



ANÁLISIS DE EDIFICIOS

Ángel San Bartolomé

ANÁLISIS DE EDIFICIOS

Incluye Diskette de Análisis Estructural

Ángel San Bartolomé



Pontificia Universidad Católica del Perú

Fondo Editorial 1998

ANÁLISIS DE EDIFICIOS

ÁNGEL SAN BARTOLOMÉ



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 1998

Primera Edición, marzo de 1998

Diagramación: Marilú Alvarado V.

Análisis de Edificios

Copyright © por Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Av. Universitaria, cuadra 18, San Miguel. Apartado 1761. Lima 100, Perú. Telfs. 4626390, 4622540, Anexo 220.

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

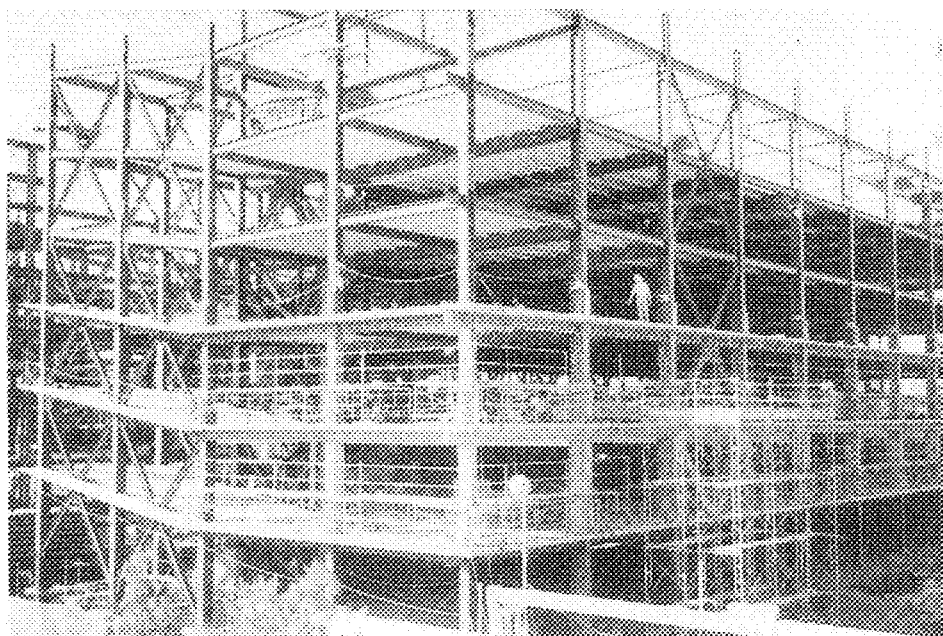
Derechos reservados
ISBN: 9972-42-112-0

Impreso en el Perú - Printed in Peru

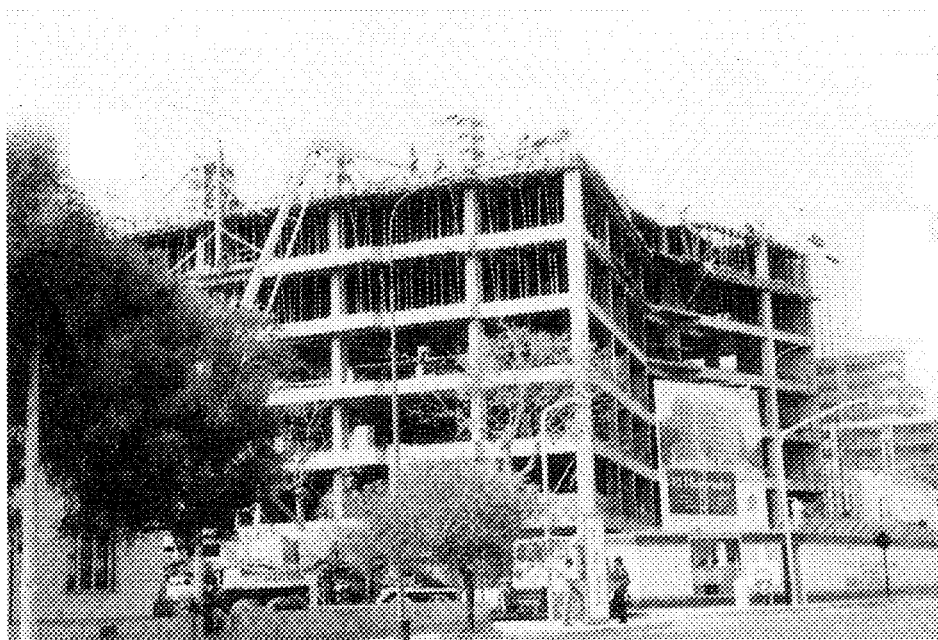
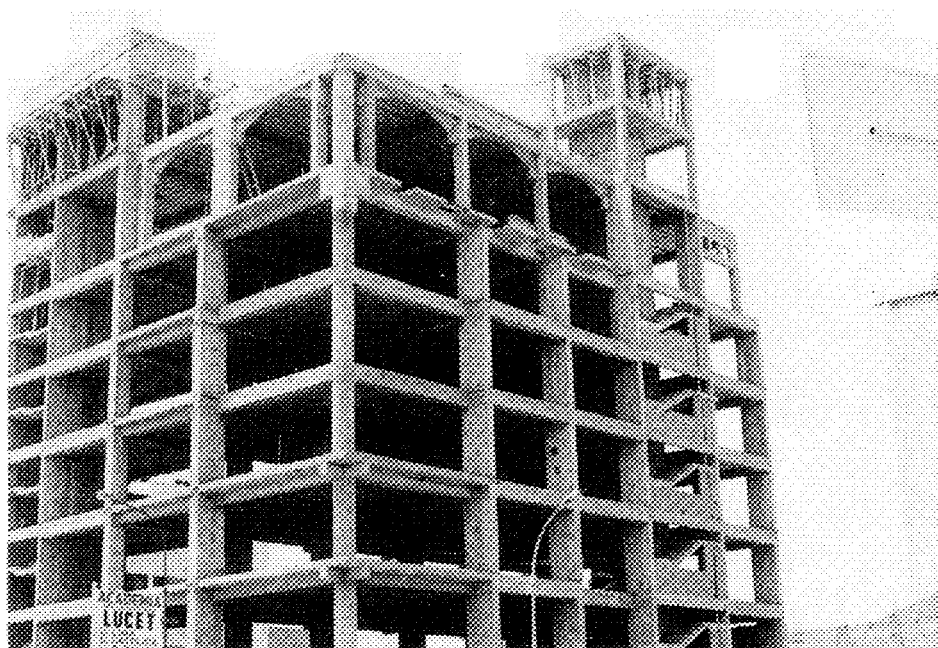
A mis alumnos del curso
Análisis Estructural 2, dictado en la
Facultad de Ciencias e Ingeniería de la
Pontificia Universidad Católica del Perú

Ángel San Bartolomé Ramos

- Ingeniero Civil, graduado en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).
- Estudios de Post-Grado en Ingeniería Antisísmica en el International Institute of Seismology and Earthquake Engineering (IISEE). Building Research Institute (BRI). Tokyo - Japan.
- Estudio Individual en Albañilería Estructural en The Large Scale Structures Testing. Building Research Institute (BRI). Tsukuba - Japan.
- Profesor Principal del Departamento de Ingeniería, Sección Civil -Área de Estructuras- de la Pontificia Universidad Católica del Perú y Asesor de Tesis.
- Investigador en las Áreas de Albañilería Estructural, Adobe, Tapial y Concreto Armado, en el Laboratorio de Estructuras (LEDI) de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Autor del Libro “Albañilería Confinada”. Libro 4 de la Colección del Ingeniero Civil. Consejo Departamental de Lima –Capítulo de Ingeniería Civil– del Colegio de Ingenieros del Perú (CIP). 1992.
- Autor del Libro “Construcciones de Albañilería. Comportamiento Sísmico y Diseño Estructural”. Pontificia Universidad Católica del Perú. Fondo Editorial. 1994.
- Proyectista de Estructuras, antes asociado a la Compañía STRUDA Ings. S.R.L.



EDIFICIOS DE ACERO



EDIFICIOS DE CONCRETO ARMADO

que tenga la estructura ante las distintas solicitaciones. Debe mencionarse que edificios que tuvieron grandes complicaciones en sus formas estructurales llegaron a colapsar, pese a que en su diseño se utilizaron programas refinados de análisis estructural, a diferencia de otros edificios cuya estructura era sencilla y que fueron analizados mediante procesos aproximados de cálculo.

- 3.- Distinguir cuándo los efectos de una cierta deformación repercuten significativamente sobre los esfuerzos.
- 4.- Saber interpretar los resultados del análisis estructural. Cabe mencionar que ha veces ha ocurrido fuertes fallas estructurales en las edificaciones de concreto armado (por ejemplo, en los colegios, tanque elevado de agua y en la zona techada de la tribuna del estadio de Nasca, ante el sismo de 1996), porque el ingeniero constructor y el inspector mal interpretaron los planos estructurales, por su falta de conocimiento acerca de cómo se comportaban esas edificaciones ante los sismos.
- 5.- Analizar estructuras planas. Para esto se darán a conocer varios métodos:
 - Métodos aproximados: Portal y Voladizo (con fines de predimensionamiento). Muto y Ozawa (para el diseño de edificios bajos).
 - Métodos “exactos”: Cross (proceso manual de cálculo). Método Directo de Rigidez (proceso matricial).

Los métodos del Portal y Voladizo sólo proporcionan una estimación de los esfuerzos en las barras de los pórticos sujetos a cargas laterales; aun así, el método del Portal fue empleado para el diseño de uno de los edificios más altos del mundo: el “Empire State”, construido el año 1930 en Nueva York, que hasta la fecha a podido resistir fuertes vientos, sismos leves e incluso el choque de un bombardero B-25 (el año 1945) contra el piso 79.

Los métodos de Muto y Ozawa, este último empleado para solucionar pórticos mixtos compuestos por vigas, columnas y muros de concreto armado o de albañilería estructural, contemplan en cierto grado las deformaciones por flexión y por corte de las barras, proporcionando tanto los desplazamientos como los esfuerzos cuando los pórticos se ven sujetos a carga lateral; puesto que en ambos métodos no se consideran las deformaciones por carga axial que tienen las barras, sus resultados sólo deben ser empleados para el diseño de edificios convencionales de hasta 10 pisos.

El método de Cross puede tener el mismo grado de aproximación que el Método Directo de Rigidez, para lo cual, habría que contemplar todas las deformaciones que tienen las barras en su plano: flexión, corte y axial; sin embargo, este procedimiento de cálculo manual resulta muy tedioso de aplicar en pórticos elevados, por lo que en este libro sólo se le empleará para solucionar estructuras pequeñas.

Por otra parte, el Método Directo de Rigidez es muy laborioso de aplicar manualmente, incluso en estructuras pequeñas, por lo que más bien se le usará computacionalmente. Para este fin, se proporciona una versión de demostración del programa de cómputo “EDIFICIO”, el cual permite resolver edificios compuestos por pórticos planos conectados

PRÓLOGO

En el análisis estructural de las obras civiles no existen métodos exactos de solución, ni siquiera los programas de cómputo más sofisticados, basados en la técnica de Elementos Finitos, proporcionan resultados "exactos"; esto se debe a que existen una serie de incertidumbres que se presentan no sólo en la solicitud, sino también en el modelaje estructural.

Por ejemplo, en el caso del terremoto de México (1985), también en el de Kobe-Japón (1995), las fuerzas sísmicas sobrepasaron las cargas reglamentarias, produciéndose el colapso de muchas edificaciones, por lo cual, hubo que modificar los códigos respectivos. Asimismo, en los edificios de concreto armado no se acostumbra contemplar los efectos del proceso constructivo, sin embargo, es muy distinto (especialmente en los edificios altos) aplicar las cargas de peso propio de una sola vez sobre el edificio ya construido que colocarlas paulatinamente conforme el edificio va construyéndose.

En cuanto al modelaje estructural, generalmente se obvian los problemas de interacción tabique-pórtico, losa-viga y suelo-estructura, empleando (respectivamente) sistemas aporticados con paños libres de tabiques, vigas de sección rectangular y elementos verticales (columnas, placas, muros de albañilería, etc.) empotrados en su base; algunas veces, estas simplificaciones conducen a resultados que están fuera de la realidad. También, es costumbre utilizar un sólo módulo de elasticidad para todo el edificio (que en realidad puede variar de una barra a otra o incluso dentro de la misma barra), despreciar las microfisuras (que en los elementos de concreto armado podrían modificar sustancialmente al momento de inercia de la sección transversal), despreciar los cambios bruscos de la sección transversal de las barras en la zona de los nudos, etc.

Por todas las incertidumbres señaladas y otras que sería muy largo numerarlas, es que en este libro se trata de dar énfasis a ciertos aspectos, con el afán de mejorar el comportamiento estructural de los edificios. Por lo que nuestro objetivo es que el lector adquiera los suficientes conocimientos que le permitan:

- 1.- Modelar o idealizar matemáticamente a las estructuras, tratando de representarlas de la manera más real posible. Esto es algo que se irá describiendo paulatinamente, a través de los ejemplos que se aborden en este libro.
- 2.- Estructurar edificios. De una adecuada estructuración que se proporcione a los edificios, buscando principalmente la sencillez a fin de comprender cómo se transmiten las cargas de un elemento estructural a otro, dependerá el comportamiento

por diafragmas rígidos (losas del techo), cuya teoría se describe en los capítulos 8 y 9 del libro; adicionalmente, se proporcionan otros programas que permiten:

- a.- Dibujar la envolvente de momento flector en vigas (VIGA1);
- b.- Calcular la rigidez al giro, el factor de transporte y los momentos de empotramiento en barras de sección variable (KFU);
- c.- Reproducir en forma aproximada los efectos del proceso constructivo (PROCONST);
- d.- Determinar el momento de inercia y el área de una sección transversal compuesta por una serie de rectángulos (INERCIA);
- e.- Resolver parrillas sujetas a cargas perpendiculares a su plano (PARRILLA); y,
- f.- Solucionar armaduras planas compuestas por nudos articulados (ARMADURA).

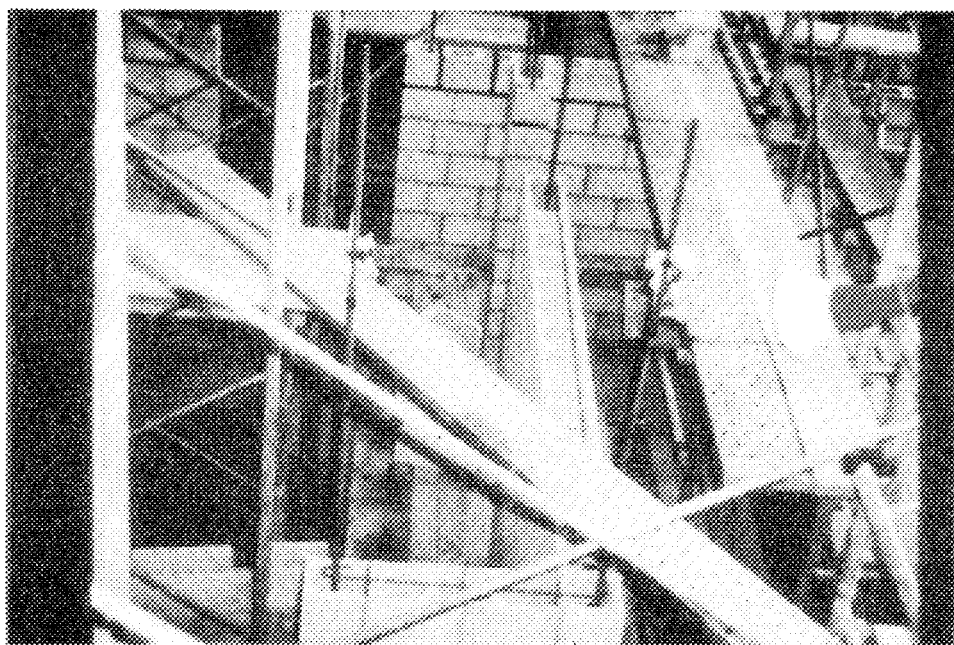
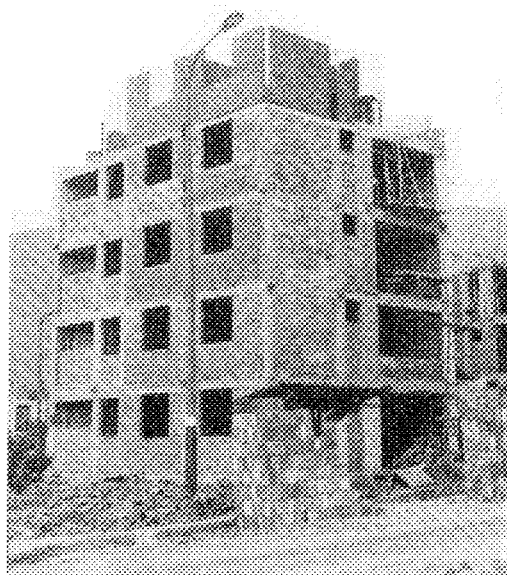
Las teorías que emplean estos programas se encuentran descritas en los capítulos correspondientes de este libro y los manuales de uso, así como los ejemplos respectivos, aparecen en archivos de texto contenidos en un sólo diskette.

Cabe resaltar que los procedimientos manuales de cálculo constituyen la base que nos permite comprender y “sentir” el comportamiento de una estructura, así por ejemplo, nos obliga a tener una idea de la configuración deformada que adoptará la estructura y los tipos de deformación que la gobiernan, es decir, estos procedimientos son métodos formativos con los cuales tenemos que agudizar nuestro ingenio para simplificar el modelo estructural; en cambio, estas simplificaciones no son necesarias con el procedimiento matricial, ya que la computadora es la que “trabaja” aplicando “fríamente” las matemáticas sobre la estructura completa.

Por la razón descrita en el párrafo anterior, el autor considera que los alumnos del pre-grado deben tener un amplio conocimiento de los procedimientos manuales y nociones generales del procedimiento matricial, que les permitan usar los programas de cómputo existentes, a no ser que el alumno decida especializarse en el diseño estructural, en cuyo caso, en el último curso de la carrera, así como en la maestría, debe enseñarse con mayor profundidad el procedimiento matricial.

Finalmente, cabe señalar que esta publicación está basada en los apuntes de clase del curso “Análisis Estructural 2”, dictado por el autor en la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú, y los problemas propuestos formaron parte de los exámenes y prácticas de evaluación académica en los últimos tres años, por lo que es a mis alumnos a quienes dedico este ejemplar.

Ángel San Bartolomé Ramos



**EDIFICIO DE ALBAÑILERÍA CONFINADA (vista superior)
Y ARMADA (vista inferior)**

ÍNDICE

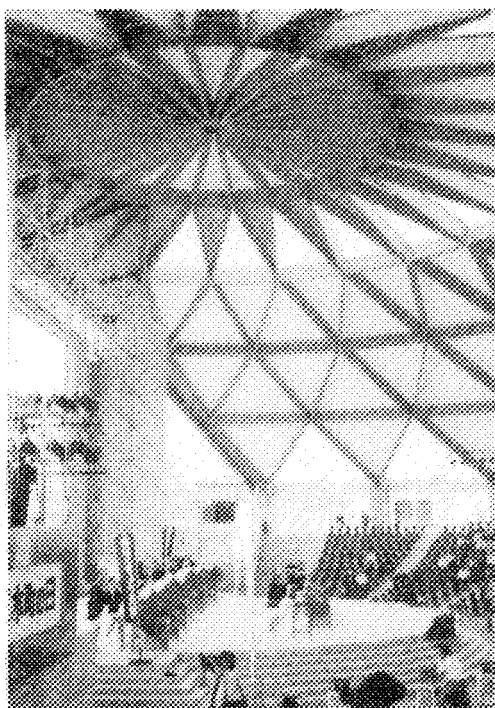
	Pág.
1. <i>Metrado de Cargas Verticales</i>	1
1.1. Tipos de Carga.	2
1.2. Norma de Cargas E-020.	3
1.3. Características del Ejemplo.	8
1.4. Aligerados Unidireccionales.	13
1.5. Losas Armadas en Dos Sentidos y Tanque de Agua.	14
1.6. Vigas.	17
– Viga Apoyada Sobre Otra Viga.	21
– Vigas que Soportan Losas Armadas en Dos Sentidos y Vigas Pared.	24
1.7. Columnas.	28
1.8. Escaleras.	32
1.9. Placas.	35
 2. <i>Método de Hardy Cross</i>	 41
2.1. Nomenclatura y Convención de Signos.	41
2.2. Rigidez al Giro (K_{ij}) y Factor de Transporte (f_{ij}).	43
2.3. Caso Particular de Barras Prismáticas con Eje Recto, Deformables por Flexión. Reducción de Grados de Libertad por Condición de Extremo. Concepto de Barra Equivalente.	44
2.4. Rigidez al Giro Relativa o Coeficiente de Rigidez a Flexión (k_{ij}).	47
2.5. Coeficiente de Distribución de Momentos (α_{ij}), Momento Distribuido (D_{ij}), Momento Transportado (T_{ij}) y Momentos de Empotramiento (u_{ij}).	48
2.6. Proceso de Liberación Alterna. Ejemplo Algebraico de Ilustración.	52
– Solución de un Aligerado.	54
2.7. Métodos para el Trazado del Diagrama de Momento Flector.	58
2.8. Proceso de Liberación Nudo por Nudo y de Liberación Simultánea.	60
– Ejemplos de Aplicación.	62

2.9. Estructuras Simétricas en Forma.	63
– Carga Simétrica.	63
– Carga Antisimétrica.	64
– Ejemplos de Aplicación.	64
– Problema Propuesto.	68
3. <i>Análisis Simplificado de Vigas Sujetas a Carga Vertical</i>	69
3.1. Hipótesis Simplificatoria de la Norma E-060.	69
– Ejemplo de Aplicación.	70
3.2. Máximos Momentos Flectores en Vigas de Edificios.	72
– Envolvente de Momento Flector.	75
– Programa VIGA1.	77
3.3. Coeficientes de la Norma E-060.	78
3.4. Problemas Propuestos.	79
4. <i>Estructuras que se Desplazan Linealmente</i>	
<i>Método de Cross Indirecto</i>	81
4.1. Identificación de los Grados de Libertad Traslacionales.	81
4.2. Aplicación Algebraica del Método de Cross Indirecto. Matriz de Rigidez y de Flexibilidad Lateral.	82
4.3. Ejemplo de Aplicación.	86
4.4. Problemas Propuestos.	90
5. <i>Casos Especiales</i>	93
5.1. Momentos de Empotramiento en Función de K_{ij} y f_{ij}.	93
5.2. Estructuras Compuestas por Barras de Sección Variable	97
– Determinación de K_{ij} , f_{ij} .	98
– Tablas de la PCA.	101
– Determinación del Peralte y de la Longitud de la Cartela.	102
– Ejemplos de Aplicación.	104
– Programa KFU.	108
– Problemas Propuestos.	111
5.3. Efectos de la Deformación por Corte en Barras Prismáticas	113
– Influencia del Esfuerzo Cortante en una Viga Simplemente Apoyada.	114
– Modificación de K_{ij} , f_{ij} y u_{ij} .	115
– Modelaje de Placas o Muros de Corte.	120
– Pórticos Mixtos Sujetos a Carga Lateral. Longitud del Brazo Rígido.	123

– Pórticos Mixtos Sujetos a Carga Vertical.	126
– Ejemplo de Aplicación.	127
– Albañilería Armada y Confinada. Interacción Tabique-Pórtico.	133
– Problemas Propuestos.	136
5.4. Efectos de la Deformación Axial en Barras Prismáticas	138
– Armaduras con Nudos Rígidos.	138
– Pórticos de Edificios de Concreto Armado:	139
Solicitación Obrando Sobre la Estructura ya Construida. Ejemplo.	140
Solicitación Obrando Sobre la Estructura en su Etapa Constructiva.	143
– Programa PROCONST para Simular el Proceso Constructivo.	148
– Problemas Propuestos.	149
5.5. Sistemas Hiperestáticos con Vigas Curvas	151
Determinación de K_{ij} , f_{ij} y u_{ij} .	151
– Ejemplo de Aplicación.	154
– Pórticos con Vigas Quebradas.	157
– Problemas Propuestos.	159
5.6. Apoyos Elásticos	160
– Interacción Suelo-Estructura.	160
– Parrillas Simples. Ejemplo.	164
– Resortes Helicoidales Incompatibles en Giro con las Barras.	169
– Problemas Propuestos.	171
5.7. Efectos de Temperatura	174
– Cambio Uniforme de Temperatura.	174
– Cambio Diferencial (o Gradiente) de Temperatura.	175
– Problema Propuesto.	176
6.- Análisis Sísmico Aproximado de Edificios	177
6.1. Método del Portal	179
– Ejemplo de Aplicación.	179
6.2. Método del Voladizo	180
– Ejemplo de Aplicación.	181
6.3. Método de Muto	183
– Rigidez Lateral.	183
– Cálculo de Desplazamientos y Cortantes. Columnas en Paralelo.	186
– Pórticos con Mezzanine y Vigas de Entrepiso. Columnas en Serie.	187
– Determinación de Esfuerzos.	188
– Ejemplos de Aplicación.	190
– Problema Propuesto.	194
6.4. Análisis Sísmico Traslacional de Edificios Aporticados	195

6.5. Interacción Pórtico-Placa	197
6.6. Método de Ozawa	201
– Nomenclatura y Fórmulas que Emplea el Método.	201
– Caso en que Existen Placas de Diferentes Características.	206
– Ejemplo de Aplicación.	207
– Problemas Propuestos.	211
6.7. Corrección por Torsión en un Entrepiso de un Edificio	213
– Centro de Rigidez Lateral (CR).	213
– Centro de Carga (CQ).	214
– Momento Torsor Reglamentario.	217
– Ejemplo de Aplicación.	218
– Edificios con Ejes Inclinados en Planta.	221
– Problemas Propuestos.	223
 7. Nociones Generales Sobre Estructuración de Edificios	 225
7.1. Estructuración por Carga Vertical	226
– Aligerados.	226
– Ductos y Diafragmas Flexibles.	228
– Otros Sistemas de Techados para Ambientes con Grandes Luces.	232
– Escaleras.	234
– Problemas Propuestos.	237
7.2. Estructuración por Carga Sísmica	239
– Rigidez, Continuidad Vertical, Hiperestacidad y Efecto P- δ	241
– Tabiques y Alféizar de Albañilería.	245
– Simetría y Juntas Sísmicas.	248
– Problemas Propuestos.	251
7.3. Cimentaciones	253
– Problema Propuesto.	258
 8. Introducción a la Solución Matricial de Estructuras Planas	
Método Directo de Rigidez	259
 8.1. Cargas Nodales { Q }	 260
8.2. Solución del Estado Complementario	263
– Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global [R]	263
– Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales [k']	267
– Transformación de la Matriz de Rigidez de Barra del Local al Global.	269
– Cálculo de Desplazamientos, Reacciones y Fuerzas de Sección.	273
8.3. Resumen del Método Directo de Rigidez.	275

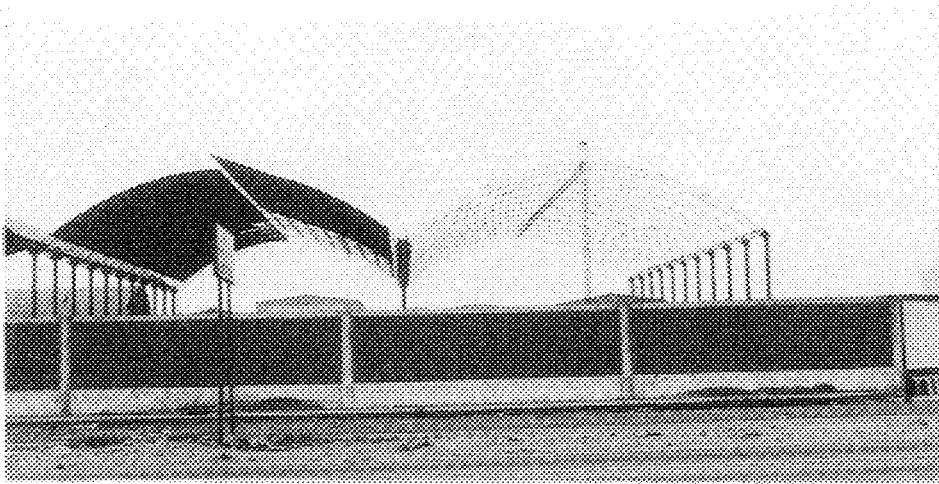
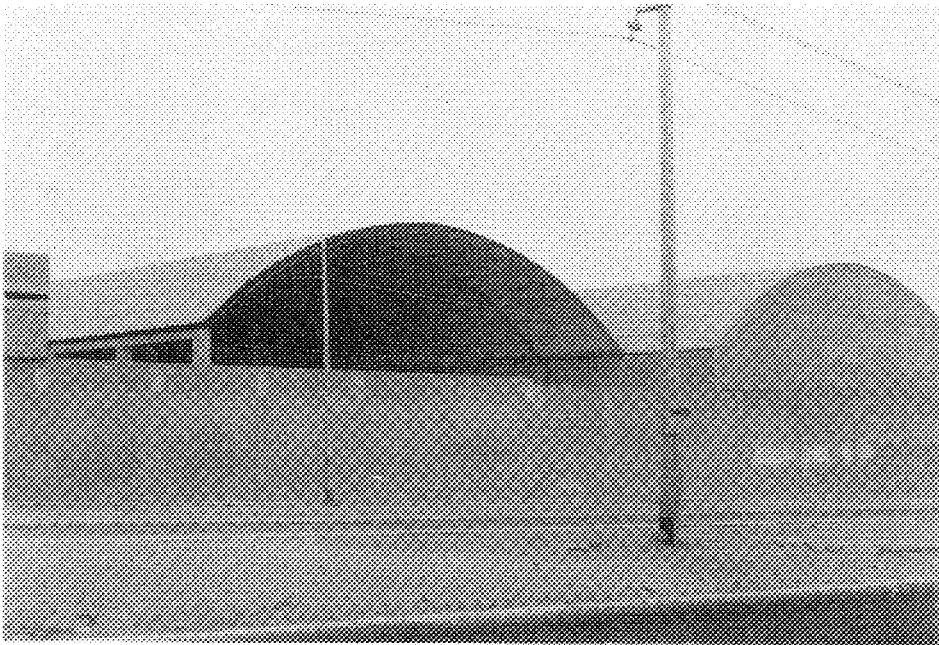
8.4. Ejemplos de Aplicación.	276
– Armadura.	276
– Viga Continua.	281
8.5. Programas de Computación.	283
– Programa ARMADURA.	283
– Programa PARRILLA.	283
8.6. Problemas Propuestos.	285
 9. Análisis Matricial de Edificios Sujetos a Sismos	
Programa EDIFICIO	287
9.1. Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Lateral del Edificio.	290
9.2. Cálculo de Desplazamientos y Fuerzas en los Pórticos.	295
9.3. Ejemplo de Aplicación.	297
 ANEXO 1: Tablas de la PCA	307
 ANEXO 2: Tablas de Muto	313
 ANEXO 3: Matriz de Rigidez de un Elemento Finito Triangular Plano	317



