$, se tiene

$$a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon \tag{2}$$

para todo $n \geq N$, y si hacemos

$$c = \text{menor de los números } a_0 - \varepsilon\ ,\ a_1 - \varepsilon\ ,\ \ldots\ ,\ a_N - \varepsilon$$

$$d = \text{mayor de los números } a_0 + \varepsilon\ ,\ a_1 + \varepsilon\ ,\ \ldots\ ,\ a_N + \varepsilon$$

entonces $c \leq a_n \leq d$, para todo $n \geq 0$, y por lo tanto la sucesión es acotada.

Elijamos luego una subsucesión convergente (a_{n_k}) y sea L su limite. Demostraremos que L también es el límite de (a_n).

Sea dado $\varepsilon > 0$ y elijamos N tal que si m y $n \geq N$ entonces

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2$$

y de $L = \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$, existe M tal que si $k \geq M$ entonces

$$|L - a_{n_k}| < \varepsilon/2$$

en particular si $P = n_k$, con k = mayor de los números N y M, se tiene $P = n_k \geq k \geq N$ y $k \geq M$; luego

$$|a_P - a_n| < \varepsilon/2\ ,\quad \text{para todo } n \geq P$$

y

$$|L - a_P| < \varepsilon/2$$

de donde $|L - a_n| \leq |L - a_P| + |a_P - a_n| < \varepsilon$.

para todo $n \geq P$.

Por lo tanto, $L = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Nota. El hecho que las sucesiones que satisfacen el criterio de Cauchy posean límites en $\mathbb{R}$ es en verdad una consecuencia del axioma del supremo. En efecto, la implicación $\Leftarrow$, *sólo si*, se dedujo usando 12.6.2 ($\Leftarrow$ 12.6.1 $\Leftarrow$ axioma del supremo).

12.7 APLICACIONES A LAS FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección demostraremos que las propiedades fundamentales de las funciones continuas (Ver 7.7, CAP7) se deducen del axioma del supremo. Puesto que las aplicaciones de tales propiedades han sido desarrolladas antes, la exposición tiene un carácter teórico.

La siguiente propiedad será utilizada frecuentemente:

12.7.1 Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Entonces para toda sucesión convergente (a_n) de números a_n en $[a,b]$ se cumple

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

PRUEBA. Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; notemos que $L \in [a,b]$, pues $a \le a_n \le b$.

Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en L existe $\delta > 0$ tal que $|L-x| < \delta$, x en $[a,b]$, implica $|f(L)-f(x)| < \varepsilon$; y puesto que L es el límite de (a_n), para $\delta > 0$ existe N tal que

$$\text{si } \; n \ge N \; \text{ entonces } \; |L-a_n| < \delta \; ;$$

luego, $n \ge N$ implica $|f(L)-f(a_n)| < \varepsilon$, y $f(L) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

12.7.2 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Para todo valor y^* entre $f(a)$ y $f(b)$, inclusive, existe x^* en $[a,b]$ tal que $y^* = f(x^*)$.

PRUEBA.

Caso 1. $f(a) \le f(b)$

Sea y^* tal que $f(a) \le y^* \le f(b)$.

Si $y^* = f(a)$ o $y^* = f(b)$, entonces se cumple el resultado con $x^* = a$ o $x^* = b$, respectivamente. Luego podemos suponer que y^* es distinto de $f(a)$ y $f(b)$ y por lo tanto que

$$f(a) < y^* < f(b) \tag{1}$$

Sea $$X = \left\{ x \ / \ f(x) < y^*, \quad x \text{ en } [a, b] \right\}$$

Entonces X es no vacio, pues $a \in X$ por (1), y acotado superiormente por b. Por el axioma del supremo existe x^* en $\mathbb{R}$ tal que x^* = supremo de X.

Es inmediato que $x^* \in [a, b]$. En efecto, $a \le x^*$, por SUP1, y $x^* \le b$, por SUP2. Demostraremos que $y^* = f\left(x^*\right)$.

Aplicando SUP2' sucesivamente con $\varepsilon = 1/n$, $n \ge 1$, podemos hallar a_n en X tal que $x^* - \dfrac{1}{n} < a_n \le x^*$.

Luego, $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ y $f\left(x^*\right) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \le y^*$, pues a_n en X; así $f\left(x^*\right) \le y^*$.

Como $y^* < f(b)$ se debe tener $x^* < b$ y si $N > 1/\left(b - x^*\right)$, $1/N < b - x^*$, $1/n < b - x^*$, para todo $n \ge N$. Sea $x_n = x^* + 1/n$, $n \ge N$; luego $x^* < x_n < b$ y x_n no pertenece a X, o sea $f(x_n) \ge y^*$ y de $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ se tiene ahora

$$f\left(x^*\right) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \ge y^*,$$

esto es $f\left(x^*\right) \ge y^*$.

Y queda demostrado que $f\left(x^*\right) = y^*$.

Caso 2. $\boldsymbol{f(a) > f(b)}$

Sea y^* tal que $f(a) \ge y^* \ge f(b)$.

Definimos la función $g(x) = -f(x)$, $x \in [a, b]$.

Entonces g es continua y $g(a) \le -y^* \le g(b)$.

Por el caso 1, existe x^* en $[a, b]$ tal que $-y^* = g\left(x^*\right)$, de donde $y^* = f\left(x^*\right)$.