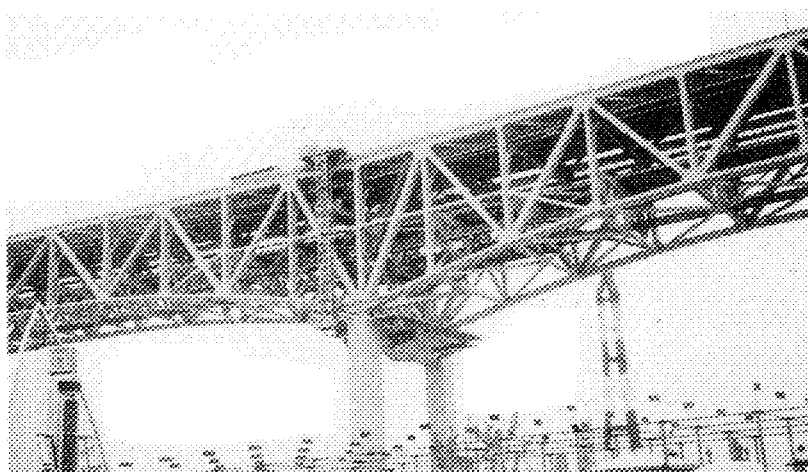
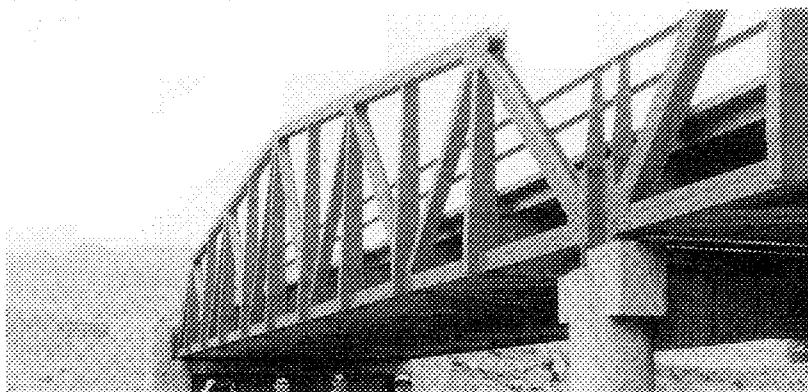
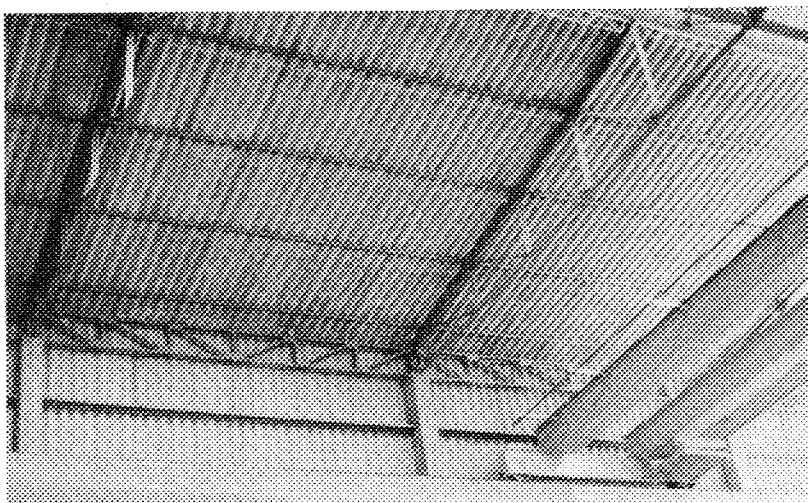
EDIFICACIONES DE MADERA

REFERENCIAS

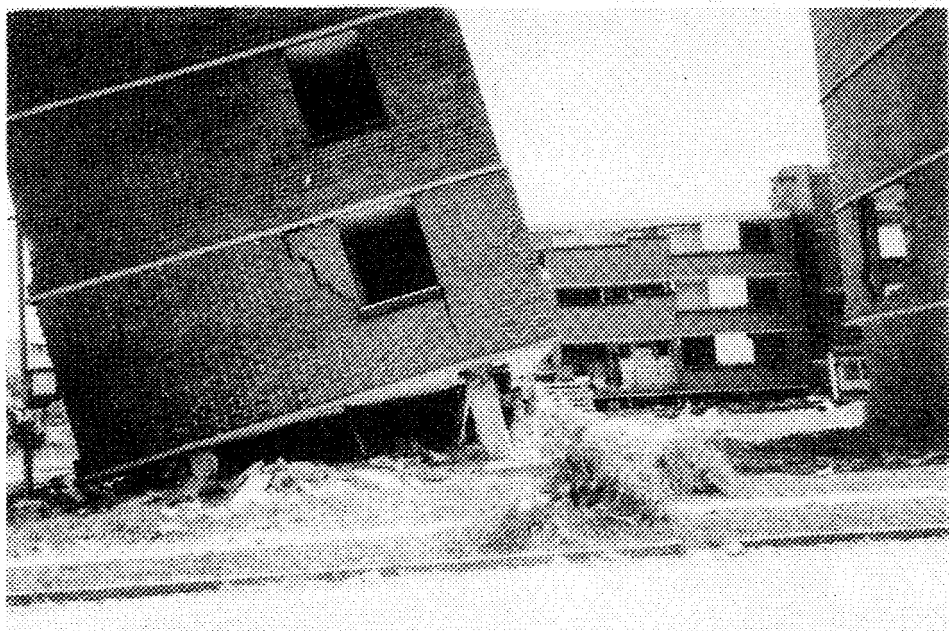
1. Distribución de Momentos. Gere.
2. Método de Cross. Charon.
3. Structural Engineering. White, Gergely and Sexsmith. WILEY.
4. Normas de Cargas E-020. Normas de Concreto Armado: E-060 y ACI-318-95. Normas de Diseño Sismo-resistente E-030.
5. Aseismic Design of Buildings. K. Muto. MARUZEN.
6. Cálculo de Edificios de Concreto Armado. K. Muto.
7. Estructuración y Diseño de Edificaciones de Concreto Armado. A. Blanco. Libro 2 Colección del Ingeniero Civil 1990-1991. Consejo Departamental de Lima, Colegio de Ingenieros del Perú.
8. Construcciones de Albañilería -Comportamiento Sísmico y Diseño Estructural. A. San Bartolomé. Fondo Editorial PUCP.
9. Análisis Estructural. Jeffrey Laible. Mc GRAW HILL.
10. Análisis Elemental de Estructuras. Norris, Wilbur, Utku. Mc GRAW HILL.
11. Analisis de Estructuras. H. H. West. CECSA.
12. Theory of Structures. Timoshenko & Young. Mc GRAW HILL.
13. Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos. D. J. Dowrick.
14. Análisis Sísmico de Edificios con Muros Rigidizantes. Bazán. Revista IMCYC, Vol. XVI, No. 91.
15. Foundation Design. J. Bowles. Mc GRAW HILL.
16. El Terremoto de Nasca del 12 de Noviembre de 1996. D. Quiun, A. San Bartolomé, D. Torrealva y L. Zegarra. Pontificia Universidad Católica del Perú. Departamento de Ingeniería. Sección Ingeniería Civil. Publicación DI-97-01, 1997.



ARCOS PARABÓLICOS DE CELOSÍA



TIJERALES METÁLICOS



**DEFECTOS ESTRUCTURALES EN SISTEMAS APORTICADOS:
COLUMNA CORTA (vista superior) Y PISO BLANDO (vista inferior).**

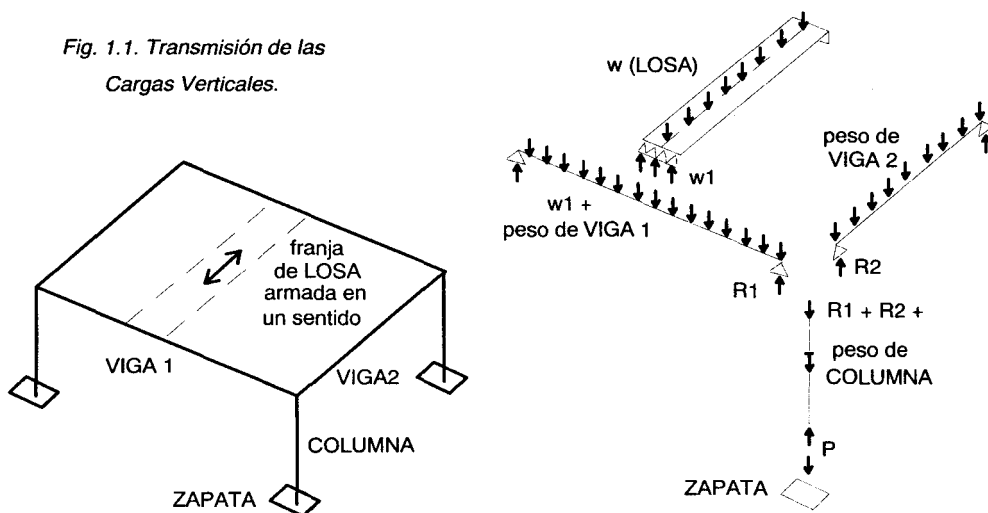
1

METRADO DE CARGAS VERTICALES

El metrado de cargas es una técnica con la cual se estiman las cargas actuantes sobre los distintos elementos estructurales que componen al edificio. Este proceso es aproximado ya que por lo general se desprecian los efectos hiperestáticos producidos por los momentos flectores, salvo que estos sean muy importantes.

Como regla general, al metrar cargas debe pensarse en la manera como se apoya un elemento sobre otro; por ejemplo (ver la Fig. 1.1), las cargas existentes en un nivel se transmiten a través de la losa del techo hacia las vigas (o muros) que la soportan, luego, estas vigas al apoyar sobre las columnas, le transfieren su carga; posteriormente, las columnas transmiten la carga hacia sus elementos de apoyo que son las zapatas; finalmente, las cargas pasan a actuar sobre el suelo de cimentación.

Fig. 1.1. Transmisión de las Cargas Verticales.



Antes de proceder con un ejemplo que ilustre el metrado de cargas verticales en los edificios, se indicará los tipos de cargas que suelen actuar en estas construcciones.

1.1. Tipos de Carga

En general, las cargas (o solicitaciones) que pueden actuar en un edificio clasifican en los siguientes tipos: Cargas Estáticas, Cargas Dinámicas y Otras Solicitaciones. Estas cargas se definen de la siguiente manera:

- 1.- **CARGAS ESTÁTICAS.** Son aquellas que se aplican lentamente sobre la estructura, lo cual hace que se originen esfuerzos y deformaciones que alcanzan sus valores máximos en conjunto con la carga máxima. Prácticamente, estas solicitaciones no producen vibraciones en la estructura, y a su vez clasifican en:
 - a.- **Cargas Permanentes o Muertas.** Son cargas gravitacionales que actúan durante la vida útil de la estructura, como por ejemplo: el peso propio de la estructura y el peso de los elementos añadidos a la estructura (acabados, tabiques, maquinarias para ascensores y cualquier otro dispositivo de servicio que quede fijo en la estructura).
 - b.- **Carga Viva o Sobrecarga.** Son cargas gravitacionales de carácter movable, que podrían actuar en forma esporádica sobre los ambientes del edificio. Entre estas solicitaciones se tiene: al peso de los ocupantes, muebles, nieve, agua, equipos removibles, puente grúa, etc. Las magnitudes de estas cargas dependen del uso al cual se destinen los ambientes.
- 2.- **CARGAS DINÁMICAS.** Son aquellas cuya magnitud, dirección y sentido varían rápidamente con el tiempo, por lo que los esfuerzos y desplazamientos que originan sobre la estructura, también cambian con el tiempo; cabe indicar que el instante en que ocurre la máxima respuesta estructural, no necesariamente coincide con el de la máxima solicitación (Fig. 1.2). Estas cargas clasifican en:
 - a.- **Vibraciones Causadas por Maquinarias.** Cuando las máquinas vibratorias no han sido aisladas de la estructura principal, sus vibraciones pueden afectar tanto a la estructura que las soporta como a las estructuras vecinas.
 - b.- **Viento.** El viento es un fluido en movimiento; sin embargo, para simplificar el diseño, se supone que actúa como una carga estática sobre las estructuras convencionales, pero, para estructuras muy flexibles (puentes colgantes, chimeneas, etc.) es necesario verificar que su período natural de vibrar no coincida con el de las ráfagas de viento, de lo contrario, podría ocurrir la resonancia de la estructura.
 - c.- **Sismos.** Las ondas sísmicas generan aceleraciones en las masas de la estructura y por lo tanto, fuerzas de inercia que varían a lo largo del tiempo; sin embargo, las estructuras convencionales pueden ser analizadas empleando cargas estáticas equivalentes a las producidas por el sismo.
 - d.- **Cargas Impulsivas.** Son aquellas que tienen corta duración (dt), por ejemplo: las explosiones, ver la Fig. 1.2. Después que esta solicitación culmina, se produce el movimiento en vibración libre de la estructura.

I.- ALIGERADOS

Cuando los techos aligerados tienen las medidas tradicionales indicadas en la Fig. 1.3, y cuando se emplea bloques huecos de arcilla (30x30 cm), puede utilizarse las siguientes cargas de peso propio, expresadas en kilogramos por metro cuadrado de área en planta:

t(cm)	w(kg/m ²)
17	280
20	300
25	350
30	420
35	475

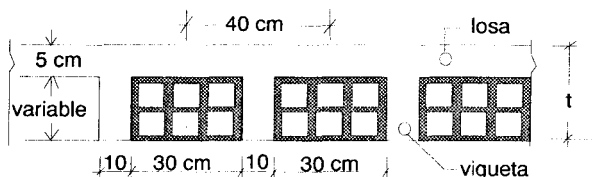


Fig. 1.3. Aligerado Tradicional.

En cambio, si se utilizara bloques tubulares de concreto vibrado, o si el espesor de la losa superior o del nervio de la vigueta cambiasen con relación a los empleados en el aligerado tradicional, el peso propio deberá obtenerse empleando las cargas unitarias (en kg/m³) especificadas en la Norma E-020.

II.- ACABADOS y COBERTURAS

Las siguientes cargas de peso propio (para acabados y coberturas convencionales) se proporcionan en kilogramos por metro cuadrado de área en planta.

Acabados (con falso piso): 20 kg / m² por centímetro de espesor (usualmente 5 cm)

Cobertura con Teja Artesanal: 160 kg / m²

Pastelero asentado con barro: 100 kg / m²

Plancha de asbesto-cemento: 2.5 kg / m² por milímetro de espesor



III.- MUROS DE ALBAÑILERÍA

Para los muros estructurales y tabiques construidos con ladrillos de arcilla o sílico-calcáreos, puede emplearse las siguientes cargas de peso propio, expresadas en kilogramos por metro cuadrado de área del muro por centímetro de espesor del muro, incluyendo el tarrajeo:

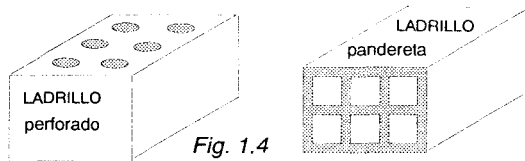
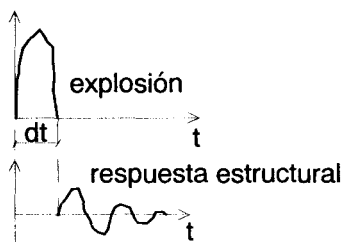


Fig. 1.4

Unidades Sólidas o con pocos huecos (para muros portantes): 19 kg / (m² x cm)

Unidades Huecas Tubulares (Pandereta, para tabiques, Fig. 1.4): 14 kg / (m² x cm)

Fig. 1.2.

Cargas Impulsivas.

- 3.- **OTRAS SOLICITACIONES.** Aparte de las cargas descritas existen otras solicitaciones que pueden comprometer a la estructura y que, por lo tanto, deben contemplarse en el diseño. Ejemplo de estas solicitaciones son: el asentamiento de los apoyos, el cambio uniforme o diferencial de temperatura, los empujes de tierra, el deslizamiento del suelo, las tensiones residuales, los preesfuerzos, el fuego, las subpresiones de agua, las contracciones por secado del concreto, etc.

La intención de este libro es analizar los edificios sujetos a solicitaciones convencionales, básicamente a cargas estáticas (incluso los efectos sísmicos se tratarán como cargas estáticas equivalentes), por lo que de presentarse casos fuera de lo común, el lector deberá recurrir a libros y normas especializadas.

1.2. Norma de Cargas E-020

En la Norma Peruana de Cargas E-020 se especifica las cargas estáticas mínimas que se deben adoptar para el diseño estructural; asimismo, se proporciona las cargas estáticas equivalentes producidas por el viento, mientras que más bien las cargas sísmicas se especifican en las Normas de Diseño Sismo-resistente (E-030). Esas cargas se denominan "cargas de servicio" porque son las que realmente actúan en el edificio, sin producirle fallas o fisuras visibles, a diferencia de las "cargas últimas" que son cargas ficticias obtenidas al amplificar por ciertos factores a las "cargas de servicio", con el objeto de diseñar en condición de "rotura" a los distintos elementos estructurales.

El propósito de este acápite es complementar la Norma E-020, agregando algunas cargas de uso común que figuraban en la Norma "Cargas" del Reglamento anterior, así como aclarar algunos conceptos de la Norma vigente.

Cabe también mencionar que en nuestro país las cargas sísmicas predominan sobre las causadas por el viento, salvo que la estructura sea muy liviana (por ejemplo, con techo metálico y cobertura con planchas de asbesto-cemento, calaminas, etc.), o que el edificio esté ubicado en una zona de baja sismicidad, pero con fuertes vientos (por ejemplo, en la selva); por lo que siendo el objetivo de este libro analizar los casos convencionales, no se tratará los efectos causados por el viento.

Cabe destacar que en la Norma E-020 se proporciona unas cargas equivalentes de peso propio (en kilogramos por metro cuadrado de área en planta) para los casos en que no se conozca la distribución de los tabiques ("tabiquería móvil") en los ambientes del edificio, generalmente, esto ocurre en los edificios destinados a oficinas.

Para hacer uso de la Tabla 2.3 que proporciona la Norma, debe conocerse el tipo de tabique que se va a emplear y su peso por metro lineal. Por ejemplo, para un tabique de albañilería con 15 cm de espesor (incluyendo tarrajeo en ambas caras), construido con ladrillo pandereta, con 2.4 m de altura, se tendría: $w = 14 \times 15 \times 2.4 = 504 \text{ kg / m}$. Luego, ingresando a la Tabla 2.3 de la Norma E-020, se obtiene una carga equivalente igual a 210 kg / m^2 de área en planta, que deberá agregarse al peso propio y acabados de la losa del piso correspondiente.

TABLA 2.3 DE LA NORMA E-020	
Peso del Tabique (kg / m)	Carga Equivalente (kg / m ²)
74 o menos	30
75 a 149	60
150 a 249	90
250 a 399	150
400 a 549	210
550 a 699	270
700 a 849	330
850 a 1000	390

IV.- SOBRECARGA (s/c)

A continuación se muestra algunas de las sobrecargas especificadas en la Norma E-020 en su Tabla 3.2.1. Estas cargas están repartidas por metro cuadrado de área en planta.

TABLA 3.2.1 DE LA NORMA E-020		
USO	AMBIENTE	S/C (kg / m ²)
Bibliotecas (*)	Sala de Lectura	300
	Sala de Almacenaje	750
Escuelas (*)	Aulas y Laboratorios	300
	Talleres	350
Hospitales (*)	Cuartos	200
	Sala de Operación y Laboratorios	300
Oficinas (*)	Ambientes Comunes	250
	Sala de Archivos	500
(*)	Corredores y Escaleras	400
Viviendas	(incluye corredores y escaleras)	200
Azoteas Planas	(no utilizable)	100
Baños: emplear la sobrecarga promedio de las áreas vecinas		

V.- REDUCCIÓN DE SOBRECARGA (s/c)

Debido a la poca probabilidad de que todos los ambientes de un edificio (especialmente cuando éste es elevado) estén 100% sobrecargados, la Norma E-020 permite reducir las sobrecargas de diseño, con las siguientes excepciones:

- 1.- Para el diseño de la losa correspondiente a la azotea se trabajará con el 100 % de sobrecarga; sin embargo, la sobrecarga puede reducirse (Tabla 4.2.1 de la Norma) para diseñar las vigas que pertenecen a ese nivel.
- 2.- Para el diseño de los elementos horizontales (losa, vigas, etc.) que se usen para soportar bibliotecas, archivos, vehículos, almacenamientos o similares, se trabajará con el 100% de s/c; mientras que para estos casos, la reducción máxima permitida para el diseño de los elementos verticales (muros, columnas, etc.) es 20%.
- 3.- Para el diseño por punzonamiento de las losas planas sin vigas ("Flat Slab", Fig. 5.3) en su zona de contacto con las columnas, se utilizará el 100% de sobrecarga.

a.- Porcentaje de Sobrecarga en los Elementos Horizontales (Losas, Vigas)

Para el diseño de los elementos horizontales, la sobrecarga indicada en la Tabla 3.2.1 de la Norma podrá reducirse multiplicándola por los factores mostrados en la Tabla 4.2.1.

TABLA 4.2.1 DE LA NORMA E-020			
Zona Contribuyente (m ²)	Relación: Carga Viva / Carga Muerta		
	0.625 o menos	1	2 o más
14.9 o menos	1.00	1.00	1.00
15 a 29.9	0.80	0.85	0.85
30 a 44.9	0.60	0.70	0.75
45 a 59.9	0.50	0.60	0.70
60 o más	0.40	0.55	0.65

La "Zona Contribuyente" (en metros cuadrados), se calcula de la siguiente manera:

- 1.- Para el diseño de las losas (sólidas o aligeradas) armadas en uno o dos sentidos, apoyadas en vigas, se adopta: $\frac{1}{2} L^2$; donde "L" es el lado de menor longitud correspondiente al ambiente en análisis.
- 2.- Para el diseño de las losas sin vigas ("Flat Slab", Fig. 5.3), se adopta la mitad del área del ambiente.
- 3.- Para el diseño de vigas, se adopta el área de la losa que es soportada por la viga en análisis. El cálculo de esa zona de influencia se verá en detalle en el acápite 1.6.

b.- Porcentaje de Sobrecarga en los Elementos Verticales (Muros, Columnas)

En la Norma E-020 se especifica que la sobrecarga existente en la azotea no debe reducirse, mientras que en el penúltimo piso la reducción es 15% y 5% adicional por cada piso sucesivo. Como máximo se permite una reducción de la sobrecarga existente en el piso igual a 50%, mientras que la máxima reducción de sobrecarga es 20% cuando el ambiente está destinado a biblioteca, almacenaje, archivos, estacionamiento o similar.

Esta especificación de la Norma se interpreta como unos coeficientes que multiplican a la sobrecarga existente en el área de influencia en cada nivel del edificio, correspondiente al elemento estructural vertical en análisis, no a la sobrecarga axial acumulada en los entresijos. Estos coeficientes, para un edificio de "N" niveles, son:

NIVEL	AMBIENTE CONVENCIONAL	AMBIENTE ESPECIAL (biblioteca, archivos, etc.)
N	1.00	1.00
N - 1	0.85	0.85
N - 2	0.80	0.80
N - 3	0.75	0.80
N - 7	0.55	0.80
N - 8	0.50	0.80
1	0.50	0.80

VI.- PESOS UNITARIOS

En el Anexo 1 de la Norma E-020 se especifica los pesos unitarios (kg/m³) de diversos materiales, pero, en este libro se muestra tan solo algunos valores de uso común:

MATERIAL	γ (kg/m³)		γ (kg/m³)
ALBAÑILERÍA	Adobe	1600	Ladrillo Sólido 1800
			Ladrillo Hueco 1350
CONCRETO	Armado	2400	Simple 2300
MADERAS	Dura Seca	700	Dura Húmeda 1000
ENLUCIDOS	Cemento	2000	Yeso 1000
LÍQUIDOS	Agua	1000	Petróleo 870
METALES	Acero	7850	Aluminio 2750
	Plomo	11400	Mercurio 13600
OTROS	Mármol	2700	Bloque de Vidrio 1000
	Locetas	2400	Vidrio 2500
	Cemento	1450	Papel 1000
	Tierra	1600	Arena Seca 1600
	Piedra Pómez	700	Hielo 920

1.3. Características del Ejemplo

En las Figs. 1.5 a 1.9 se muestran las plantas así como los cortes respectivos de un edificio destinado a oficinas. Cabe indicar que las vistas en planta deben mirarse de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda, tal como lo señalan los cortes XX y YY, respectivamente.

Este edificio consta de dos pisos típicos con una escalera techada a la altura de la tapa del tanque de agua, y su estructura está compuesta por pórticos de concreto armado. Por otro lado, se ha elegido un edificio muy sencillo (hipotético), pero, con los problemas que suelen presentarse en los edificios reales, tales como la presencia de:

- Escalera, cisterna y tanque de agua.
- Tabiques, alféizar de ventanas y parapetos de albañilería.
- Losas aligeradas unidireccionales y armadas en dos sentidos (Fig. 1.7).
- Tabiques dirigidos en el sentido ortogonal a las viguetas del aligerado (Recepción).
- Placa y viga apoyada sobre otra viga (eje 2).

Las dimensiones de los elementos son las siguientes:

- Losa Aligerada Unidireccional: espesor = $t = 20$ cm.
- Acabados: espesor = $t = 5$ cm.
- Losa Maciza correspondiente al techo de la escalera y tapa del tanque: $t = 15$ cm.
- Columnas: 30×30 cm; excepto las columnas del eje D (30×60 cm).
- Vigas: ancho x peralte (*) = 30×40 cm; excepto: la viga del eje D (30×60 cm), las del techo de la escalera (15×40 cm) y las caras laterales del tanque (15×170 cm).
- Placa del eje 2: espesor = $t = 15$ cm, con ensanches en los extremos de 30×30 cm.
- Escalera: espesor de la garganta = $t = 12$ cm; espesor del descanso = $t = 20$ cm.
- Tanque de Agua y Cisterna: espesor de las caras laterales, tapa y base = $t = 15$ cm.
- Tabiques, Parapetos y Alféizar de Albañilería, construidos con ladrillo pandereta: espesor = $t = 15$ cm, incluyendo tarrajeos en las dos caras.
- Parapetos y Alféizar de Ventanas: altura = $h = 0.95$ m (incluye una viga de amarre de 15×10 cm); excepto en los baños ($h = 2.00$ m, ver la Fig. 1.8).
- Altura piso a techo de los pisos típicos: $h = 2.65$ m (sin acabados: $h = 2.70$ m).

(*) Es una regla estructural proporcionar la sección transversal de las vigas especificando primero su ancho (b) y luego su peralte (d) en el sentido de la flexión: $b \times d$.

La nomenclatura empleada es la siguiente:

D	=	carga permanente o carga muerta (Dead Load)
L	=	sobrecarga o carga viva (Live Load)
NPT	=	nivel del piso terminado

Nota: La carga permanente debe desdoblarse de la sobrecarga debido a que los factores de seguridad que se emplean en cada caso son diferentes; asimismo, esto se hace porque la sobrecarga puede actuar en forma alternada sobre los ambientes del edificio, a diferencia de la carga permanente que es fija.

Las cargas unitarias utilizadas en el metrado se muestran en la Tabla 1.1.

TABLA 1.1. CARGAS UNITARIAS

γ (concreto armado)		=	2400 kg/m ³
γ (agua)		=	1000 kg/m ³
Aligerado (t = 20 cm)		=	300 kg/m ²
Losa maciza:	2400 x 0.15	=	360 kg/m ²
Acabados:	20 x 5	=	100 kg/m ²
Tabiquería móvil en la zona de Oficinas		=	100 kg/m ²
Sobrecargas:	Oficinas y Baños (S.H.)	=	250 kg/m ²
	Hall y Escalera	=	400 kg/m ²
	Azotea plana	=	100 kg/m ²
Columnas:	30 x 60 cm: 2400 x 0.30 x 0.60	=	432 kg/m (eje D)
	30 x 30 cm: 2400 x 0.30 x 0.30	=	216 kg/m
	15 x 15 cm: 2400 x 0.15 x 0.15	=	54 kg/m (arriostra parapetos)
Placa:	2400 x (2x 0.3x 0.3 + 0.15 x 1.0)	=	792 kg/m (eje 2)
Vigas:	30 x 60 cm: 2400 x 0.30 x 0.6	=	432 kg/m (eje D)
	30 x 40 cm: 2400 x 0.30 x 0.4	=	288 kg/m
	15 x 40 cm: 2400 x 0.15 x 0.4	=	144 kg/m
	15 x 170 cm: 2400 x 0.15 x 1.7	=	612 kg/m
	15 x 10 cm: 2400 x 0.15x 0.1	=	36 kg/m (arriostra parapetos)
Albañilería (pandereta):	14 x 15	=	210 kg/m ² de pared
Parapetos y	h = 0.95 m: 210 x 0.85 + 36	=	215 kg/m
Alféizar:	h = 2.00 m: 210 x 1.90 + 36	=	435 kg/m (en S.H.)
Tabiques:	h = 2.7 m 210 x 2.7	=	567 kg/m (en Recepción)
	h = 2.5 m 210 x 2.5	=	525 kg/m (en ejes 1 y C)
	h = 2.3 m 210 x 2.3	=	483 kg/m (en eje D)
Escalera:	Tramo inclinado	=	636 kg/m ²
(acápite 1.8)	Descanso	=	580 kg/m ²

Fig. 1.7.

Techo de Escalera
y Tapa del Tanque

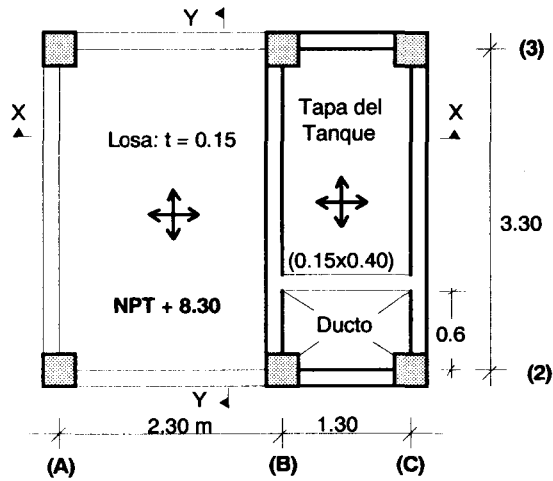
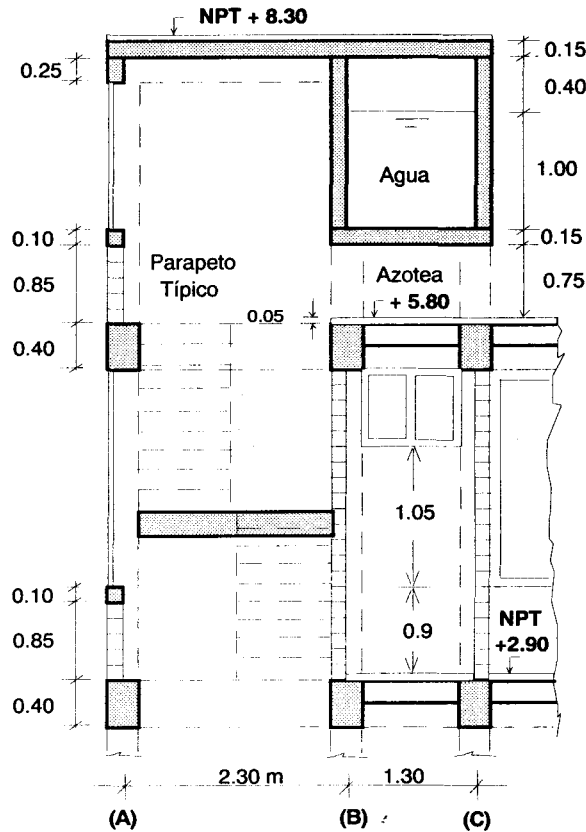


Fig. 1.8.

Corte X-X



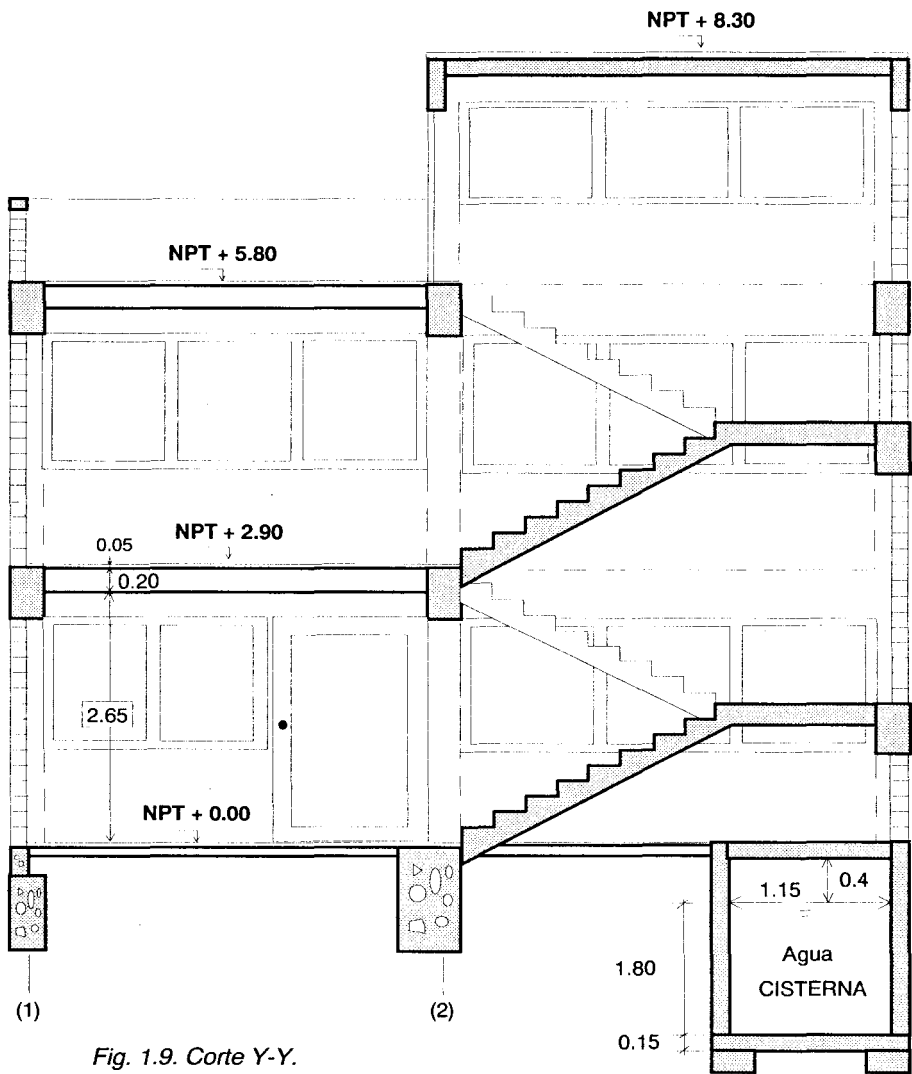


Fig. 1.9. Corte Y-Y.

1.4. Aligerados Unidireccionales

Consideraciones:

- La dirección de armado (sentido en cual están dirigidas las viguetas) se muestran con flechas en las plantas del edificio (Figs. 1.5 y 1.6).
- Tal como se observa en la Fig. 1.3, las viguetas se repiten modularmente cada 40 centímetros, por lo que el metrado de cargas se realiza para una vigueta típica del tramo correspondiente, tomando franjas tributarias de ancho 0.4 m.
- Las vigas funcionan como apoyos simples del aligerado, mientras que la placa del eje 2 (tramo B-C) empotra al aligerado por ser mucho más rígida que las viguetas (ver el acápite 2.6.1).
- Las cargas repartidas (w) se proporcionan en kg/m, mientras que la concentrada (P) en kg. El tabique ubicado en la zona de Recepción (tramo B-C, NPT + 2.90), origina una carga concentrada sobre la vigueta.

AZOTEA (NPT + 5.80) Segundo Nivel

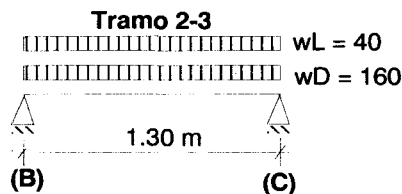
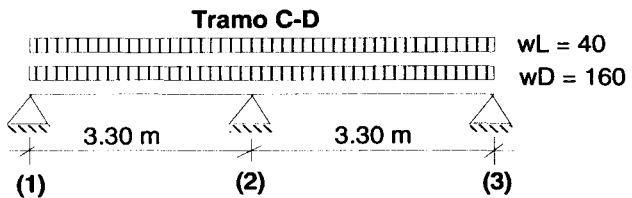
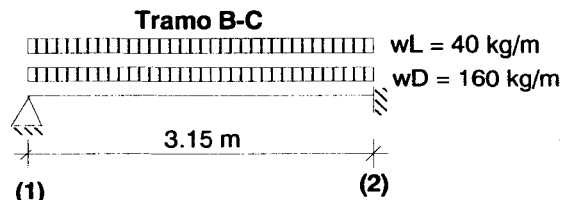
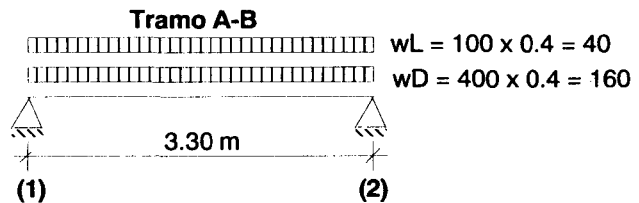
En todos los tramos:

Peso Propio = 300 kg/m²

Acabados = 100 kg/m²

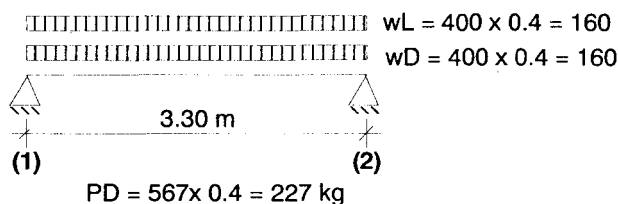
D = 400 kg/m²

L = 100 kg/m²

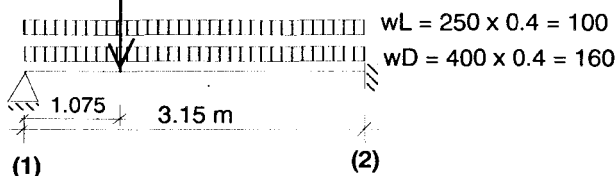


PRIMER NIVEL (NPT + 2.90)**Tramo A-B:**

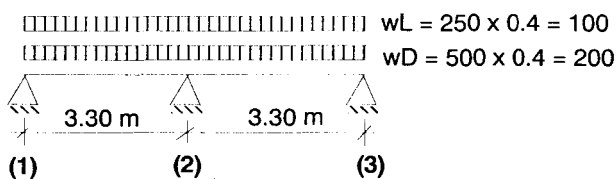
Peso Propio	= 300 kg/m ²
Acabados	= 100 kg/m ²
D	= 400 kg/m ²
L	= 400 kg/m ²

**Tramo B-C:**

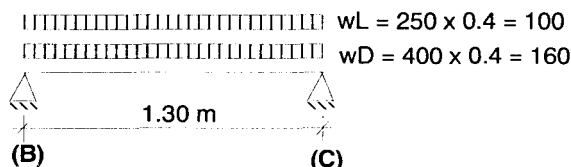
D	= 400 kg/m ²
L	= 250 kg/m ²
Tabique	= 567 kg/m

**Tramo C-D:**

Peso Propio	= 300 kg/m ²
Acabados	= 100 kg/m ²
Tab. Móvil	= 100 kg/m ²
D	= 500 kg/m ²
L	= 250 kg/m ²

**Tramo 2-3:**

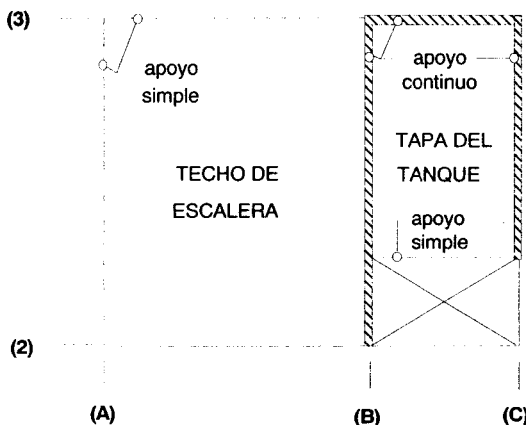
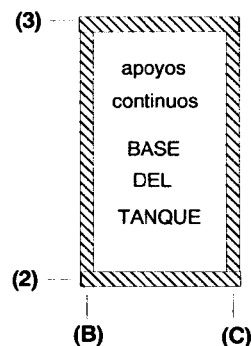
D	= 400 kg/m ²
L	= 250 kg/m ²

**1.5. Losas Armadas en Dos Sentidos y Tanque de Agua**

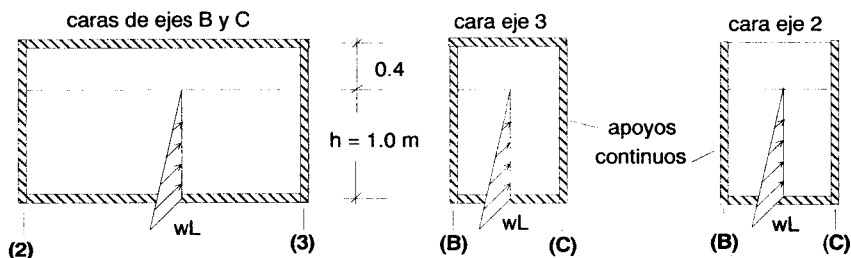
Las losas macizas armadas en dos sentidos sujetas a cargas perpendiculares a su plano, expresadas en kg/m², se analizan recurriendo a programas de Elementos Finitos o empleando tablas que permiten obtener los momentos flectores, los mismos que varían de acuerdo al grado de continuidad que tienen los extremos de la losa y también, con la relación de lados que tiene el ambiente techado.

La losa se asume que está simplemente apoyada sobre las vigas (borde discontinuo), pero, cuando colinda con otra losa (horizontal o verticalmente), se asume que ese borde es continuo.

Cabe mencionar que las caras laterales del tanque (también de la cisterna) trabajan a doble acción: por un lado están sujetas a cargas perpendiculares a su plano producidas por la presión del agua (y de la tierra en el caso de la cisterna), que las hacen trabajar como si fuesen losas, y, por otro lado, su peso propio y las cargas que provienen de la tapa y base del tanque (cargas coplanares) las hacen trabajar como si fuesen vigas de gran peralte ("viga pared", ver el acápite 1.6.2).

a.- TERCER NIVEL (NPT +8.30)Peso Propio = 360 kg/m²Acabados = 100 kg/m²-----
wD = 460 kg/m²wL = 100 kg/m²**b.- TANQUE DE AGUA**Base del Tanquepeso propio = $2400 \times 0.15 = 360$ kg/m²acabados = 100 kg/m²-----
wD = 460 kg/m²wL = peso de agua = $\gamma h = 1000 \times 1 = 1000$ kg/m²Caras Laterales del Tanque

La presión ortogonal del agua, actuante contra las caras laterales del tanque, adopta una distribución triangular, con un valor máximo igual a $wL = \gamma h = 1000$ kg/m². Adicionalmente, estas caras laterales actúan como viga pared (ver el acápite 1.6.2).



Otra manera más conservadora de analizar al tanque de agua consiste en trabajar con franjas de 1 m de ancho. En este caso, se supone que cada franja trabaja como una barra (ancho = 1.00 m, peralte = 0.15 m) a flexión unidireccional. Los modelos correspondientes se muestran en la Fig. 1.10.

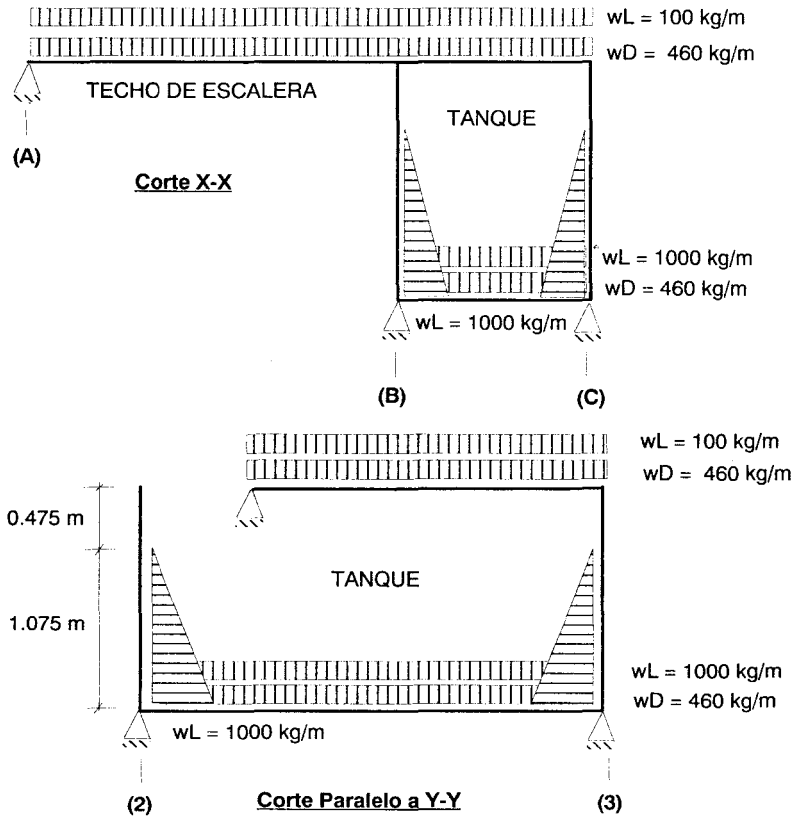


Fig. 1.10. Tanque de Agua Modelado a Través de un Sistema de Barras.

1.6. Vigas

Las vigas son los elementos de apoyo de la losa (aligerada o maciza) y se encuentran sujetas a las cargas que le transmiten la losa, así como a las cargas que directamente actúan sobre ella, tales como su peso propio, peso de tabiques, parapetos, etc.

Para obtener las cargas que provienen de la losa, puede seguirse tres procedimientos:

- a.- Considerar el efecto hiperestático de los momentos flectores que se desarrollan en la losa (M en la Fig. 1.11), para lo cual, habría que resolver previamente al aligerado.

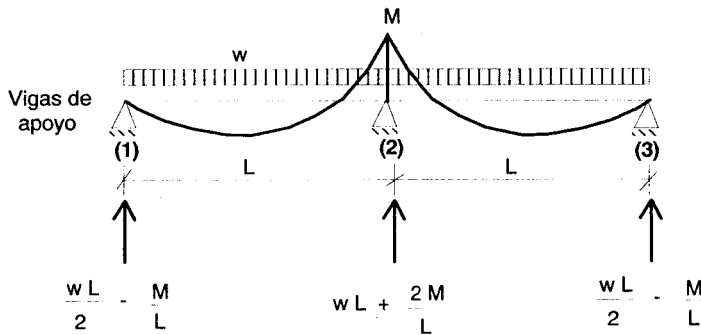


Fig. 1.11. Aligerado Hiperestático. Tramo C-D del Edificio en Estudio.

- b.- Despreciar el efecto hiperestático, suponiendo que cada tramo del aligerado se encuentra biarticulado, lo que también equivale a subdividir el tramo en zonas de influencia (Fig. 1.12).

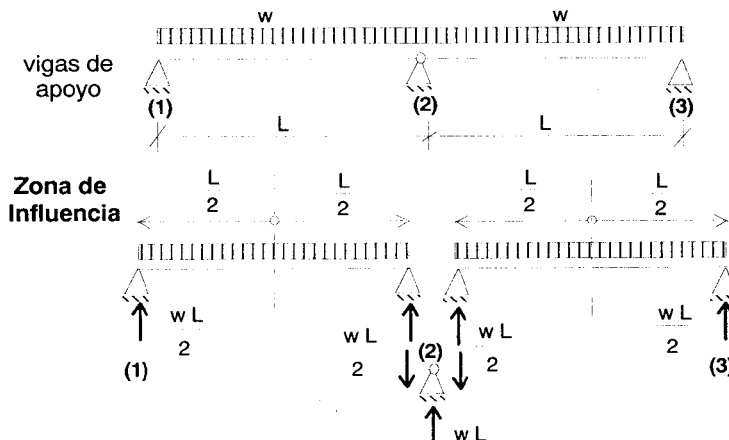
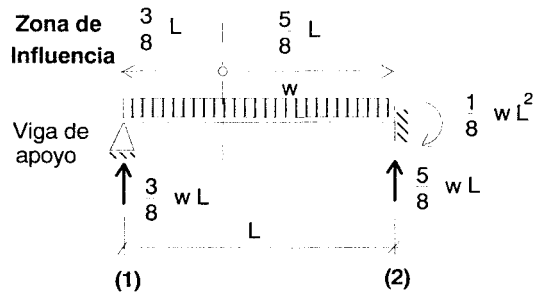


Fig. 1.12. Aligerado Isostático. Tramo C-D del Edificio en Estudio.

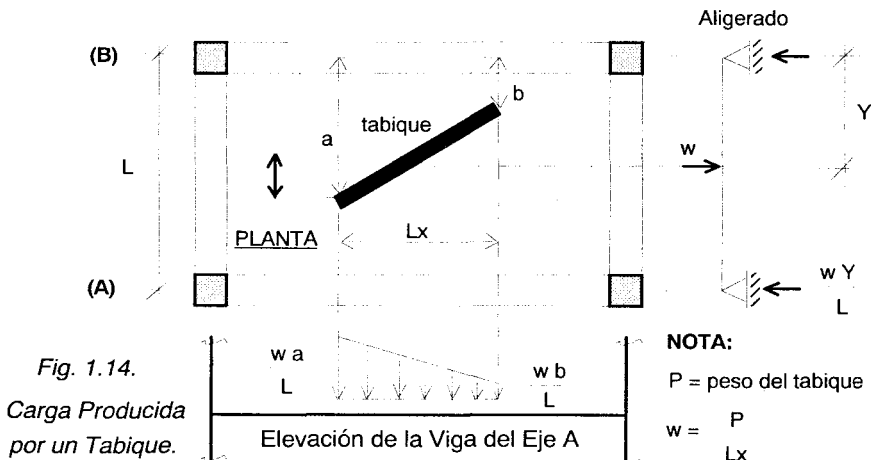
- c.- Estimar la zona de influencia para contemplar en forma aproximada el efecto hiperestático del momento flector. En la Fig. 1.13 se proporciona en forma exacta las longitudes de influencia para el caso del aligerado B-C (empotrado en un extremo y simplemente apoyado en el otro) correspondiente al edificio en estudio.

Fig. 1.13.
Aligerado Hiperestático.
Tramo B-C
(NPT + 5.80) del Edificio
en Estudio.



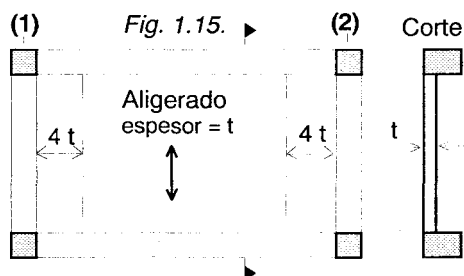
Cabe recordar que las viguetas de un aligerado se metran adoptando franjas modulares de 0.4 m de ancho, por lo que de seguirse el primer procedimiento (solución previa del aligerado), la reacción en las vigas debe dividirse por 0.4, para de esta manera repartir la reacción por unidad de longitud de viga. A esa reacción, deberá agregarse las cargas que directamente actúan en la viga (peso propio, parapetos, etc.). En cambio, cuando se trabaja con "Zonas de Influencia", la carga existente en la losa (en kg/m^2 , producidas por el peso propio, acabados, sobrecarga, etc.) se multiplica por la longitud de influencia, para después agregar las cargas directas.

En caso existiese algún tabique sobre un aligerado unidireccional, la reacción en los apoyos (vigas) del aligerado deberá calcularse por separado y agregarse a las cargas descritas en el párrafo anterior, tal como se ilustra en la Fig. 1.14, donde "w" es el peso total del tabique (P) repartido por unidad de longitud horizontal del tabique (L_x).



Por otro lado, debe mencionarse que el primer procedimiento (solución previa de la losa) no siempre conduce a la determinación exacta de las cargas actuantes en las vigas, debido a que en el modelo estructural se asume que el aligerado está simplemente apoyado sobre las vigas, o empotrado en las placas, mientras que realmente, por la rigidez torsional que tienen las vigas, el apoyo es un semiempotramiento. Por consiguiente, para fines prácticos, es preferible aplicar el segundo o el tercer criterio ("Zona de Influencia").

Adicionalmente, cabe indicar que las vigas paralelas a la dirección de armado del aligerado (ejes 1 o 2 en la Fig. 1.15) absorben parte de la carga existente en la losa, debido a que existe monolitismo al vaciarse ambos elementos al mismo instante, por lo que la deformada del aligerado no es cilíndrica, salvo que esas vigas tengan el mismo peralte (t) que el de la losa ("vigas chatas"). Para contemplar este efecto, se acostumbra utilizar un ancho tributario igual a $4t$, para las vigas en mención.



Retornando al edificio en estudio, en la Fig. 1.16 se muestra las zonas de influencia (sin contemplar los efectos hiperestáticos, segundo procedimiento) para las distintas vigas.

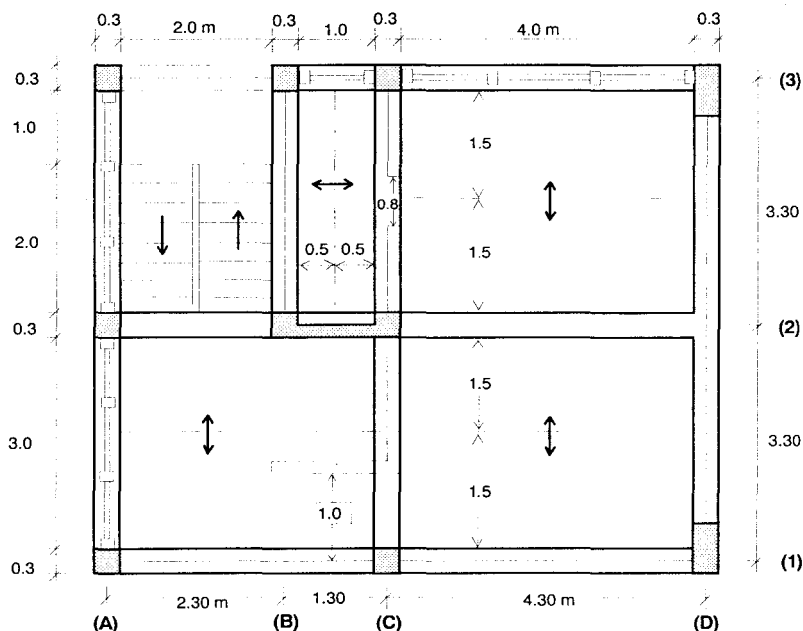


Fig. 1.16. Zonas de Influencia para las Vigas del Primer y Segundo Nivel.

Como ejemplo de metrado de cargas en vigas, se analizará la viga del eje 1. Las cargas unitarias aparecen en la Tabla 1.1, y las zonas de influencias (o anchos tributarios) se muestran en la Fig. 1.16.

VIGAS DEL EJE 1

SEGUNDO NIVEL (NPT + 5.80, AZOTEA). Para los dos tramos (A-C y C-D), se tiene:

Carga Permanente

Cargas Directas:	peso propio: $0.3 \times 0.4 \times 2400 =$	288 kg/m
	parapeto ($h = 0.95 \text{ m}$) =	215 kg/m
Cargas de Losa:	peso propio de aligerado: $300 \times 1.5 =$	450 kg/m
	acabados: $100 \times (1.5 + 0.15) =$	165 kg/m

	wD =	1118 kg/m
<u>Sobrecarga:</u>	wL = $100 \times (1.5 + 0.15) =$	165 kg/m

PRIMER NIVEL (NPT + 2.90)

Carga Permanente. Para los dos tramos (A-C y C-D), se tiene:

Cargas Directas:	peso propio = $0.3 \times 0.4 \times 2400 =$	288 kg/m
	tabique ($h = 2.5 \text{ m}$) =	525 kg/m
Cargas de Losa:	peso propio de aligerado = $300 \times 1.5 =$	450 kg/m
	acabados = $100 \times (1.5 + 0.15) =$	165 kg/m

	wD1 =	1428 kg/m
Tabique en Losa:	wD2 = $567 \times 2.225 / 3.3 =$	382 kg/m ...zona B-C (*)
Tabiquería Móvil:	wD3 = $100 \times (1.5 + 0.15) =$	165 kg/m ...zona C-D

(*) en la zona B-C hay un tabique de $h = 2.7 \text{ m}$. Ver el cálculo de wD2 en la Fig. 1.14.

Sobrecarga

Zona A-B:	wL1 = $400 \times (1.5 + 0.15) =$	660 kg/m
Zona B-C-D:	wL2 = $250 \times (1.5 + 0.15) =$	413 kg/m

En la Fig. 1.17 se muestra un resumen de las cargas actuantes en las vigas del eje 1.

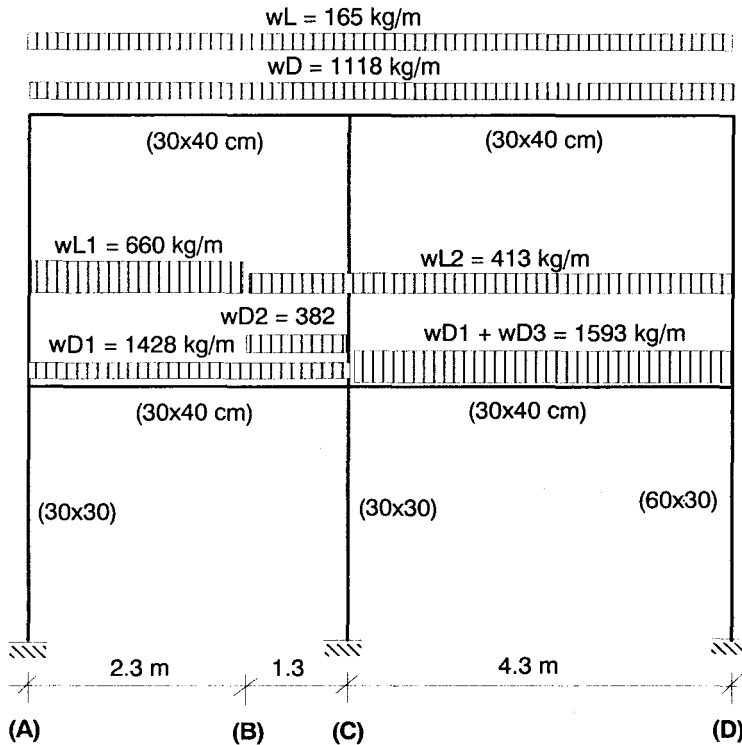


Fig. 1.17. Cargas Actuantes en las Vigas del Eje 1.

1.6.1. Viga Apoyada Sobre Otra Viga

Las vigas de los ejes 2 (tramo C-D) y D forman lo que se denomina una parrilla; sin embargo, despreciando los efectos hiperestáticos, puede asumirse que la viga del eje 2 está simplemente apoyada sobre la viga del eje D, mientras que su extremo izquierdo está empotrado en la placa, ya que la placa es mucho más rígida que esa viga.

Para decidir cuál de las vigas funciona como apoyo, debe pensarse en las deflexiones que tienen ambas barras, de este modo, la viga más rígida (la de mayor peralte y menor longitud) es la que trabaja como apoyo; así por ejemplo, las viguetas del aligerado apoyan sobre las vigas peraltadas. En el caso de las vigas de los ejes 2 y D, resulta obvio que la viga del eje 2 apoya sobre la del eje D, puesto que la viga del eje D apoya sobre dos columnas y no es posible que ella descansa sobre un voladizo de gran longitud (viga del eje 2).