12.7.3 TEOREMA DE LOS VALORES MAXIMO Y MINIMO

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existen x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

esto es, $\quad m = f(x_0) = \text{valor mínimo de } f$

y $\quad M = f(x_1) = \text{valor máximo de } f$

En particular $f(x)$ es una función acotada: $|f(x)| \leq C$ para todo x en $[a, b]$, si

$$C = \text{mayor de los números } |M| \text{ y } |m|.$$

PRUEBA. Primero demostraremos que el teorema se cumple para funciones acotadas.

Si $f(x)$ es acotada entonces el conjunto $Y = \{ f(x) \ / \ x \text{ en } [a, b] \}$, formado por los valores de $f(x)$, es acotado superiormente (e inferiormente). Luego existe M = supremo de Y, esto es M satisface

SUP1 $\quad y \leq M$, para todo $y = f(x)$

y SUP2' $\quad$ para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $M - \varepsilon < y \leq M$, en algún y de Y

Para cada $n \geq 1$ por SUP2', para $\varepsilon = 1/n$, podemos hallar y_n en Y tal que

$$M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$$

Puesto que $y_n \in Y$ elegimos a_n en $[a, b]$ tal que $y_n = f(a_n)$, y asi

$$M - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq M \tag{1}$$

para todo $n \geq 1$.

Por 12.6.2 (la sucesión (a_n) es acotada), existe una subsucesión $\left(a_{n_p}\right)$ que converge a algún x^* en $[a, b]$, esto es

$$x^* = \lim_{p \to \infty} a_{n_p} \tag{2}$$

Ahora probaremos que $M = f(x^*)$, y por lo tanto que $f(x^*)$ es en verdad el valor máximo de $f(x)$ en $[a, b]$.

Usando 12.7.1 se tiene $\quad f(x^*) = \lim_{p\to\infty} f(a_{n_p})$

y de (1) también $M = \lim_{p\to\infty} f(a_{n_p})$ pues $\quad \left|M - f(a_{n_p})\right| < \dfrac{1}{n_p} \le \dfrac{1}{p}$

Así, $M = f(x^*)$ y $x_1 = x^*$ da el valor máximo de f

Para probar que existe el valor mínimo de f, aplicamos la parte anterior a la función $g(x) = -f(x)$, que también es continua, y encontramos un x_0 en $[a,b]$ tal que $g(x_0)$ = máximo de g, o sea para todo x en $[a,b]$ se cumple

$$g(x) \le g(x_0)\,, \qquad -f(x) \le -f(x_0), \qquad f(x_0) \le f(x)$$

y por lo tanto $m = f(x_0)$ = mínimo de f en $[a,b]$.

Ahora demostraremos el teorema para el caso general, esto es no asumimos que $f(x)$ sea acotada.

Consideremos la función $g(x) = \dfrac{1}{1+f(x)^2}$, x en $[a,b]$

Entonces $g(x)$ es continua, pues $f(x)$ lo es, y es acotada ya que $0 < g(x) \le 1$, para todo x en $[a,b]$. Por el caso tratado para las funciones acotadas existe x^* en $[a,b]$ tal que $g(x^*)$ es el valor mínimo de $g(x)$, esto es

$$g(x^*) \le g(x) \text{ para todo } x \text{ en } [a,b]$$

de donde $|f(x)|^2 \le |f(x^*)|^2$, $|f(x)| \le C$, con $C = |f(x^*)|$, y por lo tanto $f(x)$ también es acotada. Y aplicando otra vez el caso de las funciones acotadas concluimos que $f(x)$ toma sus valores máximo y mínimo en $[a,b]$.

12.7.4 TEOREMA DE CONTINUIDAD UNIFORME

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ entonces $f(x)$ es uniformemente continua en dicho intervalo, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, que sólo depende de ε, tal que

$$|x-y| < \delta\,,\ x, y \text{ en } [a,b], \text{ implican } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

PRUEBA. Supongamos que la conclusión es falsa y probemos que esto conduce a una contradicción.

Que la conclusión sea falsa significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay un par de números x, y en $[a, b]$, que dependen de δ, tal que $|x - y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

En particular, para $\delta = 1/n$, $n \geq 1$, existen x_n, y_n en $[a, b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \tag{1}$$

Puesto que los elementos de la sucesión (x_n) se encuentran en el intervalo $[a, b]$ existe una subsucesión convergente $\left(x_{n_p}\right)$ con límite L en $[a, b]$.

Sean $x'_p = x_{n_p}$, $y'_p = y_{n_p}$. Tenemos $L = \lim\limits_{p \to \infty} x'_p$ y por (1)

$$|x'_p - y'_p| < \frac{1}{n_p} \leq \frac{1}{p} \quad , \quad |f(x'_p) - f(y'_p)| \geq \varepsilon \tag{2}$$

Luego $\lim\limits_{p \to \infty} (y'_p - x'_p) = 0$, y de $y'_p = x'_p + (y'_p - x'_p)$ también se sigue $\lim\limits_{p \to \infty} y'_p = L$. Puesto que $f(x)$ es continua en L aplicamos 12.7.1 a las dos sucesiones y obtenemos

$$\lim_{p \to \infty} \left[f(x'_p) - f(y'_p)\right] = \lim_{p \to \infty} f(x'_p) - \lim_{p \to \infty} f(y'_p) = f(L) - f(L) = 0$$

y por lo tanto para el valor dado de ε existe p tal que $|f(x'_p) - f(y'_p)| < \varepsilon$, en contradicción con (2).

Por consiguiente, la función $f(x)$ es uniformemente continua en $[a, b]$.