En primer lugar se calculará las reacciones en la viga del eje 2, las que se transmitirán como cargas concentradas sobre la viga del eje D.

a.- Viga del Eje 2. Tramo C-D

Segundo Nivel (NPT + 5.80, Azotea):

Carga Permanente:

Carga Directa:	peso propio = $0.3 \times 0.4 \times 2400 =$	288 kg/m
Carga de Losa:	peso propio = $300 \times 3.0 =$	900 kg/m
	acabados = $100 \times (3.0 + 0.3) =$	330 kg/m
	wD =	1518 kg/m

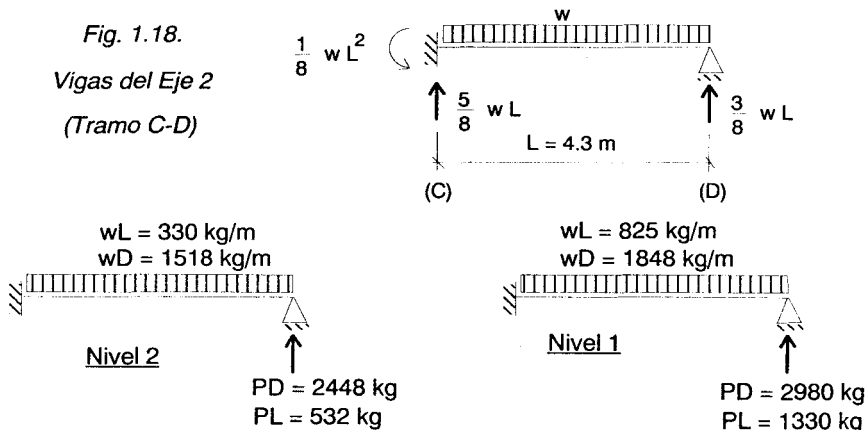
Sobrecarga: wL = $100 \times (3.0 + 0.3) =$ 330 kg/m

Primer Nivel (NPT +2.90):

Carga Permanente:

Carga Directa:	peso propio = $0.3 \times 0.4 \times 2400 =$	288 kg/m
Carga de Losa:	peso propio = $300 \times 3.0 =$	900 kg/m
	acabados = $100 \times (3.0 + 0.3) =$	330 kg/m
	tab. móvil = $100 \times (3.0 + 0.3) =$	330 kg/m
	wD =	1848 kg/m

Sobrecarga: wL = $250 \times (3.0 + 0.3) =$ 825 kg/m



b.- Viga del Eje D

Esta viga es paralela a la dirección de armado del aligerado, por lo que se adicionará una franja tributaria de losa con un ancho igual a cuatro veces su espesor ($4t = 4 \times 0.2 = 0.8 \text{ m}$, ver la Fig. 1.15). Adicionalmente, esta viga recibe las reacciones provenientes de la viga del eje 2 (Fig. 1.18).

Segundo Nivel (NPT + 5.80, Azotea):Carga Permanente:

Carga Directa:	peso propio = $0.3 \times 0.6 \times 2400 =$	432 kg/m
	parapeto =	215 kg/m
Carga de Losa:	peso propio = $300 \times 0.8 =$	240 kg/m
	acabados = $100 \times (0.8 + 0.15) =$	95 kg/m

$$wD = 982 \text{ kg/m}$$

Sobrecarga: $wL = 100 \times (0.8 + 0.15) = 95 \text{ kg/m}$

Primer Nivel (NPT + 2.90):Carga Permanente:

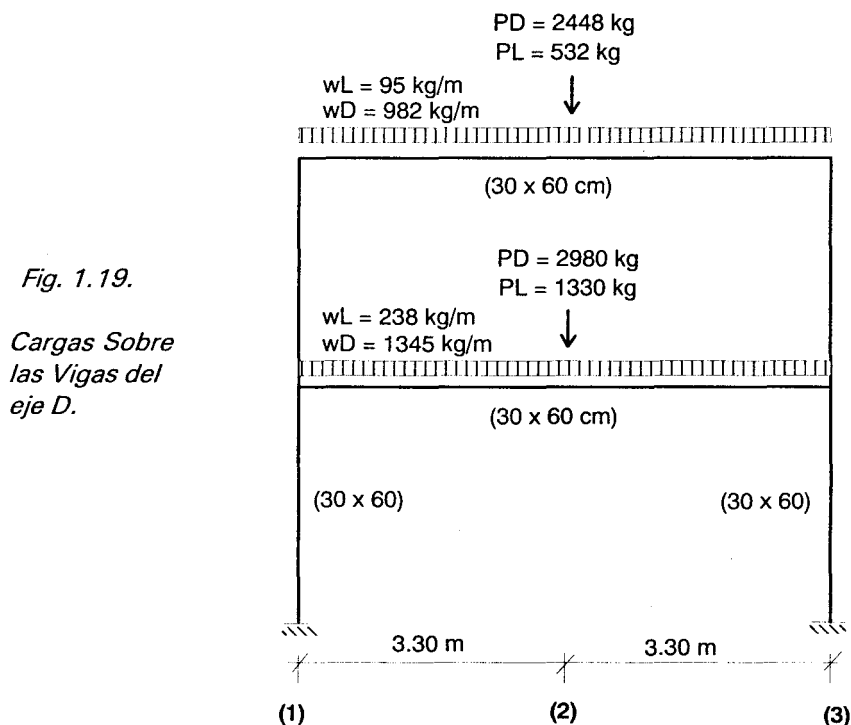
Carga Directa:	peso propio = $0.3 \times 0.6 \times 2400 =$	432 kg/m
	tabique ($h = 2.3 \text{ m}$) =	483 kg/m
Carga de Losa:	peso propio = $300 \times 0.8 =$	240 kg/m
	acabados = $100 \times (0.8 + 0.15) =$	95 kg/m
	tab. móvil = $100 \times (0.8 + 0.15) =$	95 kg/m

$$wD = 1345 \text{ kg/m}$$

Sobrecarga: $wL = 250 \times (0.8 + 0.15) = 238 \text{ kg/m}$

Nota: Al haberse adicionado una franja de losa tributaria sobre las vigas paralelas a la dirección de armado del aligerado (por ejemplo, las del eje D, por la compatibilidad de deformaciones que existe entre la viga y el aligerado), se estaría aplicando cargas en exceso sobre las columnas respectivas, por lo que no es conveniente metrar cargas en las columnas usando las reacciones de las vigas, sino que más bien debe usarse el concepto de área tributaria que se explicará en el acápite 1.7.

Un resumen de las cargas aplicadas sobre las vigas del eje D se muestra en la Fig. 1.19.



1.6.2. Vigas que Soportan Losas Armadas en Dos Sentidos y Vigas Pared

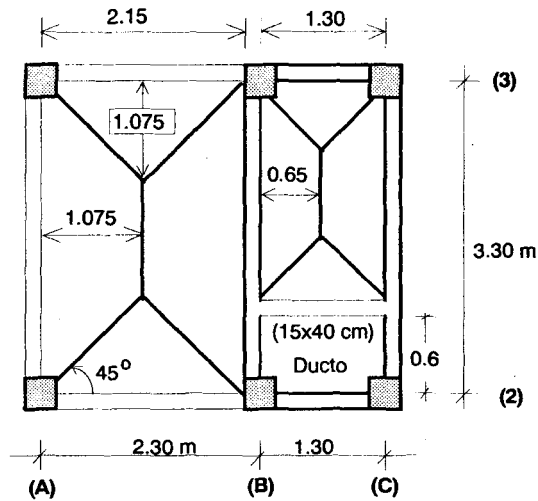
Para obtener las cargas que provienen de las losas armadas en dos sentidos sobre las vigas que las soportan, se aplica la regla del "sobre", la misma que consiste en trazar rectas inclinadas a 45° desde los vértices de cada ambiente, formando una especie de sobre en la planta del ambiente (Fig. 1.20). Estas rectas representan las líneas de falla que tendría la losa (agrietamiento del concreto) cuando se encuentra sometida a cargas excesivas ortogonales a su plano.

El techo de la escalera (NPT + 8.30), correspondiente al edificio en estudio, ha sido estructurado a propósito (con fines ilustrativos) empleando una losa armada en dos sentidos, puesto que pudo haberse utilizado una solución más económica, por ejemplo: un aligerado unidireccional. Parte de esa losa es soportada por unas vigas de gran peralte ("vigas pared"), constituidas por las caras laterales del tanque de agua.

A las cargas que provienen de la losa (peso propio, acabados, sobrecarga, etc.), deberá agregarse las cargas que actúan directamente en las vigas (peso propio, tabiques, etc.) y como ejemplo de metrado de cargas para estas vigas, se ha seleccionado las vigas de los ejes B y 3, correspondientes al tercer nivel (NPT + 8.30).

Fig. 1.20.

Techo de Escalera
y Tapa del Tanque
(NPT + 8.30). Zona
de Influencia para
las Vigas.



Las cargas existentes en la losa, despreciando el peso de la tapa del ducto, son:

Carga permanente:

$$\begin{aligned} \text{peso propio} &= 0.15 \times 2400 = 360 \text{ kg/m}^2 \\ \text{acabados} &= 100 \text{ kg/m}^2 \end{aligned}$$

$$D = 460 \text{ kg/m}^2$$

Sobrecarga:

$$L = 100 \text{ kg/m}^2$$

a.- Viga Pared del Eje B (cara lateral del tanque: 0.15 x 1.70 m). Tercer Nivel

A esta viga concurre una viga transversal, de 15x40 cm, que anilla al ducto de la tapa del tanque; previamente, se calculará la reacción que transmite esa viga (P, en la Fig. 1.21) sobre la viga del eje B.

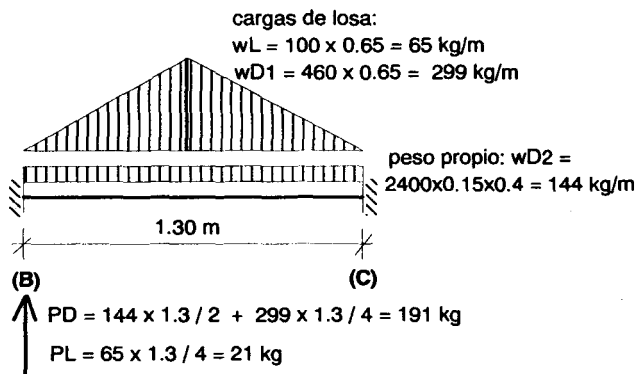


Fig. 1.21. Viga Transversal al Eje B.

Base del Tanque:	Losa:	$wD1 = 460 \times 0.65$	=	299 kg/m
	Agua:	$wL1 = 1000 \times 0.65$	=	650 kg/m
Techo de Escalera:	Losa:	$wD2 = 460 \times 1.075$	=	495 kg/m
	s/c:	$wL2 = 100 \times 1.075$	=	108 kg/m
Tapa del Tanque: (*)	Losa:	$wD3 = 460 \times 0.65$	=	299 kg/m
	s/c:	$wL3 = 100 \times 0.65$	=	65 kg/m
Peso Propio:		$wD4 = 2400 \times 0.15 \times 1.7$	=	612 kg/m

(*) Se ha despreciado el peso de la tapa metálica del ducto.

Un resumen de estas cargas aparece en la Fig. 1.22 (ver el cálculo de PD y PL en la Fig. 1.21).

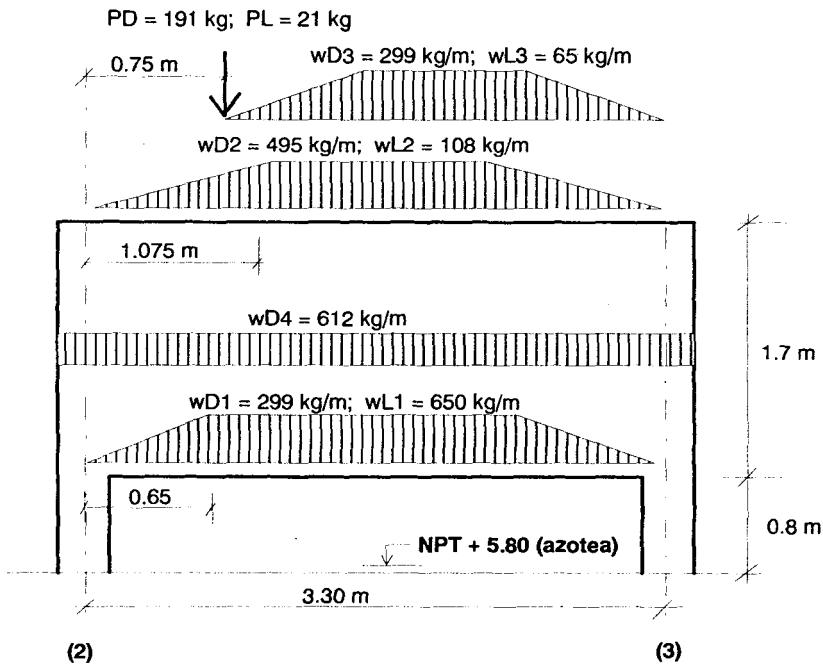


Fig. 1.22. Viga Pared del Eje B. Tercer Nivel.

b.- Vigas del Eje 3. Cargas en el Tercer Nivel

En el tercer nivel (NPT + 8.30), el eje 3 está compuesto por una viga de 15 x 40 cm (tramo A-B), que soporta el techo de la escalera, y una viga pared de 15 x 170 cm (tramo B-C) que corresponde a unas de las caras laterales del tanque. Las cargas correspondientes (en kg/m) se muestran en la Fig.1.23.

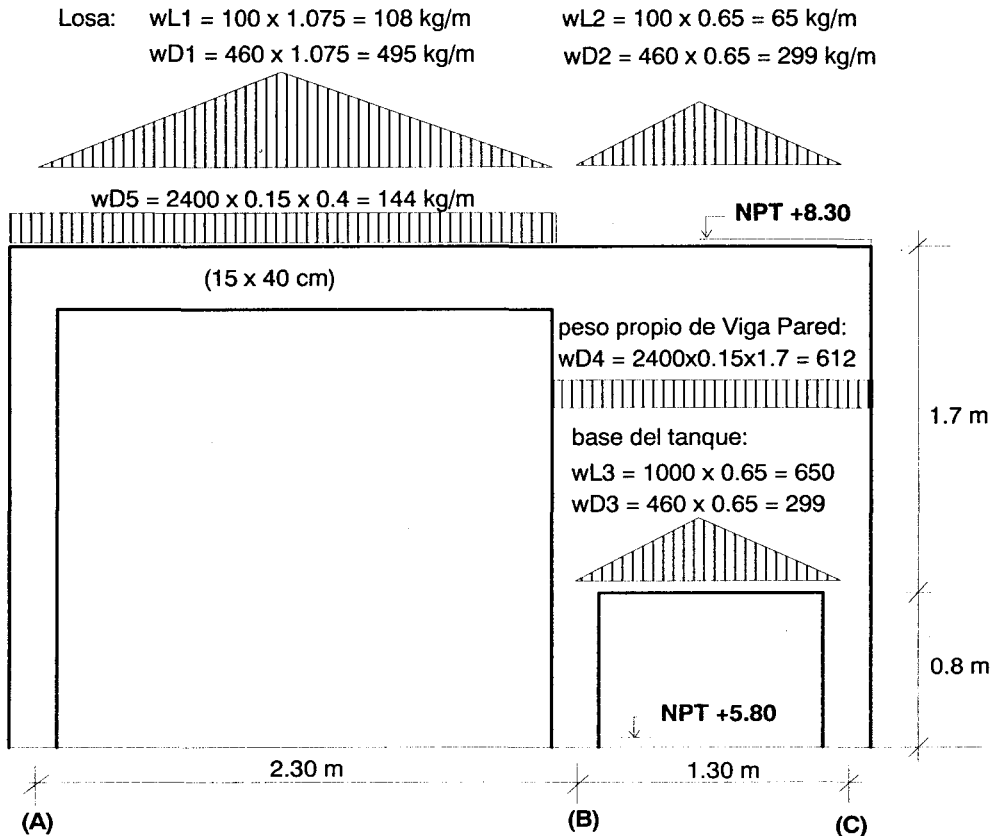


Fig. 1.22. Vigas del Eje 3. Cargas en el Tercer Nivel.

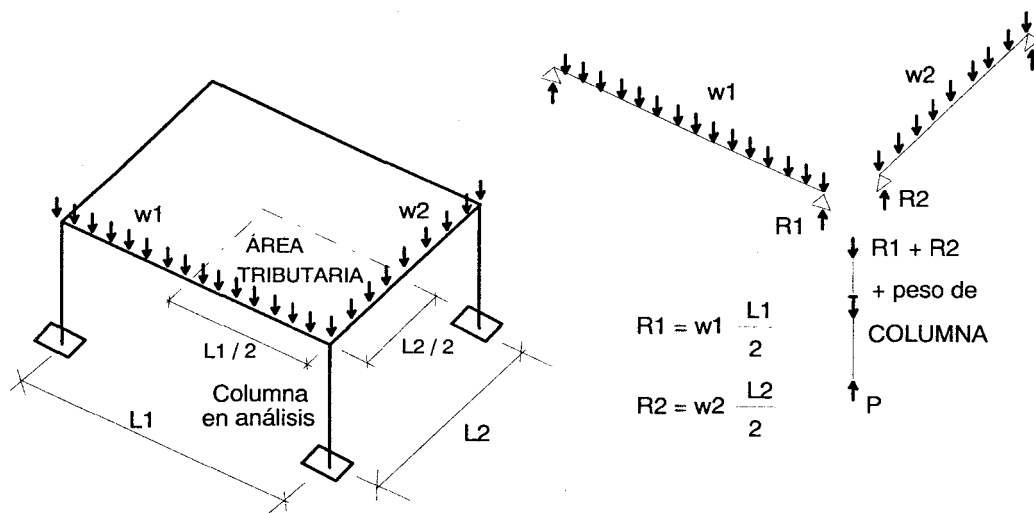
1.7. Columnas

Las vigas apoyan sobre las columnas transmitiéndoles fuerza cortante, que se acumulan como carga axial en los entrepisos.

Para obtener la carga axial en las columnas, debería resolverse el problema hiperestático analizando a los pórticos espacialmente, pero, para metrar cargas, se desprecia el efecto hiperestático trabajando con áreas de influencia (o tributarias, Fig. 1.23) provenientes de subdividir los tramos de cada viga en partes iguales, o se regula la posición de las líneas divisorias para estimar los efectos hiperestáticos.

A las cargas existentes en el área de influencia deberá agregarse las que bajan directamente a través de las columnas, tales como su peso propio, y otras cargas difíciles de metrar directamente, como son, por ejemplo, los tabiques ubicados en las partes intermedias de la losa (Fig. 1.24).

Fig. 1.23. Área de Influencia en Columnas.

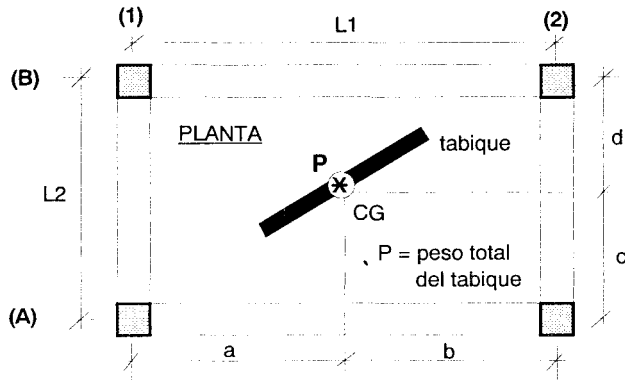


Las cargas provenientes de la losa (peso propio, acabados, sobrecarga, etc.) se obtienen multiplicando su magnitud (en kg/m^2) por el área de influencia ($\frac{1}{2} L1 \times \frac{1}{2} L2$), mientras que las cargas que actúan directamente en las vigas (peso propio, parapetos, tabiques, etc.) se obtienen multiplicando su magnitud por la longitud de influencia ($\frac{1}{2} L1$ o $\frac{1}{2} L2$).

Para el caso de los tabiques ubicados en la parte intermedia de la losa, puede aplicarse las expresiones que aparecen en la Fig. 1.24 (donde P es el peso total del tabique), para cada columna correspondiente al ambiente donde está situado el tabique.

Fig. 1.24.

Cargas Axiales en Columnas Producidas por un Tabique Ubicado en la Parte Intermedia de un Ambiente.



$$\text{Columna A-1: } P(A1) = \frac{P \cdot b \cdot d}{L1 \cdot L2}$$

$$\text{Columna A-2: } P(A2) = \frac{P \cdot a \cdot d}{L1 \cdot L2}$$

$$\text{Columna B-1: } P(B1) = \frac{P \cdot b \cdot c}{L1 \cdot L2}$$

$$\text{Columna B-2: } P(B2) = \frac{P \cdot a \cdot c}{L1 \cdot L2}$$

Por ejemplo, para el caso del tabique ($h = 2.7 \text{ m}$) ubicado en la zona de Recepción (Nivel $+2.90$, ver Fig. 1.5), su peso total (ver Tabla 1.1) es $P = 567 \times 1.3 = 737 \text{ kg}$, y las luces del ambiente A-C-1-2 son: $L1 = 3.6 \text{ m}$ y $L2 = 3.3 \text{ m}$, por lo que las cargas en las columnas A-1 y C-1 (en ese nivel) serán:

$$P(A1) = 737 \times 0.65 \times 2.225 / (3.6 \times 3.3)$$

$$P(A1) = 90 \text{ kg}$$

$$P(C1) = 737 \times 2.95 \times 2.225 / (3.6 \times 3.3)$$

$$P(C1) = 407 \text{ kg}$$

Estos valores coinciden con los que se obtienen al analizar la viga del eje 1 (tramo A-B-C). Ver la Fig. 1.25.

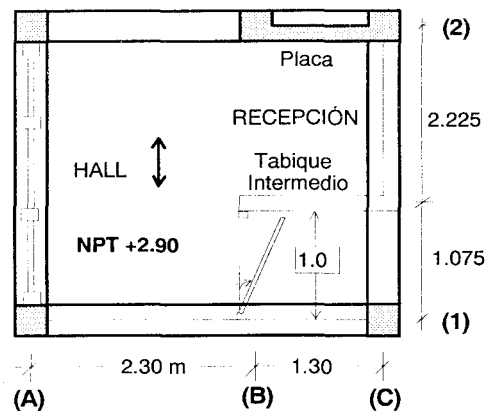
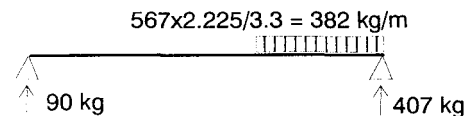


Fig 1.25.
Viga del Eje 1 (Tramo A-B-C) Sujeta a la Carga del Tabique Intermedio.



Cabe indicar que en el ejemplo anterior, la columna A-2 no absorbe carga proveniente del tabique intermedio, ya que esa carga no se transmite sobre la viga del eje 2 (tramo A-B), sino que es tomada por la placa en una magnitud igual a:

$$P (\text{placa por tabique intermedio}) = 1.3 \times (567 \times 1.075 / 3.3) = 240 \text{ kg}$$

Debiéndose cumplir que:

$$\text{Peso del tabique intermedio} = 737 \text{ kg} = P (A1) + P (C1) + P (\text{placa}) = 90 + 407 + 240$$

Las áreas tributarias (obviando el efecto hiperestático) para las columnas y la placa que componen al edificio en estudio, correspondientes al primer (NPT + 2.90) y segundo (NPT + 5.80) nivel, se muestran en la Fig 1.26, donde cabe señalar que al existir una viga (la del eje 2) que apoya sobre otra viga (la del eje D), la línea divisoria particiona a la viga que sirve de apoyo (la del eje D).

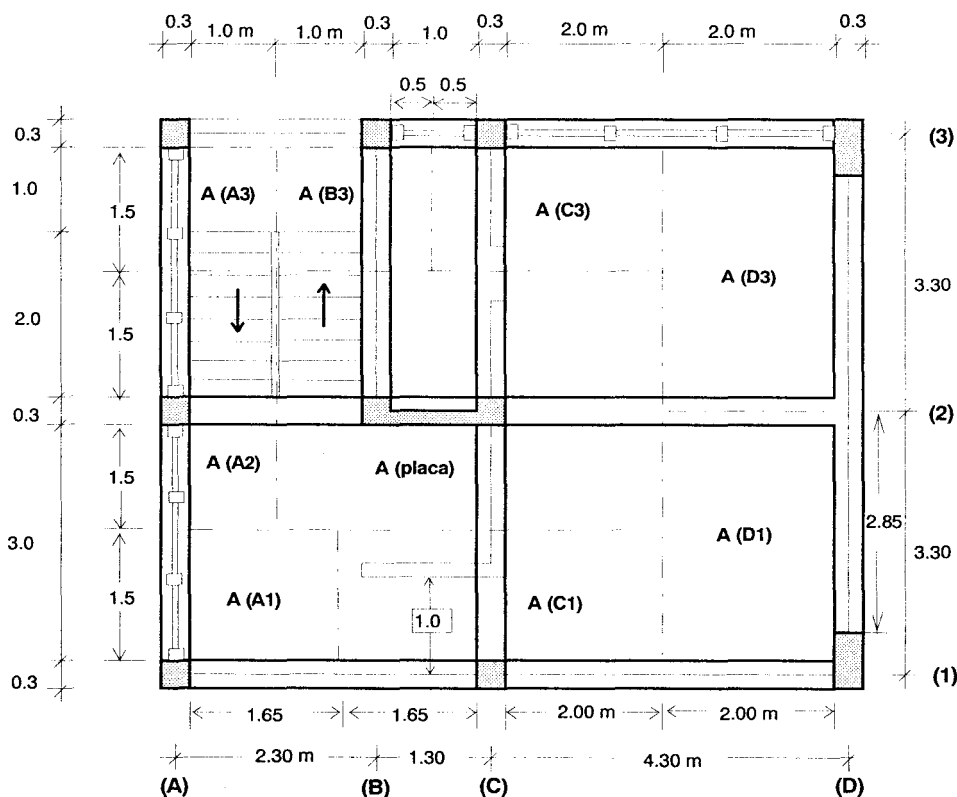
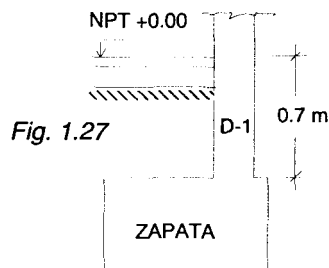


Fig. 1.26. Áreas de Influencia "A" para las Columnas y Placa del Primer Nivel (NPT + 2.90) y Segundo Nivel (NPT + 5.80).

Como ejemplo de metrado de cargas para las columnas, se analizará la columna ubicada en la intersección de los ejes D y 1 (columna D-1). Las cargas unitarias aparecen en la Tabla 1.1. Para el primer piso se ha asumido que la columna se profundiza 0.7 m hasta tocar con la parte superior de su zapata, tal como se muestra en la Fig. 1.27, mientras que sobre la azotea la columna cambia de sección (a 15x15 cm), prolongándose 0.95 m para arristrar los parapetos.



METRADO DE CARGAS PARA LA COLUMNA D-1

Nivel	Elemento	Carga Unitaria (kg/m ² o kg/m)	Área (m ²) o Longitud (m) Tributaria	P Parcial (kg)	P Acumulada (kg)
2	aligerado	300	2.00 x 3.00	1800	
	acabados	100	2.15 x 3.30	710	
	parapetos	215	2.15 x 3.30	1172	
	col.arrios.	54	0.95 m	51	
	viga 2	288/2	2.00 m	288	
	viga 1	288	2.00 m	576	
	viga D	432	2.85 m	1231	
	columna	432	2.90 m	1253	
	sobrecarga	100	2.15 x 3.30	710	
			PD = PL =	7081 710	7081 710
1	aligerado	300	2.00 x 3.00	1800	
	acabados	100	2.15 x 3.30	710	
	tab. móvil	100	2.15 x 3.30	710	
	tabique 1	525	2.00 m	1050	
	tabique D	483	2.85 m	1377	
	viga 2	288/2	2.00 m	288	
	viga 1	288	2.00 m	576	
	viga D	432	2.85 m	1231	
	columna	432	3.60 m	1555	
	sobrecarga	250	2.15 x 3.30	1774	
			PD = PL =	9297 1774	16378 2484

Cabe mencionar que en los edificios de mediana altura (hasta de 5 pisos), no es conveniente reducir la sobrecarga, debido a que existe una gran probabilidad de que en algún instante estén 100% sobrecargados. Sin embargo, con fines ilustrativos, se muestra como calcular la carga axial acumulada producida por la sobrecarga en la columna D-1, aplicando los coeficientes de reducción de la Norma E-020:

$$PL2 (D-1) = 710 \text{ kg}$$

$$PL1 (D-1) = 710 + 0.85 \times 1774 = 2218 \text{ kg}$$

1.8. Escaleras

Las cargas correspondientes a los acabados y sobrecarga actuantes en la escalera (Fig. 1.28), se expresan en kilogramos por metro cuadrado de área en planta (horizontal); sin embargo, el peso propio del tramo inclinado está distribuido a lo largo de su longitud, por lo que será necesario transformarlo en una carga equivalente por unidad de área en planta, para esto, se asumirá que el peso volumétrico (γ) del peldaño (concreto no reforzado: $\gamma = 2300 \text{ kg/m}^3$) es similar al peso volumétrico de la garganta (concreto armado: $\gamma = 2400 \text{ kg/m}^3$).

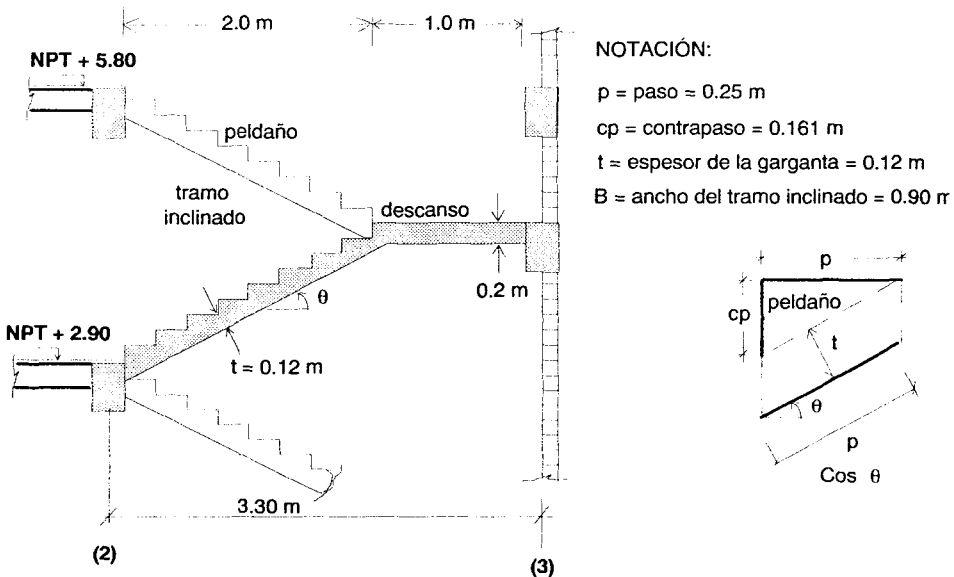


Fig. 1.28. Escalera del Edificio en Estudio.

Calculando el peso (P) para un peldaño y la garganta correspondiente del tramo inclinado se tendrá (ver Fig. 1.28):

$$P = \frac{1}{2} \gamma B p cp + \gamma B t p / \cos \theta = \gamma B p \left[\frac{1}{2} cp + t / \cos \theta \right]$$

Luego, la carga repartida por unidad de área en planta producida por el peso propio del tramo inclinado ($w(pp)$) será: $w(pp) = P / (B p) = \gamma \left[\frac{1}{2} cp + t / \cos \theta \right]$; o lo que es lo mismo:

$$w(pp) = \gamma \left[\frac{cp}{2} + t \sqrt{1 + (cp/p)^2} \right]$$

Para el edificio en estudio, se tiene 18 contrapasos para vencer una altura de 2.9 m, luego, $cp = 2.9 / 18 = 0.161$ m; con lo cual resulta:

$$w(pp) = 2400 \left[\frac{0.161}{2} + 0.12 \sqrt{1 + (0.161/0.25)^2} \right] = 536 \text{ kg/m}^2$$

De esta manera, la carga por unidad de ancho y unidad de longitud horizontal será (ver la Fig. 1.29):

Tramo Inclinado:

peso propio = 536 kg/m²

acabados = 100 kg/m²

wD = 636 kg/m²

wL = 400 kg/m²

Descanso:

peso propio = $0.2 \times 2400 = 480$ kg/m²

acabados = 100 kg/m²

wD = 580 kg/m²

wL = 400 kg/m²

Estas cargas se multiplicarán por el ancho (B) de cada tramo para obtener las cargas en kg/m:

Tramo Inclinado (B = 0.9 m):

wD = $636 \times 0.9 = 572$ kg/m

wL = $400 \times 0.9 = 360$ kg/m

Descanso (B = 1.0 m):

wD = $580 \times 1.0 = 580$ kg/m

wL = $400 \times 1.0 = 400$ kg/m

En la Fig. 1.29 aparecen las cargas por unidad de ancho de la escalera, lo que permite determinar las reacciones repartidas por unidad de longitud (kg/m) en las vigas correspondientes a los ejes 2 (Fig. 1.30) y 3, empleadas como elementos de apoyo de los tramos de la escalera.

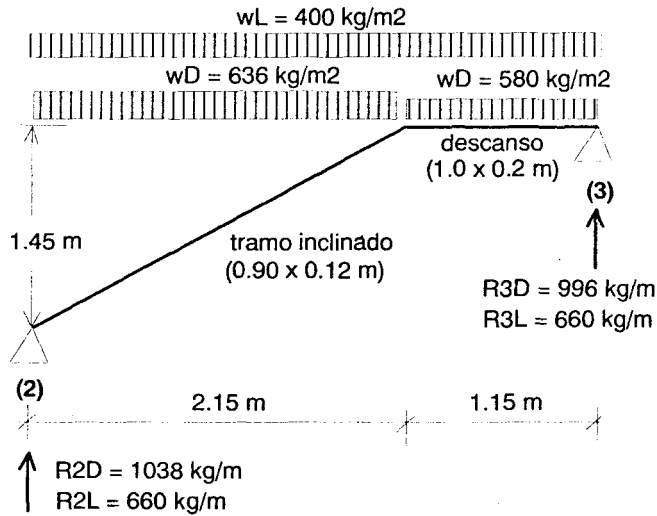


Fig. 1.29. Cargas por Unidad de Ancho y Unidad de Longitud Horizontal en un Tramo de la Escalera y Reacciones en las Vigas de Apoyo.

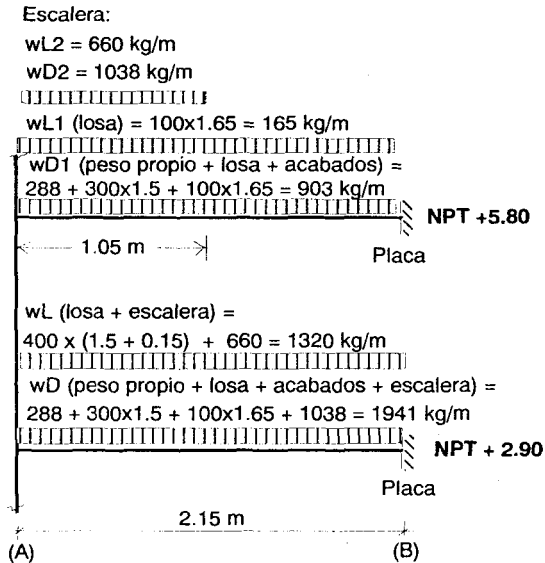


Fig. 1.30. Cargas en las Vigas del Eje 2. Primer y Segundo Nivel.

1.9. Placas

El área de influencia correspondiente a la placa completa se muestra en la Fig. 1.26; sin embargo, es conveniente desdoblar esa área para diseñar los extremos de las placas, los que se encuentran sujetos a concentraciones de esfuerzos producidos por las cargas provenientes de las vigas coplanares y ortogonales al plano de la placa, y también, porque esos puntos forman las columnas de los pórticos transversales (B y C en la Fig. 1.31). Finalmente, estas cargas se trasladan al eje de la placa, pudiendo generar momentos flectores que tienen que contemplarse en el diseño de la placa completa.

De esta manera, zonificando en 3 puntos (P1, P2 y P3) a la placa del edificio en estudio, se tendrá las áreas de influencia mostradas en las Figs. 1.31 y 1.32.

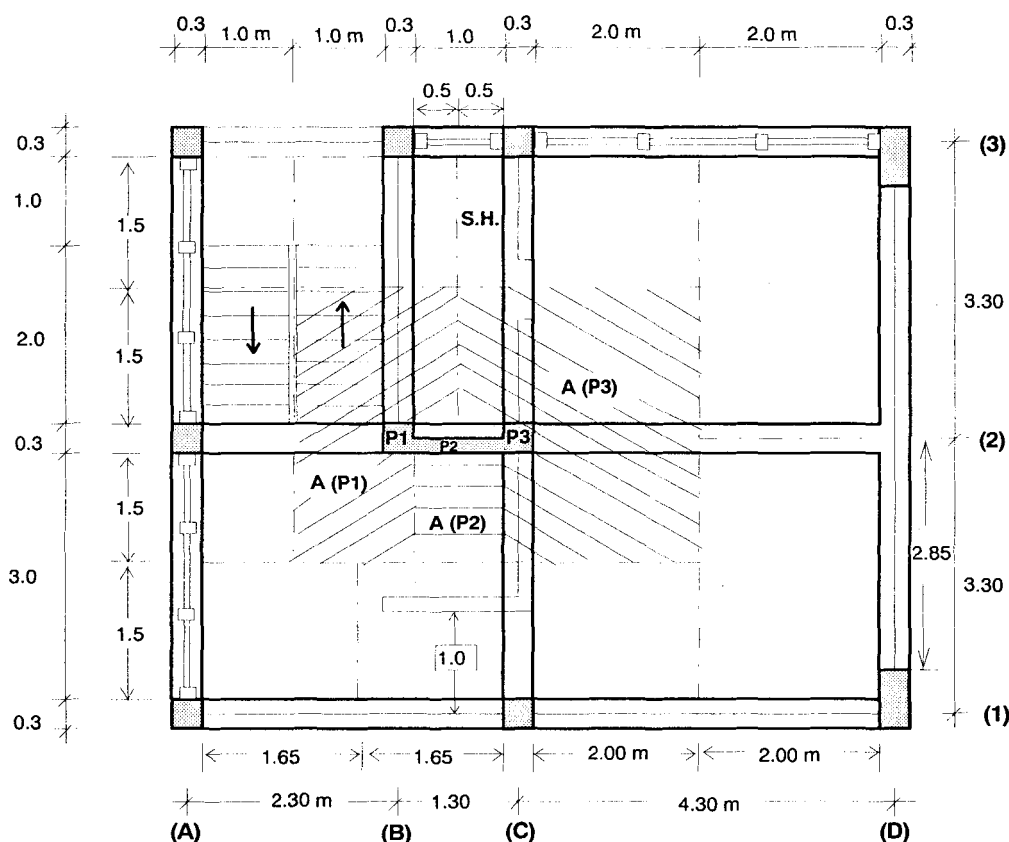
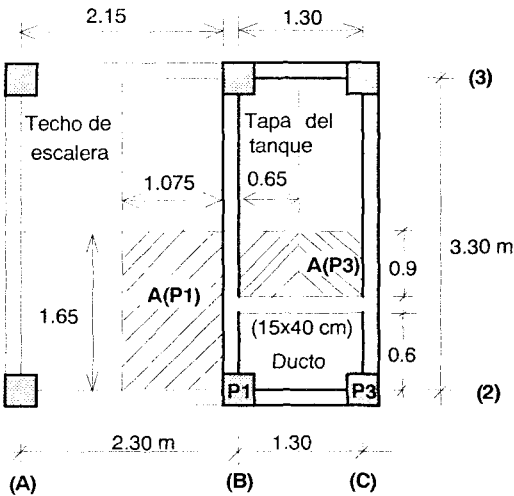


Fig. 1.31. Áreas de Influencia "A" para los Puntos P1, P2 y P3 de las Placas del Primer Nivel (NPT + 2.90) y Segundo Nivel (NPT + 5.80).

Fig. 1.32.

Áreas de Influencia
para los Puntos P1
y P3 (continuación
de la placa) en
el Tercer Nivel
(NPT + 8.30).



En la Fig. 1.31 puede notarse que el punto P2 no presenta área de influencia en la zona de servicios higiénicos (S.H.), porque el aligerado correspondiente descansa sobre las vigas de los ejes B y C (tramo 2-3) y éstas a su vez apoyan directamente sobre los puntos P1 y P3, respectivamente.

En la Fig. 1.32, en la tapa del tanque, primeramente se han trazado las líneas divisorias como si no existiese el ducto (cuya tapa tiene un peso despreciable), para después descontarlo; realmente, debería calcularse las reacciones de las vigas pared de los ejes 2, B (Fig. 1.22) y C sobre las columnas B-2 (punto P1) y C-2 (punto P3).

METRADO DE CARGAS PARA EL PUNTO "P2" (15 X 100 cm) DE LA PLACA

Nivel	Elemento	Carga Unitaria kg/m ² o kg/m	Área (m ²) o Longitud (m) Tributaria	P Parcial (kg)	P Acumulada (kg)
2	aligerado	300	1.50 x 1.00	450	
	acabados	100	1.65 x 1.00	165	
	viga 2 (B-C)	144	1.00 m	144	
	peso propio	360	2.90 m	1044	
	sobrecarga	100	1.65 x 1.00	165	
	PD =			1803	1803
1	aligerado			450	
	acabados			165	
	viga 2 (B-C)			144	
	peso propio	360	3.60 m	1296	
	tabi. inter.	567x(0.925/3)	1.30 m	227	
	sobrecarga	250	1.65 x 1.00	413	
	PD =			2282	4085
	PL =			413	578

METRADO DE CARGAS PARA EL PUNTO "P1" (30 X 30 cm) DE LA PLACA

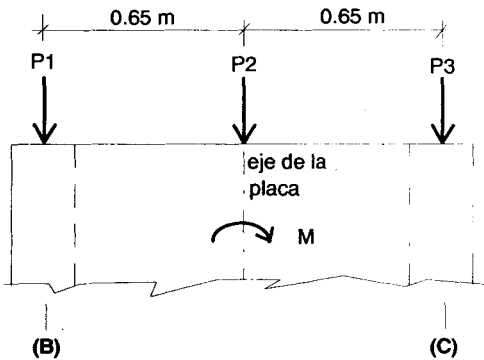
Nivel	Elemento	Carga Unitaria (kg/m ² o kg/m)	Área (m ²) o Longitud (m) Tributaria	P Parcial (kg)	P Acumulada (kg)
3	losa	360	2.36 m ²	849	
	acabados	100	2.89 m	289	
	base tanque	360	0.65 x 1.65	386	
	acab.base t.	100	0.65 x 1.65	107	
	columna	216	2.50 m	540	
	viga pared B	612	1.50 m	918	
3	viga pared 2	612	0.50 m	306	
	viga 2 (A-B)	144	1.00 m	144	
	viga ducto	144x2.625/3.3	0.65 m	74	
	PD =			3613	3613
	s/c agua	1000	1.65 x 0.65	1072	
	s/c losa	100	2.89 m	289	
2	PL =			1361	1361
	aligerado	300	2.70 m ²	810	
	acabados	100	3.23 m	323	
	viga 2 (A-B)	288	1.00 m	288	
	viga B	288	1.50 m	432	
	columna	216	2.90 m	626	
2	escalera	636(0.45/2)	0.90 x 1.50	193	
	PD =			2672	6285
	s/c alig.	100	2.25 m ²	225	
	s/c alig.	100	1.50 x 0.65	98	
	s/c escalera	400(0.45/2)	0.90 x 1.50	122	
	PL =			445	1806
1	aligerado			810	
	acabados			323	
	viga 2 (A-B)			288	
	viga B			432	
	columna	216	3.60 m	778	
	escalera	636	0.90 x 1.50	859	
1	tabique B	525	1.50 m	788	
	PD =			4278	10563
	s/c alig.	400	2.25 m ²	900	
	s/c alig.	250	1.50 x 0.65	244	
	s/c escalera	400	0.90 x 1.50	540	
	PL =			1684	3490

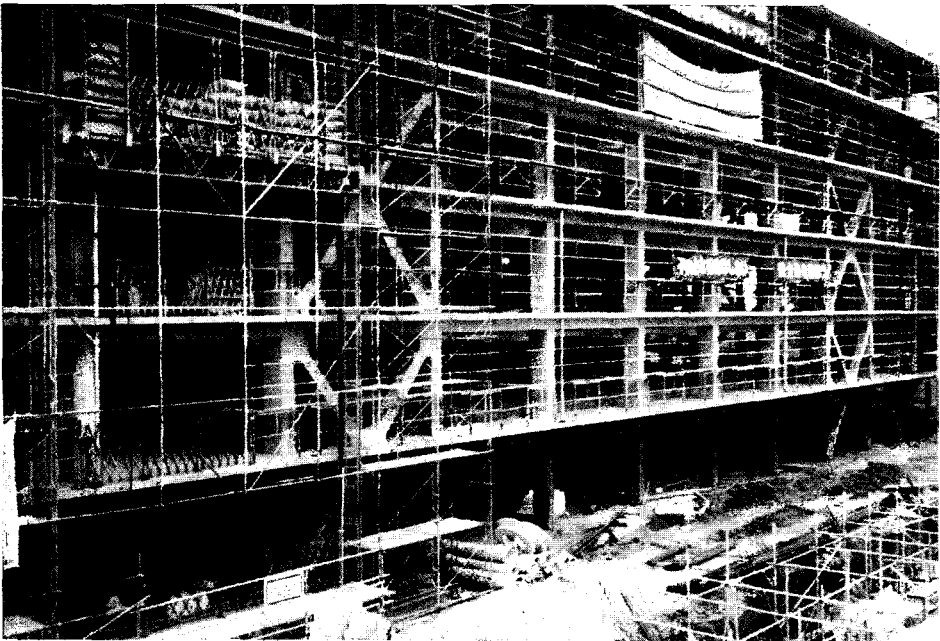
METRADO DE CARGAS PARA EL PUNTO "P3" (30 X 30 cm) DE LA PLACA

Nivel	Elemento	Carga Unitaria (kg/m ² o kg/m ²)	Área (m ²) o Longitud (m) Tributaria	P Parcial (kg)	P Acumulada (kg)
3	losa	360	0.90 x 0.65	211	2626
	acabados	100	1.05 x 0.80	84	
	base tanque	360	0.65 x 1.65	386	
	acab.base t.	100	0.65 x 1.65	107	
	columna	216	2.50 m	540	
	viga pared C	612	1.50 m	918	
	viga pared 2	612	0.50 m	306	
	viga ducto	144x2.625/3.3	0.65 m	74	
	PD =			2626	
	s/c agua	1000	1.65 x 0.65	1072	
s/c losa	100	1.05 x 0.80	84		
PL =			1156		
2	aligerado	300	6.75 m ²	2025	8167
	acabados	100	7.90 m ²	790	
	viga 2 (C-D)	288	2.00 m	576	
	viga C	288	3.00 m	864	
	columna	216	2.90 m	626	
	tabi. móvil	100	3.30 x 2.00	660	
	PD =			5541	
	s/c alig.	100	7.90 m ²	790	
PL =			790		
1	aligerado	216	3.60 m	2025	15162
	acabados			790	
	viga 2 (C-D)			576	
	viga C			864	
	columna			778	
	tabi. móvil			660	
	tabi.C (1-2)	(525 (1.925/3))	2.15 m	724	
	tabi.C (2-3)	525	1.10 m	578	
	PD =			6995	
	s/c alig.	250	7.90 m ²	1974	
PL =			1974		

RESUMEN DEL METRADO DE CARGAS EN LA PLACA

Nivel		Carga Axial Acumulada (kg)				Momento Acumulado (kg-m)
		P1	P2	P3	Total	$M = 0.65 (P3 - P1)$
3	D	3613	0	2626	6239	-642
	L	1361	0	1156	2517	-133
2	D	6285	1803	8167	16255	1223
	L	1806	165	1946	3917	91
1	D	10563	4085	15162	29810	2989
	L	3490	578	3920	7988	280





EDIFICIOS DE CONCRETO ARMADO CON TABIQUES DE ALBAÑILERÍA (vista superior) Y DE ACERO CON ARRIOSTRES DIAGONALES (vista inferior).

2

MÉTODO DE HARDY CROSS

El método de Cross (o de Distribución de Momentos) es una derivación del método general de Rigidez, donde, para el caso de estructuras cuyos giros de sus nudos sean los únicos grados de libertad (GL), se aplica el principio de superposición sobre las rotaciones, pero, esta vez en forma incremental.

En cada ciclo de este proceso iterativo se aplican incrementos de rotaciones, que generan incrementos de momentos flectores capaces de reestablecer el equilibrio estructural. El proceso culmina cuando los incrementos de momentos se tornan despreciables, según sea el grado de precisión deseado (usualmente 1/100 del mayor valor del momento de empotramiento). Los momentos flectores y las rotaciones finales se obtienen superponiendo los diversos incrementos calculados en cada ciclo.

2.1. Nomenclatura y Convención de Signos

Desplazamientos: Inicialmente se despreciarán las deformaciones axiales, por lo que cada barra $i-j$ (Fig. 2.2) tendrá tres grados de libertad, o lo que es lo mismo, tres redundantes cinemáticas ($RC = \theta_i, \theta_j, \delta$); posteriormente, en el acápite 5.3, se contemplarán los efectos de la deformación axial sobre los esfuerzos. Cabe adelantar que los efectos de la deformación axial son importantes cuando los pórticos son elevados, o cuando existe concentración de cargas verticales sobre una columna determinada, este último caso puede presentarse, por ejemplo, en una nave industrial con puente grúa (Fig. 2.1).

Las rotaciones (θ_i y θ_j) se consideran positivas cuando están dirigidas en el sentido horario (Fig. 2.2), mientras que el desplazamiento relativo entre

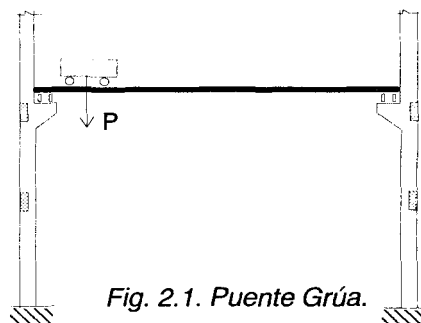


Fig. 2.1. Puente Grúa.

los extremos de una barra $i-j$ ($\delta_{ij} = \delta_{ji} = \delta$) será positivo cuando el ángulo $R = \theta/L$ (formado por una recta que conecta los extremos de la barra deformada y la barra misma) está dirigido en el sentido horario.

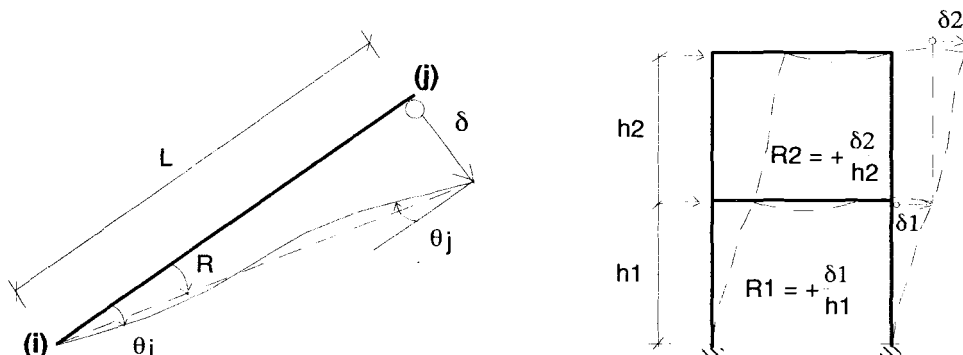


Fig. 2.2. Redundantes Cinemáticas Positivas (θ_i , θ_j , δ).

Fuerzas de Sección: En cada barra existen dos redundantes hiperestáticas, que son los momentos flectores M_{ij} y M_{ji} , positivos cuando están dirigidos en el sentido horario (Fig. 2.3). Estos momentos son redundantes hiperestáticas porque una vez que se les conozca (mediante el método de Cross), podrá determinarse las fuerzas cortantes (V_{ij} , V_{ji}) y las fuerzas axiales (N_{ij} , N_{ji}), por equilibrio de la barra y de los nudos, respectivamente.

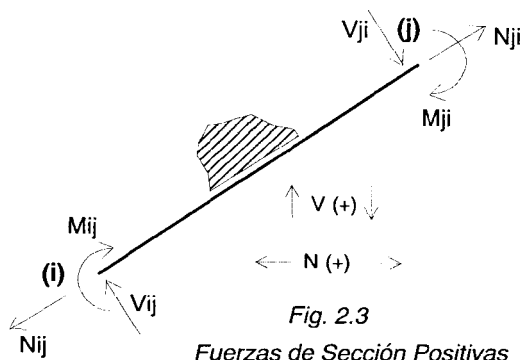


Fig. 2.3

Fuerzas de Sección Positivas

Debe remarcarse que el hecho de despreciar en los pórticos de mediana altura, compuestos por barras esbeltas, los efectos de la deformación axial y por corte sobre los esfuerzos finales, no significa que en una barra la carga axial o la fuerza cortante sean nulas; por ejemplo, en el pórtico mostrado en la Fig. 2.4, sería absurdo decir que la fuerza cortante o la carga axial en las vigas o columnas son nulas. Es decir, siempre deberá contemplarse en todas las barras de la estructura la existencia de M , V y N .

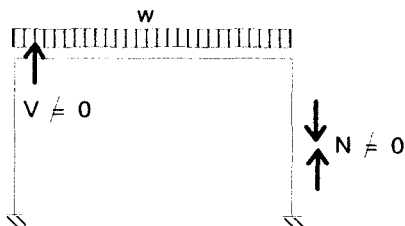


Fig. 2.4

2.2. Rigidez al Giro (K_{ij}) y Factor de Transporte (f_{ij})

Lo que se va a definir enseguida resulta válido incluso para el procedimiento matricial de cálculo, en vista que a veces se presentan casos fuera de lo común (por ejemplo, barras de sección variable), por lo que en tal situación, los programas de cómputo solicitan como información los valores de la rigidez al giro (K_{ij}) y del factor de transporte (f_{ij}).

Tanto la rigidez al giro (también llamada rigidez a la rotación o rigidez angular) como el factor de transporte (o factor de traslado) se definen sobre un elemento plano i - j , descargado, cuyo eje puede ser recto o curvilíneo y donde se puede o no adicionar a la deformación por flexión, la deformación por corte. Este elemento se encuentra sujeto a una rotación unitaria en un extremo mientras que el extremo opuesto está empotrado.

El momento capaz de generar esa rotación unitaria corresponde a la rigidez al giro en aquel extremo, mientras que el momento que surge en el extremo empotrado es proporcional al momento existente en el extremo que rota, en una cantidad denominada factor de transporte (ver la Fig. 2.5).

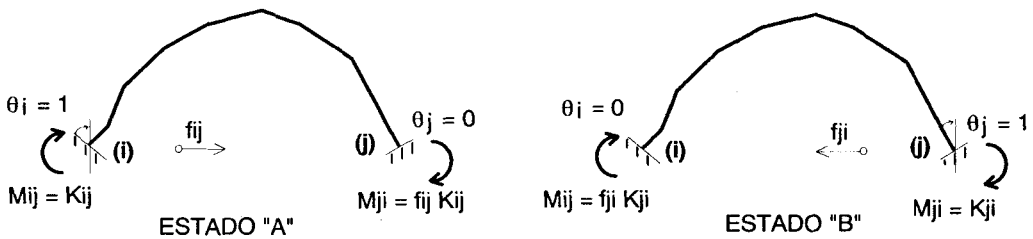


Fig. 2.5. Definición de K_{ij} , f_{ij} , K_{ji} y f_{ji} .

Aplicando el teorema de Betti entre los estados "A" y "B" de la Fig. 2.5, se tiene:

$$K_{ij} \times 0 + f_{ij} K_{ij} \times 1 = f_{ji} K_{ji} \times 1 + K_{ji} \times 0$$

De donde se demuestra que en toda barra que se comporte elásticamente debe cumplirse que:

$$K_{ij} f_{ij} = K_{ji} f_{ji}$$

También, aplicando la regla del espejo, puede demostrarse que en toda barra que presente simetría en forma (Fig. 2.6) se cumple que $K_{ij} = K_{ji}$ y $f_{ij} = f_{ji}$.

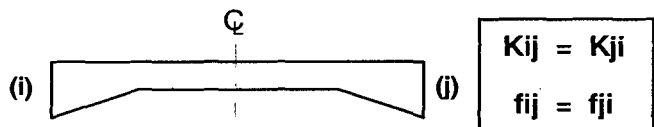


Fig. 2.6. Barra Simétrica en Forma.

2.3. Caso Particular de Barras Prismáticas con Eje Recto, Deformables por Flexión. Reducción de Grados de Libertad por Condición de Extremo. Concepto de Barra Equivalente

a.- Barra Continua. Es aquella barra que no presenta conexión articulada ni deslizante en ninguno de sus extremos. Este es el tipo de barra que se presenta en la mayoría de los pórticos, pudiendo ser su sección transversal de forma rectangular, L, T, etc. (Fig. 2.7). Como esta barra presenta simetría en forma se tendrá: $K_{ij} = K_{ji}$ y $f_{ij} = f_{ji}$.

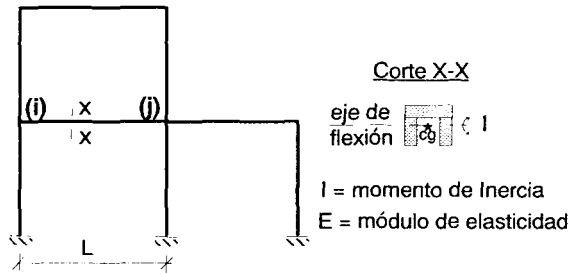


Fig. 2.7. Barra i-j Continua.

Imprimiendo una rotación unitaria en "i" y fijando al extremo "j" (Fig. 2.8), se obtiene por pendiente y deflexión:

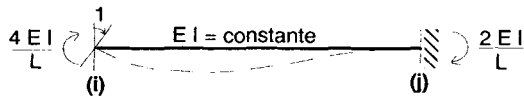


Fig. 2.8. Cálculo de K_{ij} y f_{ij} .

$$K_{ij} = 4EI / L = K_{ji}$$

$$f_{ij} = 1/2 = f_{ji}$$

b.- Barra Rotulada en "j". En este caso no se puede aplicar en forma directa la definición de rigidez al giro, porque θ_j es diferente de cero; sin embargo, aprovechando la condición de extremo: $M_{ji} = 0$, esta barra puede transformarse en una barra equivalente a una continua, donde θ_j no es grado de libertad (como si θ_j fuese cero), siempre y cuando su rigidez K_{ij} se calcule sobre la barra original (ver la Fig. 2.9).

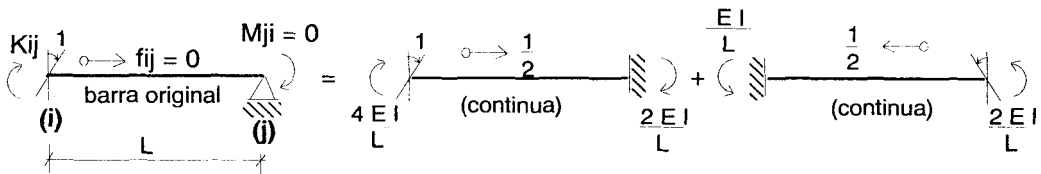


Fig. 2.9. Cálculo de K_{ij} y f_{ij} en una Barra Articulada en "j".

Por superposición de los dos estados mostrados en la Fig. 2.9, se obtiene:

$$K_{ij} = 3EI / L = 3/4 K \text{ (barra continua)}$$

$$f_{ij} = 0 \text{ (porque } M_{ji} = 0)$$

$$K_{ji} = 0 \text{ (porque la rótula no tiene rigidez)}$$

Nótese que la rigidez al giro de la barra articulada es $\frac{3}{4}$ de la rigidez correspondiente a una barra continua, como si al rotularse un nudo de la barra continua se perdiese el 25% de su rigidez flectora.

Por otro lado, se afirma que $\theta_j = 0$ en la barra equivalente (Fig. 2.10) porque de conocerse θ_i , entonces puede calcularse M_{ij} como: $M_{ij} = K_{ij} \theta_i$, al resultar esta expresión independiente de θ_j (como si θ_j se desvaneciera), se concluye que θ_j no es grado de libertad; esto ocurre siempre y cuando $M_{ji} = 0$, o cuando M_{ji} adopta un valor conocido, por ejemplo, en las vigas con volados, el voladizo se reemplaza por un momento externo de magnitud conocida ($M_{ji} = M_o$) más una carga concentrada que es absorbida por el apoyo.

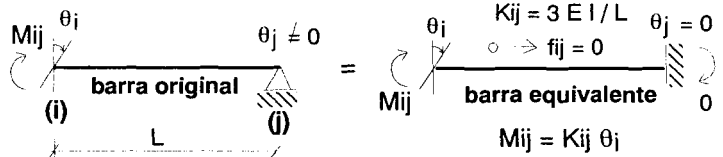


Fig. 2.10. Barra Equivalente a Otra Articulada.

Otra forma de demostrar que θ_j no es grado de libertad es viendo si está relacionada linealmente con θ_i . En la Fig. 2.11 se observa que $M_{ji} = 2EI\theta_i/L + 4EI\theta_j/L = 0$, de la cual se logra la relación lineal: $\theta_j = -\theta_i/2$.

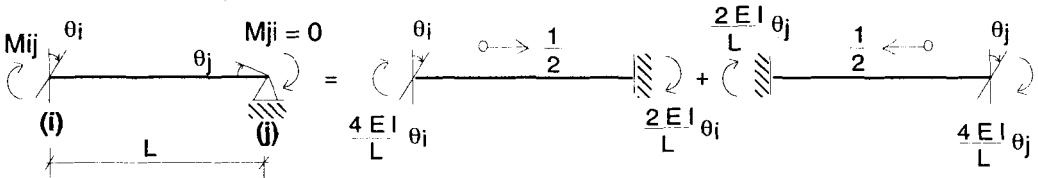


Fig. 2.11.

Debe indicarse que la reducción de grados de libertad se realiza con el objeto de facilitar el análisis manual (Fig. 2.12b); en cambio, si se usa un programa de cómputo, la que "trabaja" es la computadora y, en ese caso, la barra con apoyo rotulado se analiza como una barra continua (Fig. 2.12a), a no ser que la rótula se presente interiormente, tal como ocurre cuando una viga se articula plásticamente en uno de sus extremos (Fig. 2.12c).

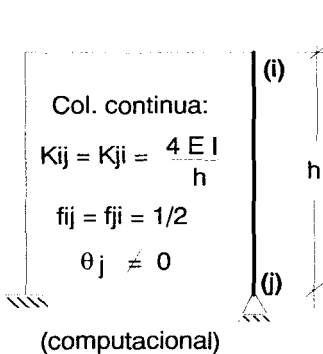


Fig. 2.12a

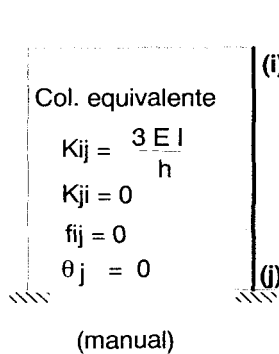


Fig. 2.12b

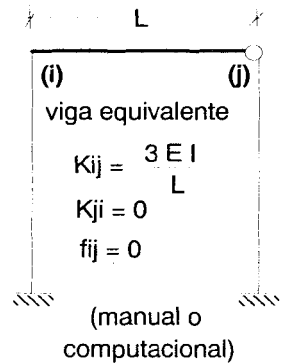


Fig. 2.12c

- c.- **Barra con Conexión Deslizante en "j".** Este caso se presenta como un producto del modelaje estructural, en barras que tengan simetría en forma y en sollicitación; es decir, a diferencia del apoyo articulado, la conexión deslizante no es una conexión real. Aquí tampoco puede aplicarse directamente la definición de rigidez al giro, porque el deslizamiento δ es diferente de cero, pero, aprovechando la condición de extremo: $V_{ji} = 0$, la barra puede reducirse a una equivalente, donde δ no sea grado de libertad ($\delta = 0$), siempre y cuando su rigidez K_{ij} se calcule sobre la barra original; ver la Fig. 2.13.

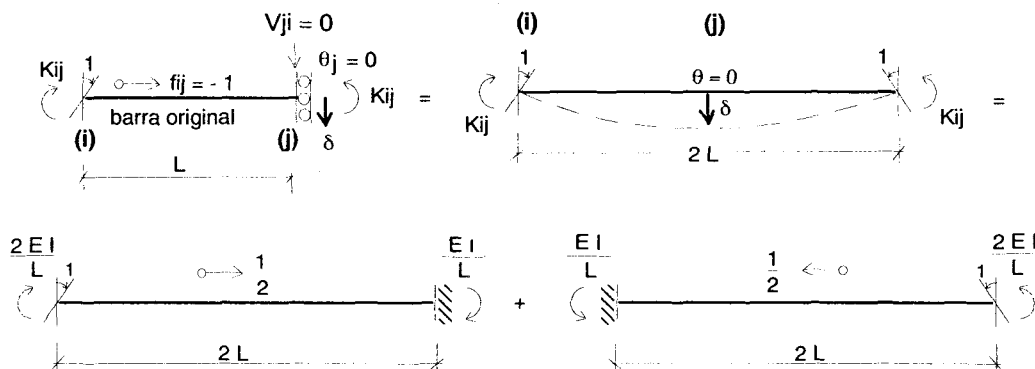


Fig. 2.13. Cálculo de K_{ij} y f_{ij} en una Barra con Conexión Deslizante en "j"

Por superposición de los dos estados mostrados en la Fig. 2.13, se obtiene:

$$K_{ij} = EI / L = \frac{1}{4} K \text{ (barra continua)}$$

$$f_{ij} = -1 \text{ (ya que por equilibrio: } M_{ji} = -K_{ij} = f_{ij} K_{ij})$$

Nótese que la rigidez de la barra con conexión deslizante es la cuarta parte de la rigidez correspondiente a una barra continua, como si la barra continua perdiese el 75% de su rigidez flectora cuando uno de sus extremos se desliza sin rotar.

Se dice que $\delta = 0$ en la barra equivalente (Fig. 2.14) porque si se conociera θ_i , entonces puede calcularse M_{ij} como: $M_{ij} = K_{ij} \theta_i$, expresión que es independiente de θ_j y δ ; es decir δ y θ_j no son grados de libertad, siempre y cuando $V_{ji} = 0$, lo propio ocurre cuando V_{ji} adopta un valor determinado.

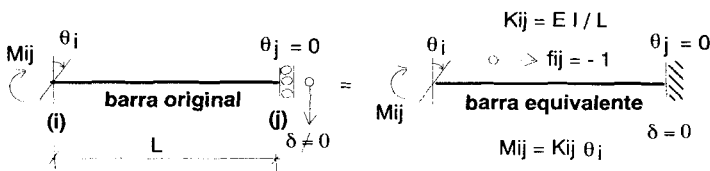


Fig. 2.14. Barra Equivalente a Otra con Apoyo Deslizante.

Otra forma de demostrar que δ no es grado de libertad es viendo si δ está relacionada linealmente con θ_i . En la Fig. 2.15 se observa que $V_{ji} = 6EI\theta_i/L^2 - 12EI\delta/L^3 = 0$, de la cual se logra la relación lineal: $\delta = \theta_i L/2$.

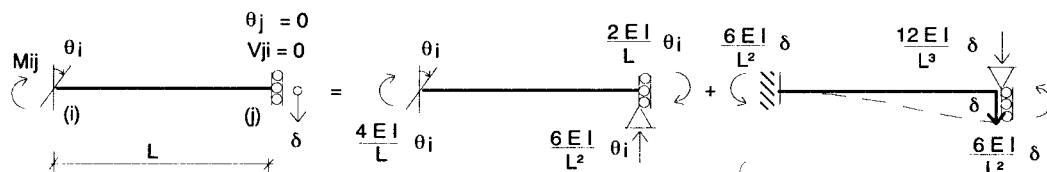


Fig. 2.15

Nuevamente se hace notar que la reducción de grados de libertad se realiza con el objeto de facilitar el análisis manual (Fig. 2.16b); en cambio, si se hace uso de un programa de cómputo, puede trabajarse con la barra continua (Fig. 2.16a).

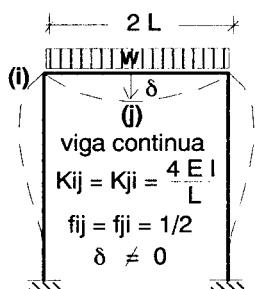


Fig. 2.16a (computacional)

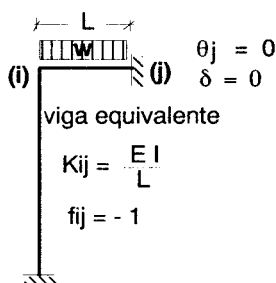


Fig. 2.16b (manual)

2.4. Rigidez al Giro Relativa o Coeficiente de Rigidez a Flexión (k_{ij})

En primer lugar, se define a la rigidez estándar de la estructura (K_o) a un valor que uno lo proporciona, por ejemplo, usualmente se adopta $K_o = 1000 \text{ cm}^3 = 0.001 \text{ m}^3$. Por otro lado, la rigidez al giro absoluta (K_{ij}) depende del módulo de elasticidad (E), el cual al ser un valor muy alto (E (concreto) $2'000,000 \text{ ton/m}^2$; E (acero) $21'000,000 \text{ ton/m}^2$), dificulta el análisis manual; por lo que para trabajar con valores pequeños y adimensionales, se define al coeficiente de rigidez a flexión de una barra $i-j$ como:

$$k_{ij} = \frac{K_{ij}}{4 E K_o}$$

De esta manera, para una barra prismática deformable por flexión se tendrá:

$$k_{ij} (\text{continua}) = \frac{4 E I / L}{4 E K_o} = \frac{1}{L K_o}$$

$$k_{ij} (\text{---}) = 3/4 k (\text{continua})$$

$$k_{ij} (\text{---}) = 1/4 k (\text{continua})$$

Nótese que el coeficiente de rigidez a la flexión "kij" es proporcional a la relación I/L . En el caso de vigas continuas, donde la sección transversal es la misma en todos los tramos (como el aligerado mostrado en la Fig. 2.17), no se necesita calcular el momento de inercia (I) de la sección transversal, en esos casos, puede adoptarse $K_0 = I$ (en magnitud numérica), con lo cual, las rigideces resultan proporcionales a la inversa de la longitud de los tramos (L_i); sin embargo, si se desea calcular las rotaciones de los nudos, o si existiese desplazamiento de apoyo (donde el momento de empotramiento depende de " I "), será indispensable calcular el valor del momento de inercia.

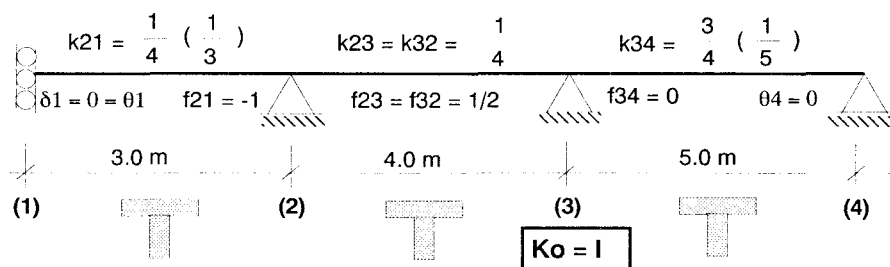


Fig. 2.17. Coeficientes k_{ij} cuando los tramos tienen igual " I "

2.5. Coeficiente de Distribución de Momentos (α_{ij}), Momento Distribuido (D_{ij}), Momento Transportado (T_{ij}) y Momentos de Empotramiento (u_{ij})

Para definir α_{ij} , D_{ij} , T_{ij} y u_{ij} , se trabajará con el ejemplo algebraico mostrado en la Fig. 2.18, donde el único grado de libertad rotacional es $\Delta\theta_i$; se entiende que al emplearse el concepto de barra equivalente, el deslizamiento del nudo "n" así como la rotación del nudo "2", se reducen a cero.

La estructura adoptada para este ejemplo es completamente general, es decir, las barras pueden ser de sección variable o constante, su eje puede ser recto o curvo, se puede o no incluir la deformación por corte, etc., por lo que se trabajará con las rigideces al giro absolutas (K_{ij}). Asimismo, la sollicitación es completamente general, pudiendo existir cambios de temperatura (ΔT), desplazamiento de apoyo conocido (Δ), etc.

La estructura original se ha desdoblado en la superposición de dos estados, los cuales se analizan independientemente, tal como se muestra en las Figs. 2.19 y 2.20.

En el Estado 0 (conocido como Estructura Primaria o Estructura Fija, Fig. 2.19), se ha impedido la rotación del nudo "i" y se ha aplicado todas las sollicitaciones existentes. En este estado surgen momentos de empotramiento (u_{ij}) en los extremos de las barras, que al actuar sobre el nudo "i" en sentido contrario, dan lugar a una reacción cuya magnitud es: $M_i = M_{oi} - \sum u_{ij}$, este momento no existe en la estructura original.

Para reestablecer el equilibrio, eliminando al momento M_i , debe agregarse el Estado 1 (Fig. 2.20), donde al estar descargadas las barras, se podrá aplicar directamente las definiciones de K_{ij} y f_{ij} . Como única sollicitación en este estado se "libera" al nudo "i", imprimiendo una rotación $\Delta\theta_i$ de tal magnitud que en los extremos de las barras surjan unos momentos distribuidos $D_{ij} = K_{ij} \Delta\theta_i$ (positivos en el sentido horario), los que al actuar en sentido contrario sobre el nudo "i" equilibran a M_i .

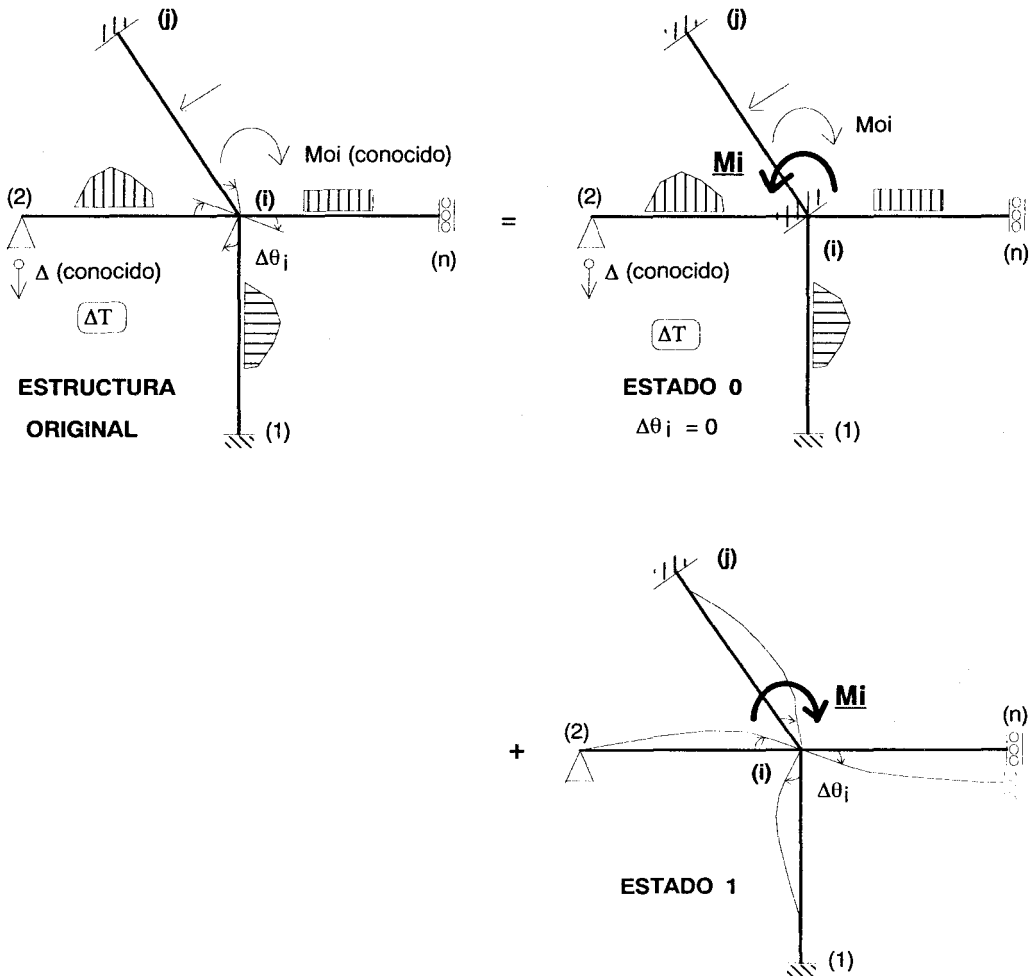
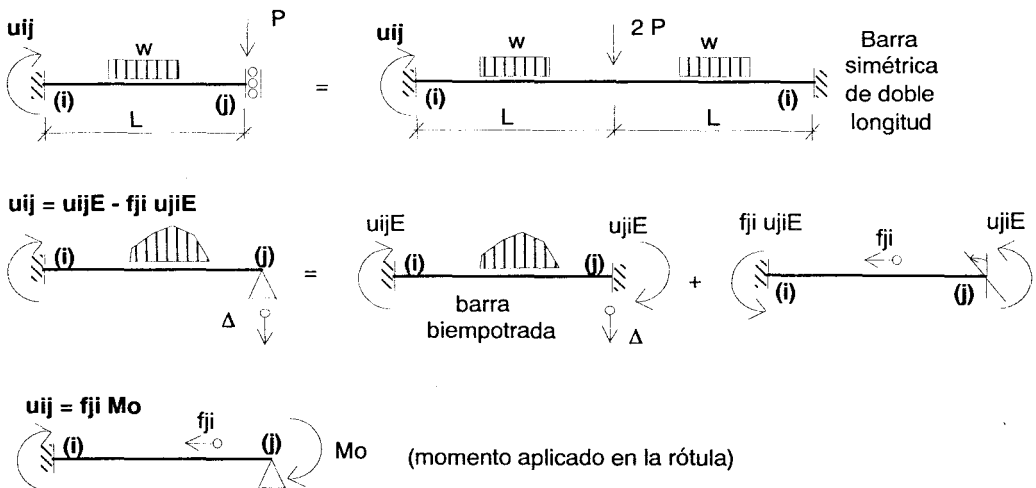
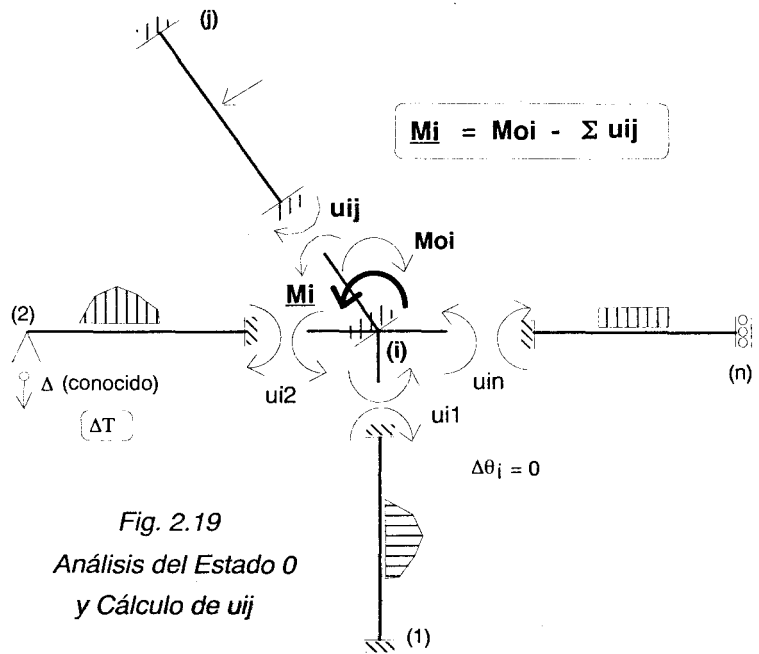


Fig. 2.18. Ejemplo Algebraico para el Cálculo de α_{ij} , D_{ij} , T_{ij} y u_{ij} .

En el Estado 0, cabe indicar que los momentos de fijación (u_{ij}) son positivos cuando actúan sobre la barra en sentido horario. Asimismo, para las barras con conexión deslizante o rotulada (cuyos grados de libertad han sido reducidos a cero), los momentos de empotramiento u_{ij} deben calcularse sobre la barra original, o también, tal como se muestra en la Fig. 2.19a; en cambio, de no reducirse los grados de libertad, los momentos de empotramiento u_{ij} deben calcularse considerando que la barra está biempotrada.



En la Fig. 2.20 se aprecia:

$$D_{ij} = K_{ij} \Delta \theta_i$$

Como $M_i = \sum D_{ij}$, y puesto que el giro en "i" es único, se tendrá:

$$M_i = \Delta \theta_i \sum K_{ij}$$

De la cual, se puede despejar el incremento de rotación necesario de aplicar en "i" para poder reestablecer su equilibrio:

$$\Delta \theta_i = M_i / \sum K_{ij}$$

Luego podrá calcularse D_{ij} como:

$$D_{ij} = K_{ij} M_i / \sum K_{ij}$$

Se define al coeficiente de distribución de momentos α_{ij} como:

$$\alpha_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}$$

Por lo que el momento distribuido puede calcularse aplicando la siguiente expresión:

$$D_{ij} = \alpha_{ij} M_i$$

Finalmente, el momento que se transporta desde el extremo que rota (i), hacia el extremo empotrado (j) será:

$$T_{ji} = f_{ij} D_{ij}$$

Por otro lado, observando la expresión que define a α_{ij} , se puede mencionar lo siguiente:

- Cada barra i-j absorberá un porcentaje de M_i , en términos de D_{ij} , proporcionalmente a su rigidez al giro K_{ij}
- Sumando los coeficientes α_{ij} de todas las barras que concurran al nudo "i", debe obtenerse: $\sum \alpha_{ij} = \sum (K_{ij} / \sum K_{ij}) = \sum K_{ij} / \sum K_{ij} = 1$. De lo contrario, el nudo estará en desequilibrio. Esta expresión permite verificar el cálculo de α_{ij} .

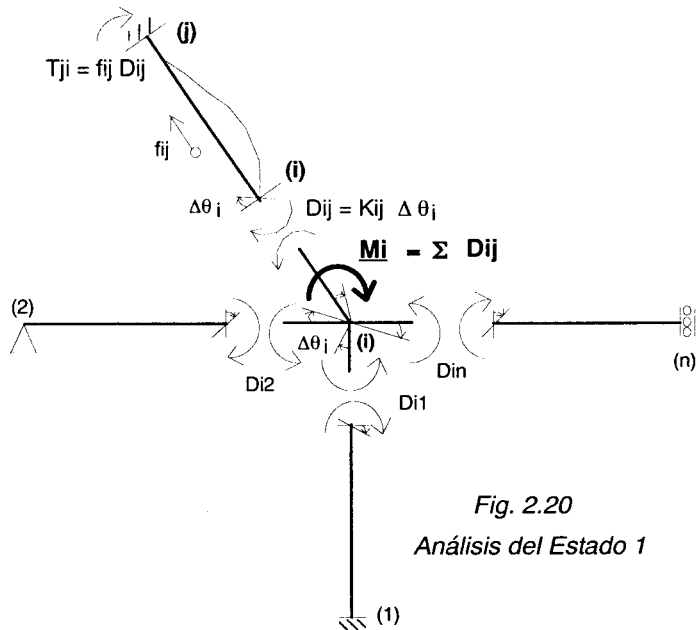


Fig. 2.20
Análisis del Estado 1

- c.- Una barra que concurre a un nudo que no rota (inclusive en aquellos donde la rotación no sea grado de libertad), tendrá $\alpha_{ij} = 0$. Esto puede interpretarse como si la barra concudiese a una gran pared, cuya rigidez flectora es infinita (Fig. 2.21):

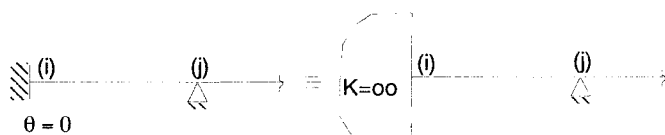
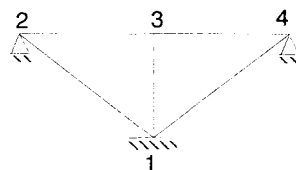


Fig. 2.21

$$\alpha_{ij} = \frac{K_{ij}}{K_{ij} + \infty} = 0$$



$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = 0$$

- d.- Cálculo de α_{ij} en función de los coeficientes de rigidez a la flexión (k_{ij}). Sabiendo que $K_{ij} = 4 E K_o k_{ij}$, se puede obtener:

$$\alpha_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}} = \frac{4 E K_o k_{ij}}{\sum 4 E K_o k_{ij}} = \frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}$$

Sin embargo, cuando los módulos de elasticidad de las barras varían (Fig. 2.22), o cuando se presentan casos especiales (barras de sección variable, etc.), deberá trabajarse con la rigidez al giro absoluta (K_{ij}).

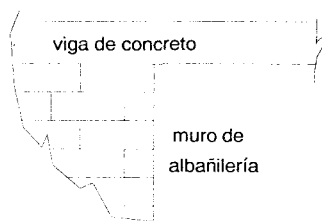
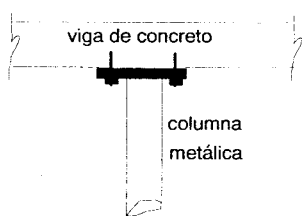


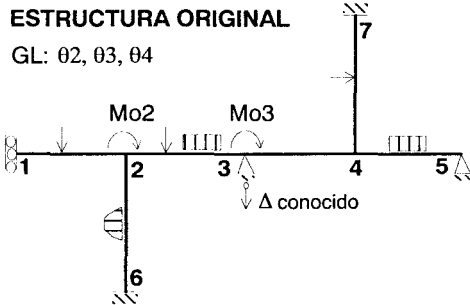
Fig. 2.22

2.6. Proceso de Liberación Alterna. Ejemplo Algebraico de Ilustración

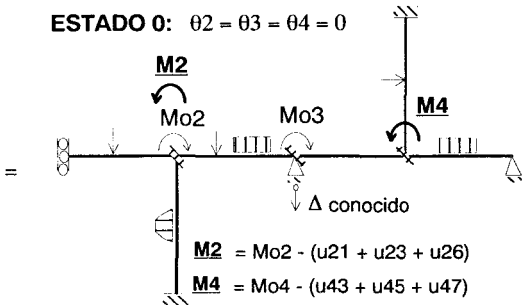
Mediante el ejemplo algebraico (completamente general) mostrado en la Fig. 2.23, se ilustra la manera de aplicar el principio de superposición en forma incremental sobre las rotaciones, en el denominado Proceso de Liberación Alterna. Para un mejor entendimiento del proceso, debe también observarse las Figs. 2.18, 2.19 y 2.20, recordándose que la liberación de un nudo se realiza para reestablecer su equilibrio, empotrando el extremo opuesto.

ESTRUCTURA ORIGINAL

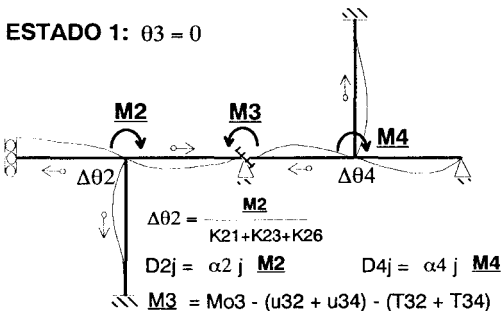
GL: $\theta_2, \theta_3, \theta_4$



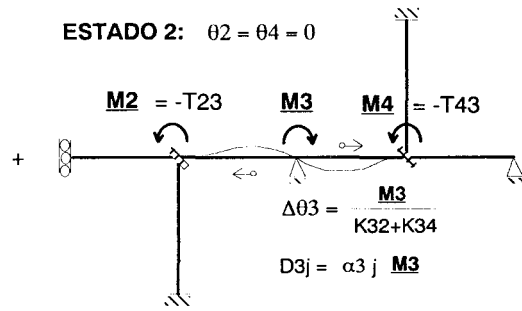
ESTADO 0: $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$



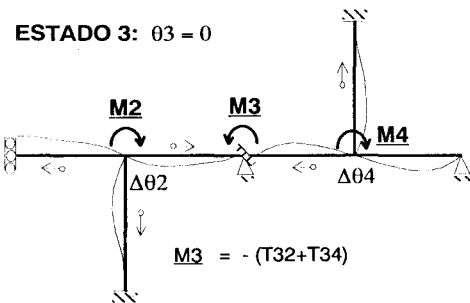
ESTADO 1: $\theta_3 = 0$



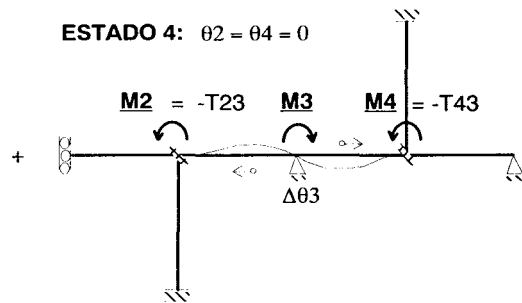
ESTADO 2: $\theta_2 = \theta_4 = 0$



ESTADO 3: $\theta_3 = 0$



ESTADO 4: $\theta_2 = \theta_4 = 0$



+ESTADO 5..... +ESTADO 6.....

Fig. 2.23. Ejemplo Algebraico del Proceso de Liberación Alterna.

Observaciones:

- 1.- La liberación de los nudos alternos ($i = 2, 4$) expresa el reestablecimiento del equilibrio con el consecuente desequilibrio de los nudos opuestos empotrados ($j = 3$).
- 2.- Los nudos donde las rotaciones no son grados de libertad no se necesitan liberar. Nótese que en ningún estado se ha introducido restricciones al movimiento del apoyo deslizante o articulado.
- 3.- Se cumple un ciclo del proceso iterativo cuando se han liberado todos los grados de libertad. Cada ciclo está compuesto por la superposición de 2 estados:

Ciclo 1 = Estado 1 + Estado 2; Ciclo 2 = Estado 3 + Estado 4; etc.

Nótese que los estados impares son semejantes, al igual que los estados pares.

- 4.- El proceso es convergente a cero, debido a que en los ciclos altos los momentos desequilibrados (M_i) son producidos por los momentos transportados y estos van disminuyendo en magnitud, ya que $\alpha_{ij} < 1$ y usualmente $f_{ij} < 1$.

Ciclos altos: $M_i = -\sum T_{ij}$ $D_{ij} = \alpha_{ij} M_i$ $T_{ji} = f_{ij} D_{ij}$

- 5.- Cálculo de θ_i :

$$\theta_i = \sum_{\text{ciclos}} \Delta \theta_i = \sum_{\text{ciclos}} \frac{M_i}{\sum_j K_{ij}} = \frac{\sum_{\text{ciclos}} M_i}{\sum_j K_{ij}} = \frac{\sum_{\text{ciclos}} M_i}{4 E K_o \sum_j k_{ij}}$$

- 6.- Los momentos finales (M_{ij}) se calculan por superposición de los momentos hallados en los diversos estados (E_i):

$$M_{ij} = \underbrace{u_{ij}}_{E_0} + \underbrace{D_{ij}}_{E_1} + \underbrace{T_{ij}}_{E_2} + \underbrace{D_{ij}}_{E_3} + \underbrace{T_{ij}}_{E_4} + \dots + \underbrace{D_{ij}}_{E_n}$$

ciclo 1
ciclo 2

El proceso culmina distribuyendo momentos para no desequilibrar los nudos con los momentos de transporte; salvo que el nudo pueda absorber el momento desequilibrado, por ejemplo, una conexión de empotramiento.

2.6.1. Solución de un Aligerado

Analizar el aligerado del edificio cuya planta típica se muestra en la Fig. 2.24. Se hace notar que este ejemplo es hipotético, ya que la placa está mal dispuesta en planta, lo que puede causar problemas torsionales por efectos sísmicos.

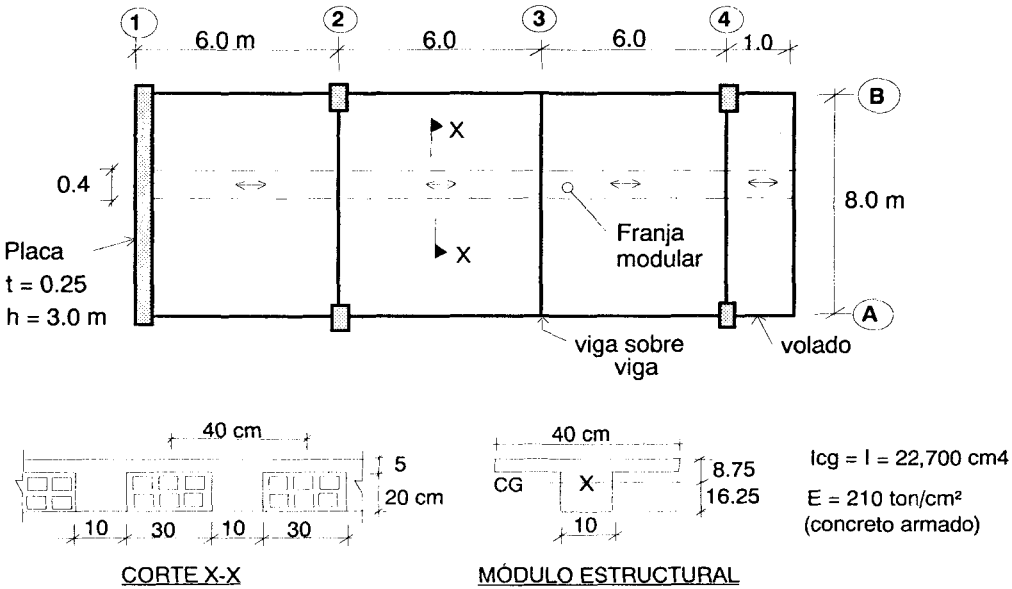


Fig. 2.24. Planta Típica de un Edificio.

Cargas: peso propio	=	0.35 ton/m ²
acabados	=	0.10
tabiquería móvil	=	0.10
s/c	=	0.30
w	=	0.85 ton/m ²

Nota: en realidad el análisis por carga permanente debe desdoblarse del análisis por sobrecarga (s/c), ya que los factores de seguridad son diferentes y también porque la s/c puede actuar en forma alternada.

El modelaje de la placa se hará empotrando sus extremos lejanos (Fig. 2.25), suponiendo que no existe repercusión de los giros de un nivel a otro; esta hipótesis es aceptada por la Norma de Concreto Armado E-060 y por el Reglamento norteamericano ACI para el análisis por carga vertical.

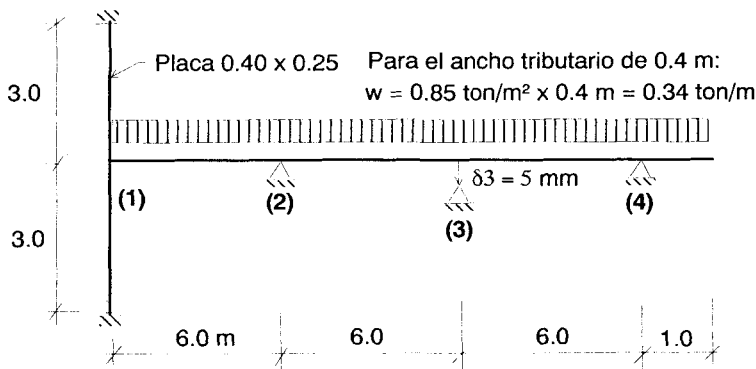


Fig. 2.25. Modelo Matemático del Aligerado (elevación).

La viga del eje 3 apoya sobre las vigas de los ejes A y B, mientras que las vigas de los ejes 2 y 4 apoyan sobre columnas; puesto que la luz $L_{24} \approx 12$ m es considerable, existirá un desplazamiento vertical importante en el apoyo 3. Se supondrá que δ_3 es igual a 5 mm; este valor puede calcularse analizando uno de los pórticos A o B de la manera mostrada en la Fig. 2.26.

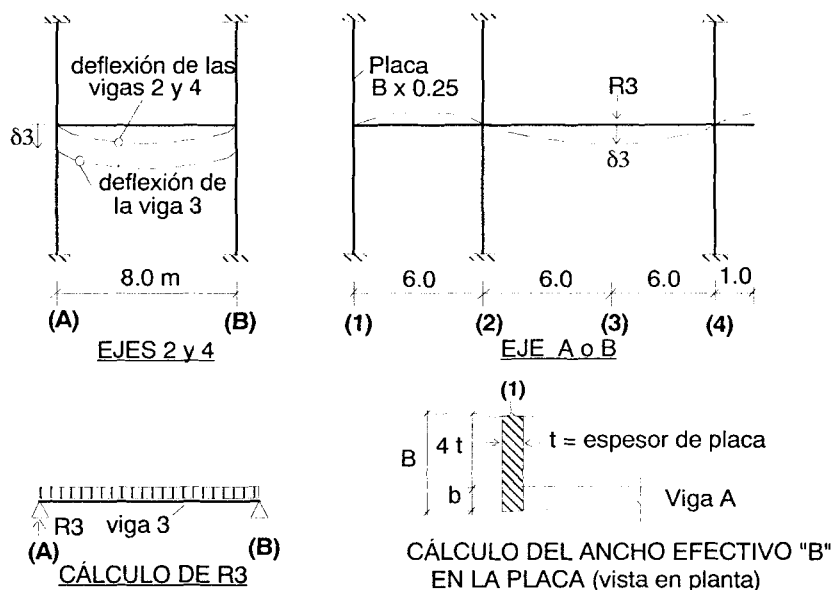


Fig. 2.26. Cálculo de " δ_3 ".

En el análisis del eje A (o B), la placa del eje 1 debe ser modelada considerando una sección transversal con un ancho efectivo igual a " B " y un peralte igual a " t "; esto se debe a que al rotar la viga del eje A (de ancho " b ") deforma sólo a una porción de la placa. Para fines prácticos puede usarse $B = b + 4t$, aunque algunos investigadores proponen otras expresiones en función de la longitud de la placa, de su altura, etc.

Retornando al ejemplo, en la placa se tiene: $I / L = 40 \times 25^3 / (12 \times 300) = 174 \text{ cm}^3$; como concurren dos placas al nudo 1 se tendrá: I / L (dos placas) = 348 cm^3 . Por otro lado, en el aligerado 1-2 se tiene: I / L (aligerado) = $22700 / 600 = 38 \text{ cm}^3$.

Según la Norma E-060, cuando una barra concurre a otra que es 8 veces más rígida, puede suponerse que esa barra está empotrada sobre la más rígida. Por lo tanto, se supondrá que el aligerado 1-2 está empotrado sobre la placa en el nudo 1 (en realidad $\alpha_{12} = 38 / (38 + 348) = 0.1$).

Con lo cual, el modelo del aligerado se simplifica al mostrado en la Fig. 2.27, donde se observa que el momento en 4-3 es conocido ($M_{43} = + 0.17 \text{ ton-m}$); por lo tanto, puede trabajarse reduciendo el grado de libertad θ_4 a cero.

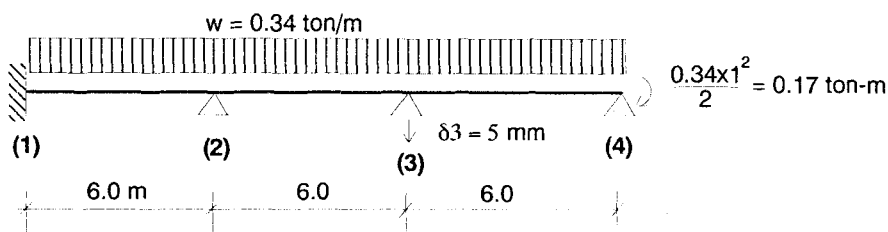


Fig. 2.27. Modelo Matemático Simplificado del Aligerado (elevación).

CÁLCULO DE RIGIDECES $k_{ij} = I / LK_o$ **y** **COEFICIENTES DE DISTRIBUCIÓN**
DE MOMENTOS $\alpha_{ij} = k_{ij} / \sum k_{ij}$

Adoptando $K_o = I / 6 \text{ m}$, se tiene:

$$k_{12} = (I / 6) / (I / 6) = 1 = k_{23}$$

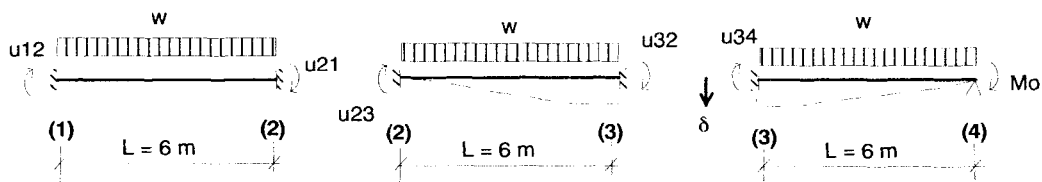
$$k_{34} = \frac{3}{4} (I / 6) / (I / 6) = 0.75$$

Nudo 2	k_{ij}	α_{ij}
2-1	1	0.5
2-3	1	0.5
$\Sigma =$	2	1.0

Nudo 3	k_{ij}	α_{ij}
3-2	1	0.57
3-4	0.75	0.43
$\Sigma =$	1.75	1.00

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO (Estado 0 o Estructura Primaria)

En 1-2: $u_{12} = -u_{21} = -w L^2 / 12 = -0.34 \times 6^2 / 12 = -1.02 \text{ ton-m}$



En 2-3: $u(\delta) = -6 E I \delta / L^2 = -6 \times 210 \times 22700 \times 0.5 / 600^2 = -40 \text{ ton-cm} = -0.4 \text{ ton-m}$

$$u_{23} = u(w) + u(\delta) = -1.02 - 0.40 = -1.42 \text{ ton-m}$$

$$u_{32} = u(w) + u(\delta) = 1.02 - 0.40 = 0.62 \text{ ton-m}$$

En 3-4: $u_{34}(w) = -w L^2 / 8 = -0.34 \times 6^2 / 8 = -1.53$

$$u_{34}(\delta) = -3 E I \delta / L^2 = -3 \times 210 \times 22700 \times (-0.5) / 600^2 = 20 \text{ ton-cm} = 0.2 \text{ ton-m}$$

$$u_{34}(Mo) = Mo / 2 = 0.17 / 2 = 0.08$$

$$u_{34} = u_{34}(w) + u_{34}(\delta) + u_{34}(Mo) = -1.25 \text{ ton-m}$$

Para el Cross se utilizará una aproximación de $(1 / 100) u_{\text{máx}} = 0.01 \text{ ton-m}$; trabajando en forma tabulada se obtiene:

α_{ij}	0.0	0.50	0.50	0.57	0.43	
Nudo	(1)	(2)	(3)			
u_{ij}	-1.02	1.02	-1.42	0.62	-1.25	$\underline{M}_i$
	0.10	0.20	0.20	0.10	0.00	$\underline{M}_2 = 0.4$
	0.00	0.00	0.15	0.30	0.23	$\underline{M}_3 = 0.53$
	-0.03	-0.07	-0.07	-0.03	0.00	$\underline{M}_2 = -0.15$
				0.02	0.01	$\underline{M}_3 = 0.03$
M_{ij}		-0.95	1.15	-1.14	1.01	-1.01

En este caso, se han tabulado los valores $\underline{M}_i$ sólo porque se calcularán las rotaciones:
 $\theta_i = \Sigma \underline{M}_i / \Sigma K_{ij} = \Sigma \underline{M}_i / (4 E K_o \Sigma k_{ij})$

Donde: $4 E K_o = 4 \times 210 \times 22700 / 600 = 31780 \text{ ton-cm} = 318 \text{ ton-m}$

Luego: $\theta_2 = (0.4 - 0.15) / (318 \times (1 + 1)) = 0.000393 \text{ rad} \dots$ (sentido horario)
 $\theta_3 = (0.53 + 0.03) / (318 \times (1 + 0.75)) = 0.001 \text{ rad} \dots$ (sentido horario)

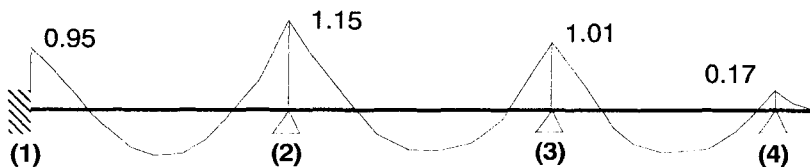


Fig. 2.28. Diagrama de Momento Flector (DMF) en ton-m

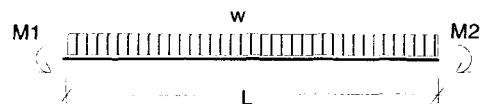
El DMF (Fig. 2.28) ha sido dibujado hacia el lado de la fibra traccionada. Los puntos de inflexión (PI) y los puntos donde se presentan los máximos momentos positivos, pueden determinarse con los métodos descritos en el acápite 2.7. La fuerza cortante V_{ij} , puede calcularse por equilibrio de cada tramo $i-j$, conociendo M_{ij} , M_{ji} y la carga actuante.

2.7. Métodos para el Trazado del Diagrama de Momento Flector

Se explicará dos procedimientos, uno manual (PEABODY) y el otro computacional, para dibujar el diagrama de momento flector.

2.7.1. Método de la Parábola Unidad (PEABODY)

Este método es aplicable al caso de barras sujetas a carga uniforme, con momentos conocidos en sus extremos.



El proceso consiste de los siguientes pasos:

- Tener dibujado de antemano una parábola cuadrática a cualquier escala (por ejemplo, luz = 10 cm, flecha = $f = 5$ cm).
- Definir las escalas: Longitud: $L = \text{luz} \dots$ escala horizontal
Momentos: $w L^2 / 8 = f \dots$ escala vertical
- Sobre la parábola llevar $M1$ y $M2$, empleando la escala de momentos.
- Trazar la línea de cierre (Fig. 2.29) y hallar los puntos de inflexión (PI).
- Trazar una paralela a la línea de cierre hasta que toque tangencialmente con la parábola (Fig. 2.29); en el punto de tangencia se hallará el máximo momento flector positivo ($M(+)$), cuya magnitud se mide con la escala de momentos.

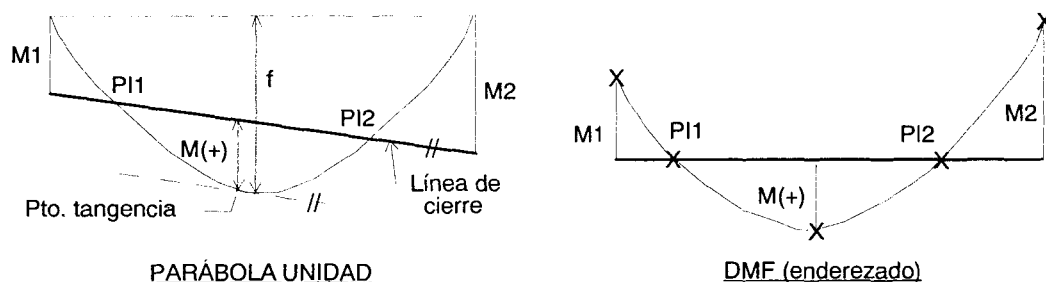


Fig. 2.29. Método de la Parábola Unidad.

- Finalmente, como se conoce 5 puntos ($M1$, $M2$, $PI1$, $PI2$ y $M(+)$ máximo), empleando un pistoleta se puede enderezar el Diagrama de Momento Flector.

La razón por la cual se le llama a este método "Parábola Unidad", se debe a que con una sola parábola puede definirse el DMF de una (o varias) viga con varios tramos (Fig. 2.30), ya que sólo será cuestión de modificar las escalas para el tramo en análisis.

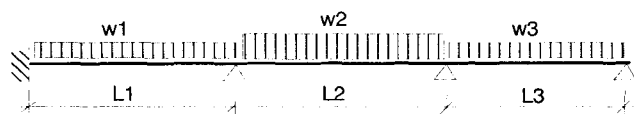


Fig. 2.30. Viga Continua de 3 Tramos.

Nótese además que si existiese una sola carga concentrada (P) al centro de un tramo, puede seguirse el método descrito, utilizando un triángulo de altura " f " en vez de la parábola cuadrática; en este caso, la escala de momentos se define igualando el momento isostático central ($PL / 4$) a " f ".

2.7.2. Proceso Computacional para el Trazado del DMF

Cuando se cuenta con una calculadora programable, o con una computadora personal, se sugiere aplicar el principio de superposición sobre las cargas, desdoblando el tramo en análisis en una serie de vigas isostáticas, donde en cada una de ellas ("i") actúa una sólo carga, por lo que el algoritmo que define su DMF (" $m_i(x)$ ") es conocido; finalmente, se suman los valores $m_i(x)$. Para aplicar este procedimiento es necesario desdoblar la longitud del tramo en una serie de intervalos de igual magnitud (L , Fig. 2.31) y guardar en variables dimensionadas los valores discretizados de $m_i(x)$.

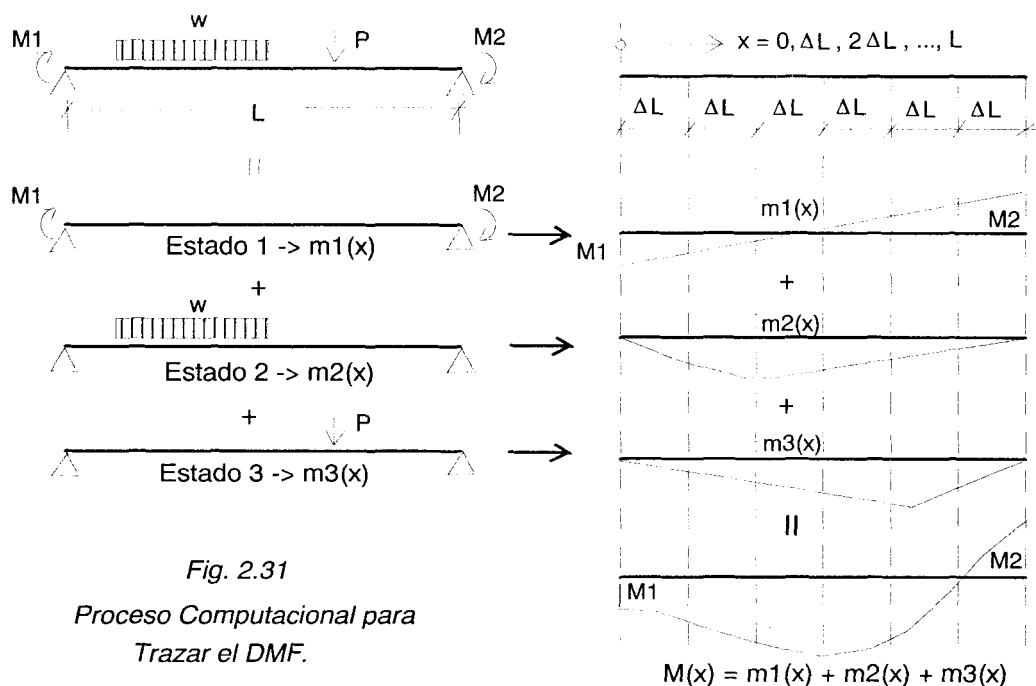


Fig. 2.31

Proceso Computacional para
Trazar el DMF.

Cabe mencionar que el Programa "VIGA1" (descrito en el acápite 3.2.2) aplica el método computacional propuesto, desdoblando la longitud de cada tramo de la viga continua en 16 intervalos equidistantes. Este programa soporta hasta 20 cargas distintas en cada tramo.

2.8. Proceso de Liberación Nudo por Nudo y de Liberación Simultánea

El procedimiento que se ha utilizado hasta el momento para la liberación de los nudos, se conoce como "Método de los Nudos Alternos", porque en cada estado la liberación (o distribución de momentos) se realizó sobre los nudos alternos, empotrando los adyacentes. Existen otros procedimientos que se mencionan a continuación.

a.- Liberación Nudo por Nudo

En este caso, por cada estado, se libera un sólo nudo y se empotra al resto; con lo cual, por cada ciclo habrá que llenar tantas líneas de cálculo como grados de libertad rotacionales tenga la estructura (Fig. 2.32), lo que evidentemente retarda el proceso. En cambio, en el procedimiento de liberación alterna, cualquiera sea la cantidad de nudos, por cada ciclo se llenan sólo dos líneas de cálculo (dos estados). Por esta razón, se descartará el procedimiento de Liberación Nudo por Nudo.

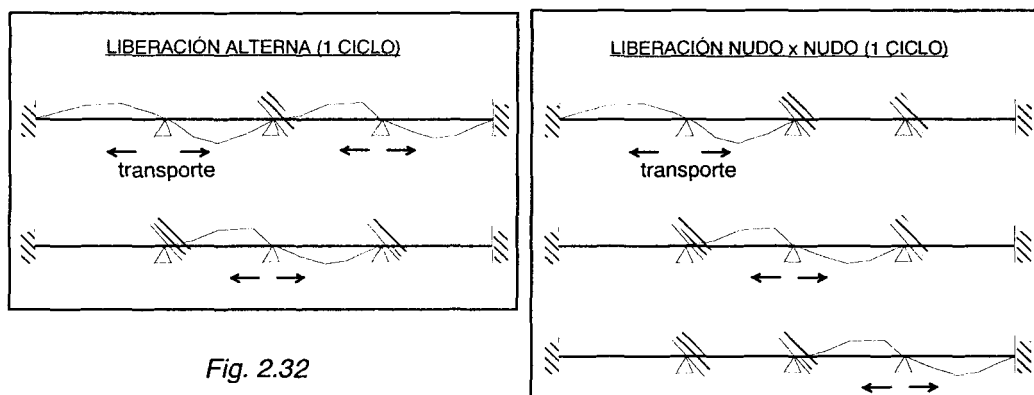
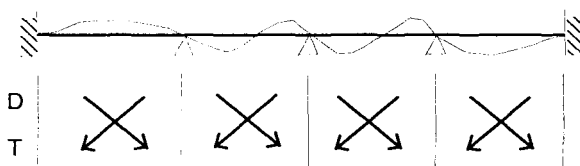


Fig. 2.32

b.- Liberación Simultánea

En este procedimiento se sueltan todos los nudos en forma simultánea (Fig. 2.33), lo que equivale a distribuir momentos en todos los nudos (o a equilibrarlos), para enseguida fijarlos, lo que equivale a transportar momentos rompiéndose nuevamente el equilibrio. En este procedimiento, al igual que en el de liberación alterna, también se llenan solamente dos líneas de cálculo, una de distribución de momentos (D) y la otra de transporte de momentos (T) en forma cruzada.

Fig. 2.33. LIBERACIÓN SIMULTÁNEA (1 CICLO)



En este procedimiento, al igual que en el de liberación alterna, también se llenan solamente dos líneas de cálculo, una de distribución de momentos (D) y la otra de transporte de momentos (T) en forma cruzada.

De los tres procesos de liberación, el más rápido en converger es el de Liberación Alterna; sin embargo, se recomienda usar ese procedimiento sólo para la solución de vigas, debido a que resulta muy engorroso aplicarlo en la solución de pórticos (Fig. 2.34). Para resolver pórticos mediante el método de Cross, es preferible aplicar el procedimiento de Liberación Simultánea, que es mucho más mecánico que el de Liberación Alterna, sin importar que se retarde la convergencia en uno o dos ciclos adicionales.

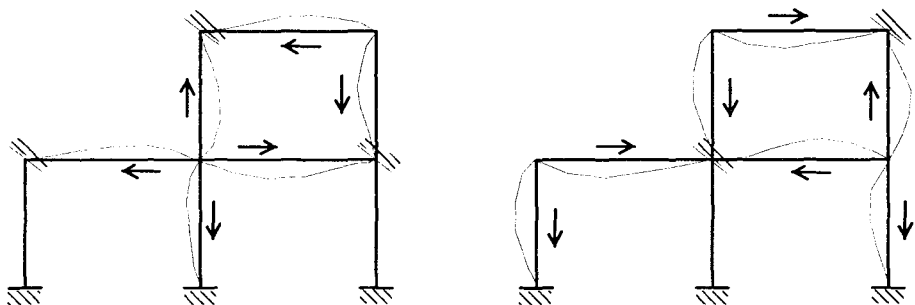
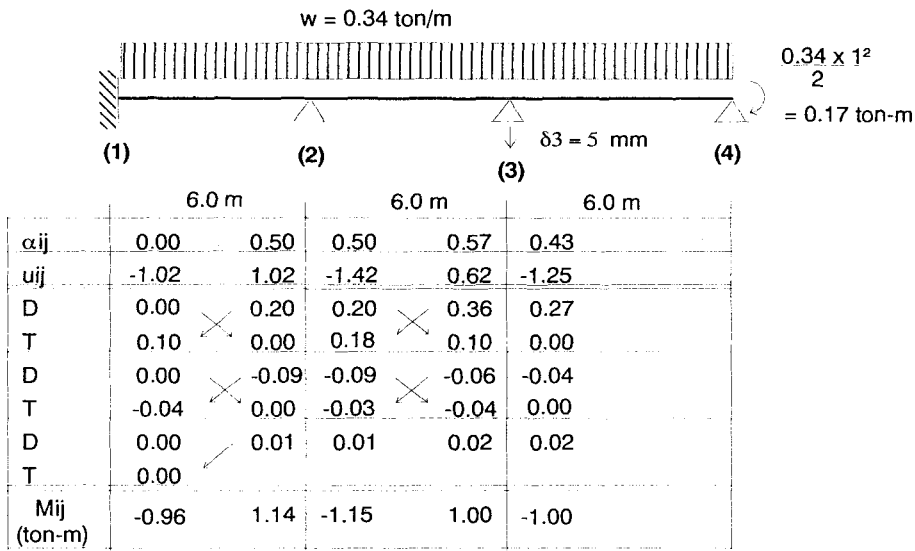


Fig. 2.34. Procedimiento de Liberación Alternativa (1 Ciclo) en un Pórtico.

2.8.1. Ejemplos de Aplicación

1.- Resolver el aligerado anterior (Fig. 2.27) mediante el proceso de Liberación Simultánea. En este caso, los coeficientes de distribución de momentos y los momentos de empotramiento no varían; sin embargo, en el proceso de Liberación Simultánea se realiza un ciclo más que en el de Liberación Alternativa, a pesar de que en ambos casos se trabaja con la misma precisión (0.01 ton-m).



2.- Resolver el aligerado anterior (Fig. 2.27) sin reducir el grado de libertad θ_4 (como si la barra 3-4 fuese continua); se utilizará el proceso de Liberación Alternativa.

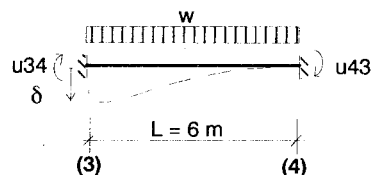
En este caso: $k_{12} = k_{23} = k_{34} = I / LK_o = (I/6) / (I/6) = 1$. Con $\alpha_{43} = k_{43} / k_{43} = 1$. Adicionalmente, los momentos de fijación en 3-4 deben calcularse sobre la barra biempotrada:

$$u(w) = w L^2 / 12 = 1.02 \text{ ton-m}$$

$$u(\delta) = 6 E I \delta / L^2 = 0.40 \text{ ton-m}$$

Con lo cual: $u_{34} = -1.02 + 0.40 = -0.62 \text{ ton-m}$

$$u_{43} = 1.02 + 0.40 = 1.42 \text{ ton-m}$$



También, deberá recordarse que en el nudo 4 existe un momento aplicado cuya magnitud es: $M_{o4} = + 0.17 \text{ ton-m}$. Trabajando con el proceso de liberación alterna se obtiene:

α_{ij}	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	1.00	
Nudo	(1)	-----k=1-----	(2)	-----k=1-----	(3)	-----k=1-----	(4)
u_{ij}	-1.02	1.02	-1.42	0.62	-0.62	1.42	<u>M4:</u>
	0.10 →	0.20	0.20 →	0.10	-0.62 →	-1.25	<u>M4</u> = -1.25
	0.00 ←	0.00	0.13 ←	0.26	0.26 ←	0.13	
	-0.03 →	-0.06	-0.06 →	-0.03	-0.06 →	-0.13	<u>M4</u> = -0.13
	0.00 ←	0.00	0.02 ←	0.04	0.04 ←	0.02	
		-0.01	-0.01		-0.02		<u>M4</u> = -0.02
M_{ij}	-0.95	1.15	-1.14		0.99	-1.00	0.17

$$\theta_4 = \Sigma \underline{M4} / (4 E K_o \Sigma k_{ij}) = (-1.25 - 0.13 - 0.02) / (318 \times 1) = -0.0044 \text{ rad}$$

Nota: En el primer ciclo $\underline{M4} = M_{o4} - u_{43} = 0.17 - 1.42 = -1.25$. También, como en Cross se trabaja con los momentos en los extremos de las barras, puede "pensarse" que M_{o4} actúa en sentido contrario sobre la barra 4-3, luego, para equilibrarlo, se deberá aplicar: $\underline{M4} = -(-M_{o4}) - u_{43}$.

2.9. Estructuras Simétricas en Forma

En caso no se desee aplicar el concepto de barra equivalente para reducir los grados de libertad, puede trabajarse con media estructura aplicando los siguientes conceptos.

2.9.1. Carga Simétrica

En la Fig. 2.35 puede observarse que $\theta_i = -\theta_j$, por lo que durante el proceso iterativo se tendrá:

$$\Delta \theta_i = -\Delta \theta_j$$

Por simetría en forma: $f_{ij} = f_{ji}$ y $K_{ij} = K_{ji}$

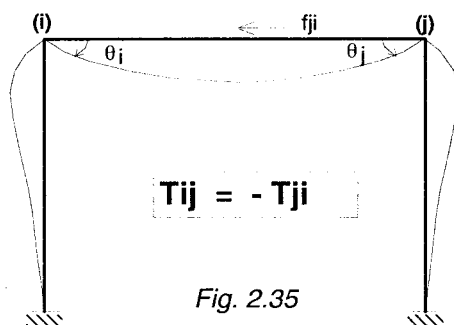
Con lo cual: $D_{ij} = K_{ij} \Delta \theta_i = K_{ji} (-\Delta \theta_j) = -K_{ji} \Delta \theta_j = -D_{ji}$

Lo que proporciona: $D_{ij} = -D_{ji}$

El momento que se transporta desde "j" hacia "i" es:

$$T_{ij} = f_{ji} D_{ji} = f_{ij} (-D_{ij}) = -T_{ji}$$

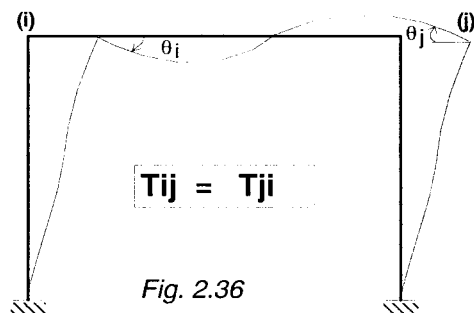
De esta manera, se llega a la conclusión que el momento transportado desde "j" hacia "i" (T_{ij}), puede obtenerse como el mismo momento que se transporta desde "i" hacia "j" (T_{ji}), pero cambiándole el signo. Esto permite trabajar sólo con el nudo "i", (media estructura) obviando al nudo "j".



2.9.2. Carga Antisimétrica

En este caso $\theta_i = \theta_j$ (Fig. 2.36), por lo que siguiendo el procedimiento indicado en 2.9.1 se concluye que $T_{ij} = T_{ji}$.

Es decir, para estos casos, no existe la necesidad de cambiar el signo a T_{ji} .



Cabe mencionar que los conceptos explicados son válidos para todo tipo de estructuras simétricas en forma, incluso compuestas por barras de sección variable, placas o muros de albañilería (Fig. 2.37).

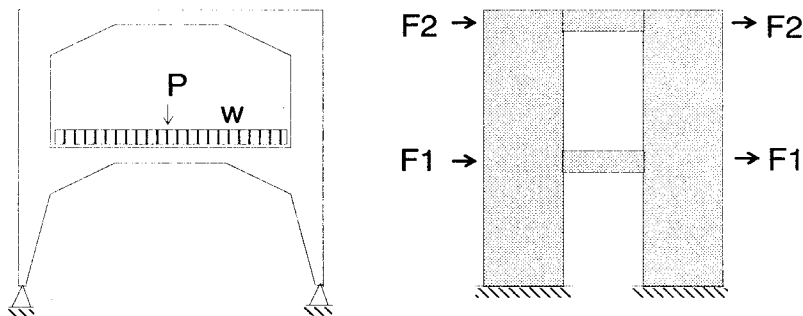


Fig. 2.37. Estructuras Simétricas en Forma con Carga Simétrica y Antisimétrica.

2.9.3. Ejemplos de Aplicación

- 1.- Resolver el pórtico simétrico mostrado en la Fig. 2.38. Las vigas se trabajarán adoptando $T_{ij} = -T_{ji}$, ya que en ellas se cumple que $\theta_i = -\theta_j$.

En la Fig. 2.38 se observa que $M_{o3} = -1$ ton-m, y que $u_{25} = u_{36} = -2 \times 6^2 / 12 = -6$ ton-m. Por otro lado, se trabajará con el proceso de Liberación Simultánea, con una aproximación de 0.01 ton-m, sombreándose las barras que tienen un tratamiento especial ($T_{ij} = -T_{ji}$). Adicionalmente, se calculará θ_3 .

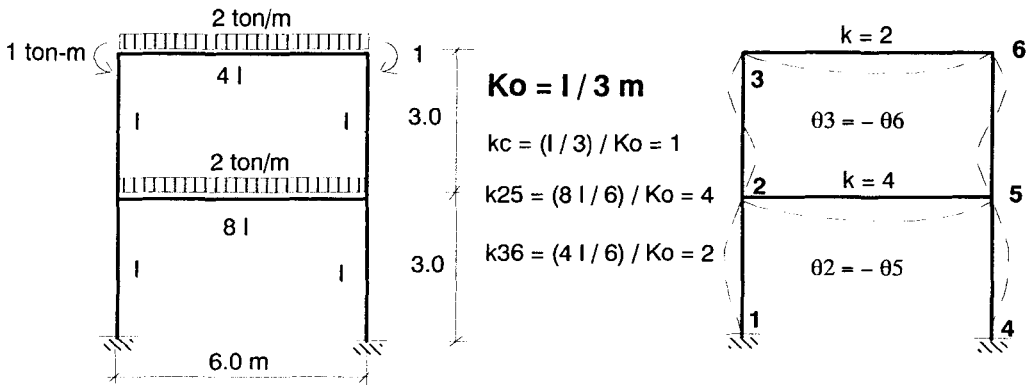


Fig. 2.38. Ejemplo de Aplicación en un Pórtico Simétrico en Forma y Carga.

Nudo	1	2			3		
Barra	1-2	2-1	2-5	2-3	3-2	3-6	
α_{ij}	0.00	1/6	4/6	1/6	1/3	2/3	$M_3 =$
u_{ij}	0.00	0.00	-6.00	0.00	0.00	-6.00	
D	0.00	1.00	4.00	1.00	1.66	3.33	-1 + 6
T	0.50	0.00	-2.00	0.83	0.50	-1.66	= +5.00
D	0.00	0.19	0.78	0.19	0.39	0.77	1.66 - 0.5
T	0.09	0.00	-0.39	0.19	0.09	-0.39	= +1.16
D	0.00	0.03	0.13	0.03	0.10	0.20	.39 - 0.09
T	0.01	0.00	-0.06	0.05	0.01	-0.10	= +0.30
D	0.00	0.00	0.01	0.00	0.03	0.06	0.1 - 0.01
							= +0.09
Mij	0.60	1.22	-3.53	2.29	2.78	-3.79	

Cálculo de $\theta_3 = (5 + 1.16 + 0.3 + 0.09) / (4 E K_o (1 + 2)) = 1.64 / E I \text{ rad}$

Observación:

En toda barra descargada cuyo extremo "i" no rota, mientras que "j" rota, y que no tenga desplazamiento relativo entre sus extremos (tal como la barra 1-2), el momento en "i" puede calcularse aplicando la definición de factor de transporte: $T_{ij} = f_{ji} M_{ji}$. Por ejemplo, para la barra 1-2 se tiene: $T_{12} = f_{21} \times M_{21} = \frac{1}{2} \times 1.22 = 0.6 \text{ ton-m}$ (Fig. 2.39).

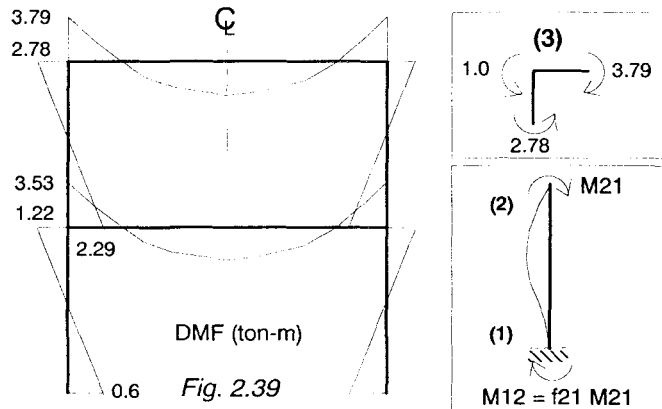
Por otra parte, en la columna 2-1 de la Tabla se observa que no existe momento de transporte que provenga de 1-2 (siempre $T_{21} = 0$), es decir sólo existe D_{21} (momentos

equilibrantes), por lo tanto, M_{21} puede obtenerse al final del proceso por equilibrio del nudo 2. De esta manera, está demás tabular las columnas 1-2 y 2-1.

En conclusión, de cumplirse las 3 condiciones mencionadas:

- a) $\theta_i = 0$; $\theta_j \neq 0$
- b) $\delta_{ij} = 0$
- c) barra i-j descargada

Entonces la barra i-j podrá reemplazarse por un resorte helicoidal que rigidiza al nudo "j" (Fig. 2.40).



2.- Resolver el problema anterior (Fig. 2.38) simplificándolo al máximo (Fig. 2.40).

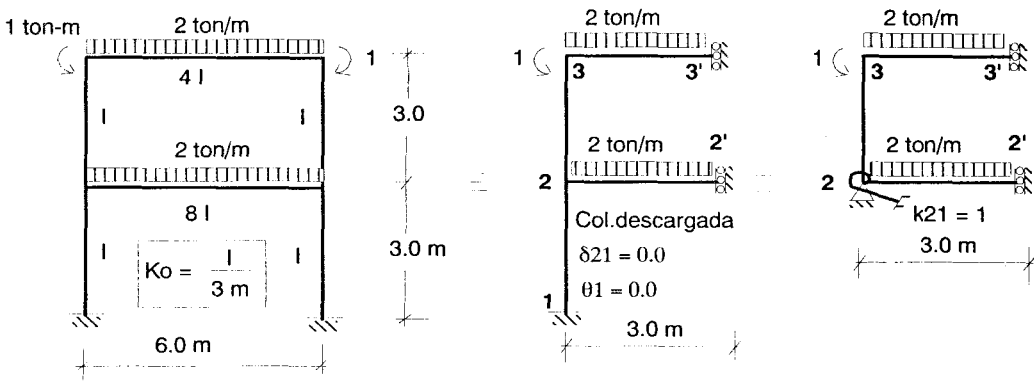


Fig. 2.40. Modelo Matemático Simplificado al Máximo.

En el último esquema de la Fig. 2.40, los desplazamientos verticales de los nudos $2'$ y $3'$ no son grados de libertad, ya que se conoce la fuerza cortante en $2'$ y $3'$ ($V_{2'2} = V_{3'3} = 0$); lo propio ocurriría si existiese una carga concentrada en $2'$ o $3'$. Por lo tanto, trabajando con las barras equivalentes, se tiene:

$$\begin{aligned}
 k_{22'} &= \frac{1}{4} (8 I / 3) / K_o = 2 \\
 k_{33'} &= \frac{1}{4} (4 I / 3) / K_o = 1 \\
 k_{23} &= k_{21} = (I / 3) / K_o = 1
 \end{aligned}$$

El momento de empotramiento se calcula sobre la viga con conexión deslizante, o también, empleando la barra con doble longitud (por simetría en carga):

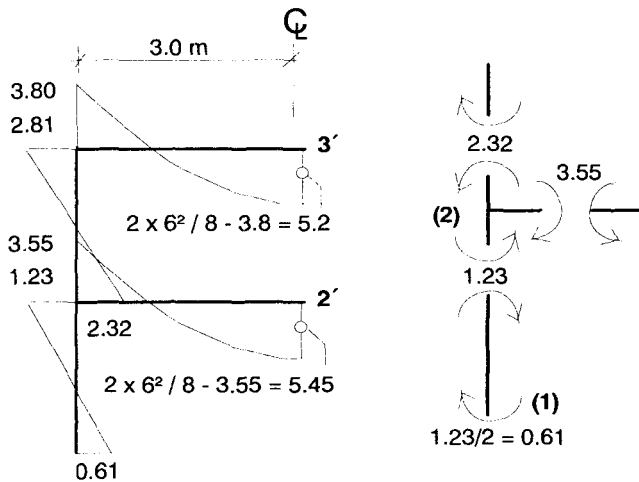
$$u_{22'} = u_{33'} = -2 \times 6^2 / 12 = -6 \text{ ton-m}$$

Luego, aplicando el proceso de Liberación Simultánea, se tiene:

Nudo	2		3		
Barra	2-2'	2-3	3-2	3-3'	
α_{ij}	0.50	0.25	0.50	0.50	
a_{uij}	-6.00	0.00	0.00	-6.00	$M_3 =$
D	3.00	1.50	2.50	2.50	-1+6=5
T	0.00	1.25	0.75	0.00	
D	-0.62	-0.32	-0.37	-0.37	-0.75
T	0.00	-0.19	-0.16	0.00	
D	0.09	0.05	0.08	0.08	+0.16
T	0.00	0.04	0.02	0.00	
D	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02
T					
M_{ij}	-3.55	2.32	2.81	-3.80	

Nótese que los nudos 2' y 3' no se tabulan, porque $M_{2'2}$ y $M_{3'3}$ pueden calcularse por equilibrio al final del proceso. Asimismo, M_{21} se determina por equilibrio del nudo 2 y M_{12} se calcula aplicando la definición de factor de transporte.

$$\text{Cálculo de } \theta_3 = (5 - 0.75 + 0.16 - 0.02) / (4 E K_o (1 + 1)) = 1.65 / EI \text{ rad}$$



2.9.4. Problema Propuesto

En la figura 2.42 se muestra la planta típica de un edificio de concreto armado destinado a oficinas, se pide analizar el aligerado comprendido entre los ejes B y C (zona con parapeto) mediante el método de Cross. Se utilizará los siguientes procedimientos:

1.- LIBERACIÓN ALTERNA:

- 1.a. Estructura total, sin reducir grados de libertad (GL).
- 1.b. Media estructura (simetría), reduciendo todos los GL posibles.

2.- LIBERACIÓN SIMULTÁNEA:

- 2.a. Estructura total, sin reducir grados de libertad.
- 2.b. Estructura total, reduciendo sólo los GL θ_1 y θ_4

Suponer:

$$K_o = 1/4 \text{ m}$$

I = momento de inercia del aligerado

Peso del aligerado = 0.3 ton/m^2

Acabados = 0.1 ton/m^2

Tabiquería flotante = 0.1 ton/m^2

Sobrecarga = 0.25 ton/m^2

Parapeto de Albañilería:

$$h = 1.2 \text{ m}$$

$$t = 0.15 \text{ m}$$

$$\gamma = 1.8 \text{ ton/m}^3$$

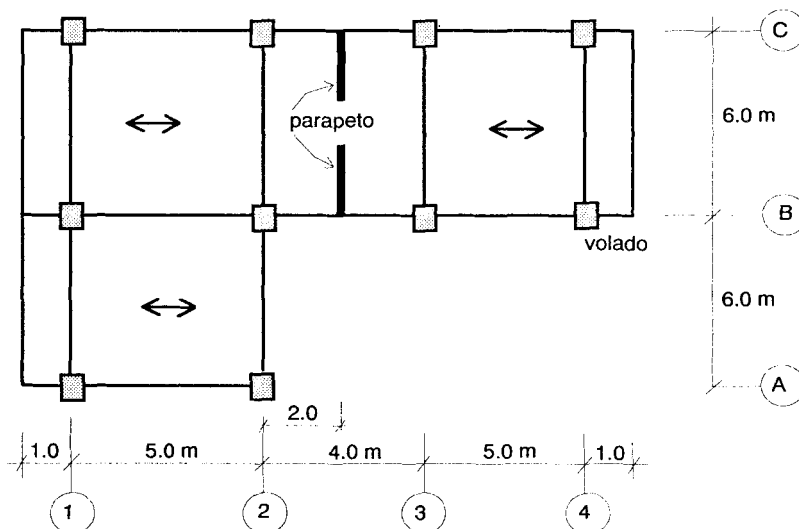


Fig. 2.42. Problema Propuesto.

ANÁLISIS SIMPLIFICADO DE VIGAS SUJETAS A CARGA VERTICAL

3.1. Hipótesis Simplificatoria de la Norma E-060

La norma peruana de concreto armado E-060, así como el reglamento norteamericano ACI, permiten analizar a las vigas de los edificios sujetas a carga vertical, suponiendo que los extremos lejanos de las columnas que concurren a la viga en estudio, están empotrados (Fig. 3.1); esto es, se supone que no existe repercusión de los giros entre los niveles consecutivos.

La hipótesis mencionada es correcta cuanto mayor sea la rigidez al giro de las columnas (K_i) en relación con la rigidez de las vigas, ya que en ese caso, las vigas estarían prácticamente empotradas en las columnas y el efecto de las rotaciones sobre los esfuerzos sería despreciable.

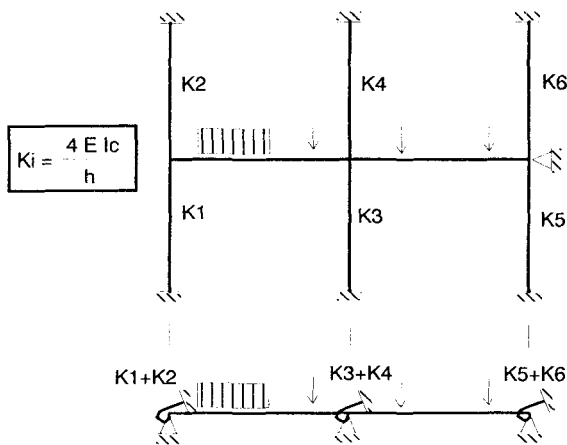


Fig. 3.1. Modelo Simplificado de una Viga.

También se admite que los pórticos no tienen desplazamiento lateral, o que los efectos de estos desplazamientos son despreciables. Esta hipótesis es cierta cuando el edificio es simétrico, o sino, cuando contiene una densidad adecuada de placas o muros de albañilería (elementos muy rígidos lateralmente) que limitan los desplazamientos horizontales; lo último puede explicarse por el hecho que los pórticos están conectados entre sí a través de la losa del techo (Fig. 3.2 y 3.3), la que se asume que actúa como una gran plancha axialmente rígida ("DIAFRAGMA RÍGIDO") que trata de compatibilizar los

desplazamientos laterales de los distintos ejes, por lo tanto, si uno de los ejes no se desplaza, el resto tampoco lo hará.

La hipótesis de Diafragma Rígido es válida cuando los techos son losas aligeradas o macizas, pero no es aplicable cuando el techo es metálico o de madera, en cuyo caso, los pórticos deben analizarse independientemente contemplando los desplazamientos laterales. Asimismo, debe indicarse que la hipótesis simplificatoria de la Norma E-060 es válida sólo cuando se analiza por carga vertical a los pórticos, ya que los muros se desplazan lateralmente cuando el edificio está sujeto a cargas horizontales.

En la Fig. 3.1 se aprecia que las columnas están descargadas, que no tienen desplazamiento relativo entre sus extremos y que mientras uno de sus extremos rota, el otro está empotrado, por lo que cumpliéndose estas tres condiciones (ver el acápite 2.9.3), las columnas podrán ser reemplazadas por resortes helicoidales, cuyas constantes son iguales a la suma de las rigideces al giro de las columnas que concurren al nudo respectivo, esto permite simplificar aún más el modelo matemático de las vigas.

3.1.1. Ejemplo de Aplicación

Resolver la viga del segundo nivel correspondiente al eje 2 del edificio cuyas plantas se muestran en la Fig. 3.2. Se supone que las cargas actuantes en el eje 2 han sido calculadas mediante un metrado previo. Se adoptará: Vigas de 30 x 60 cm, Columnas de 30 x 30 cm y $K_0 = 225 \text{ cm}^3$.

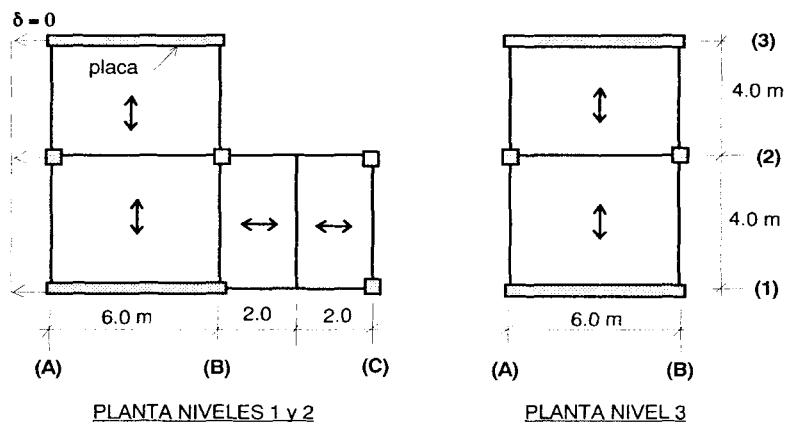


Fig. 3.2. Plantas del Edificio en Estudio por Carga Vertical.

En la Fig. 3.2 puede apreciarse que los ejes 1 y 3 tienen placas, por lo que ante la acción de las cargas verticales prácticamente no se desplazan lateralmente. De esta manera, puede asumirse $\delta = 0$ en los ejes 1 y 3, pero, al estar conectado el eje 2 (a través de la losa del techo) con los ejes 1 y 3, no se desplazará horizontalmente, con lo cual, el modelo matemático del eje 2 será el mostrado en la Fig. 3.3.

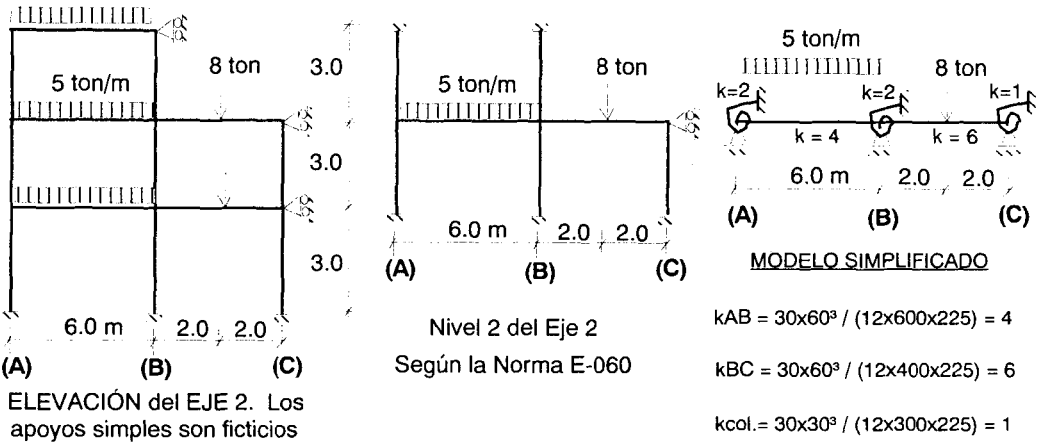


Fig. 3.3. Modelo Matemático de la Viga del Segundo Nivel. Eje 2 de la Fig. 3.2.

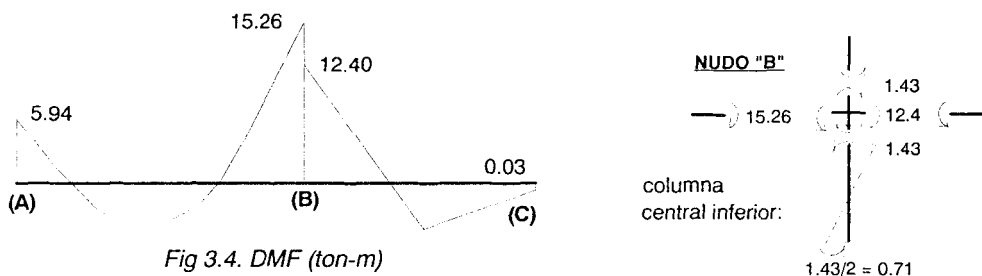
Momentos de empotramiento: $u_{AB} = -u_{BA} = -5 \times 6^2 / 12 = -15 \text{ ton-m}$
 $u_{BC} = -u_{CB} = -8 \times 4 / 8 = -4 \text{ ton-m}$

Luego, aplicando Cross (proceso de Liberación Alterná) se tiene:

Nudo	(A)	(B)	(C)	
α_{ij}	0.667	0.333	0.50	0.857
u_{ij}	-15.00	15.00	-4.00	4.00
	10.00 → 5.00 -2.38 ← -4.76	-1.71 → -3.43 -7.14 ← -3.57		
	1.59 → 0.79 -0.38 ← -0.77	1.53 → 3.06 -1.16 ← -0.58		
	0.25 → 0.12 -0.06 ← -0.12	0.25 → 0.50 -0.18 ← -0.09		
	0.04 → 0.02 -0.02	0.04 → 0.08 -0.03		
Mij	-5.94	15.26	-12.40	-0.03

Nótese que las rotaciones θ_A y θ_C no pueden reducirse a cero, ya que se desconoce la magnitud de los momentos M_{AB} y M_{CB}

Para obtener el momento flector en las columnas, deberá repartirse el momento desequilibrado en los nudos proporcionalmente a las rigideces de las columnas que concurran al nudo en análisis. El diagrama de momento flector, así como el cálculo de los momentos en la columna central del segundo entepiso, se muestran en la Fig. 3.4.



Nótese en la Fig. 3.4 que el momento en C-B es pequeño y se invierte de sentido, esto se debe a que: 1) la viga está prácticamente articulada en C, ya que ella es 6 veces más rígida que la columna; y, 2) la carga resultante en A-B (30 ton) es mayor a la que existe en B-C (8 ton), lo que genera inversión de momentos en C-B.

3.2. Máximos Momentos Flectores en Vigas de Edificios

En un edificio las sobrecargas (s/c) actúan en forma esporádica sobre sus ambientes (Fig. 3.5); es decir, un día el ambiente puede estar sobrecargado y al otro día descargado. Esta continua variación en la posición de la sobrecarga origina los máximos esfuerzos en los diversos elementos estructurales, que deben ser contemplados en el diseño.

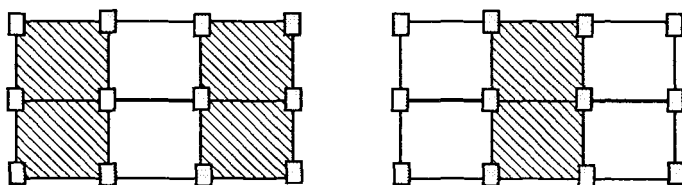
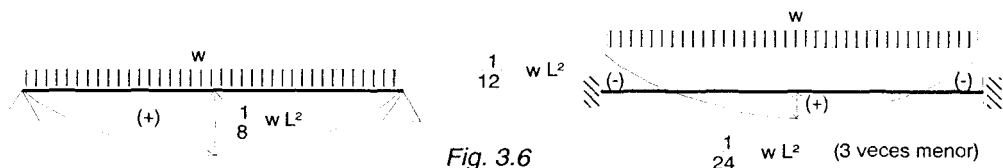


Fig. 3.5. Variación en la Posición de la S/C

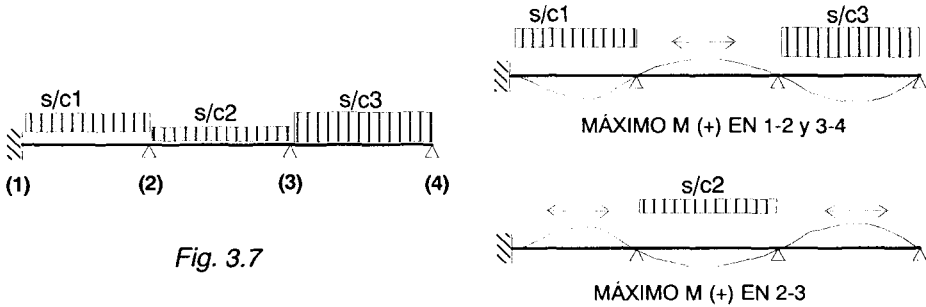
a.- Máximo Momento Flector Positivo

Para determinar el máximo momento flector positivo debe buscarse que los extremos del tramo sobrecargado roten lo mayor posible, asimilando el tramo en análisis al caso de una viga simplemente apoyada (Fig. 3.6).

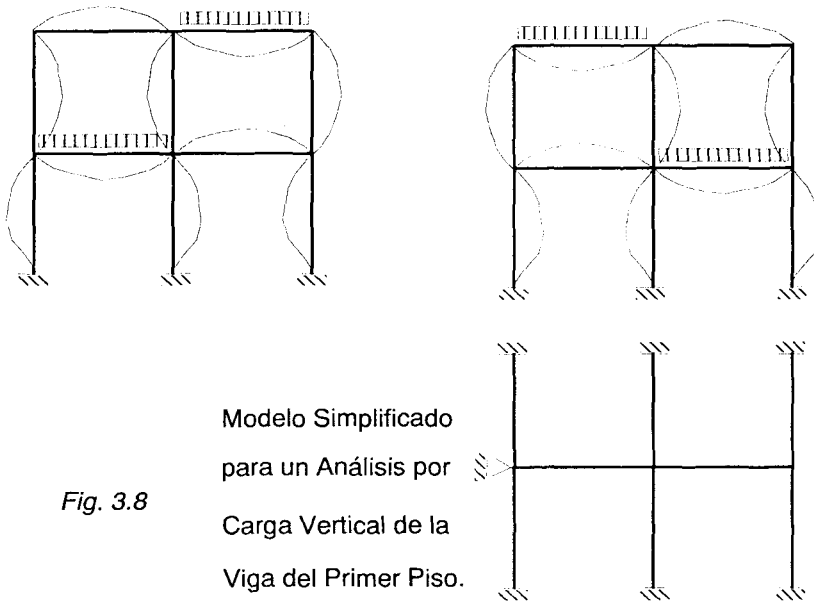


Esta condición se logra sobrecargando en forma alternada los tramos. Para la viga que se muestra en la Fig. 3.7, los máximos momentos positivos en los tramos 1-2 y 3-4 se logran sobrecargando en forma simultánea dichos tramos y descargando al tramo central, ya

que si se hubiese sobrecargado también al tramo central, la deformada se aplastaría y las rotaciones de los nudos 2 y 3 decrecerían; cabe destacar que ante esa hipótesis de carga podría ocurrir inversiones de esfuerzos en la región central del tramo 2-3. En cambio, el máximo momento positivo en el tramo central (2-3) se obtiene sobrecargando sólo ese tramo y descargando los paños adyacentes.



Para el caso de los pórticos se sobrecarga con una disposición en forma de “damero”; aunque, para estos casos, puede emplearse el modelo simplificado de la Norma E-060 (Fig. 3.8). Cabe mencionar que cualquiera fuese el caso, se necesita resolver tan sólo dos hipótesis de carga para obtener los máximos momentos positivos en todas las vigas del pórtico.



b.- Máximo Momento Flector Negativo

Si se desea obtener el máximo momento flector negativo en un nudo, debe tratarse que ese nudo rote la menor cantidad posible, mientras que el nudo opuesto tiene que rotar lo

mayor posible, tratando de asimilar el tramo sobrecargado al caso de una viga empotrada en el extremo en estudio y articulada en el otro (Fig. 3.9). Esta condición permite además calcular la máxima fuerza cortante en el nudo empotrado.

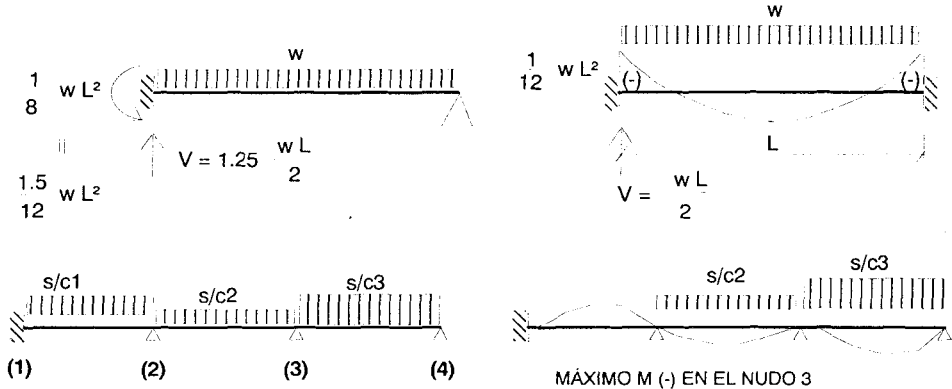


Fig. 3.9. Máximo Momento Flector Negativo.

Para las vigas que constan de muchos tramos, puede analizarse sólo los nudos de interés, adoptando modelos simplificados como los mostrados en la Fig. 3.10.

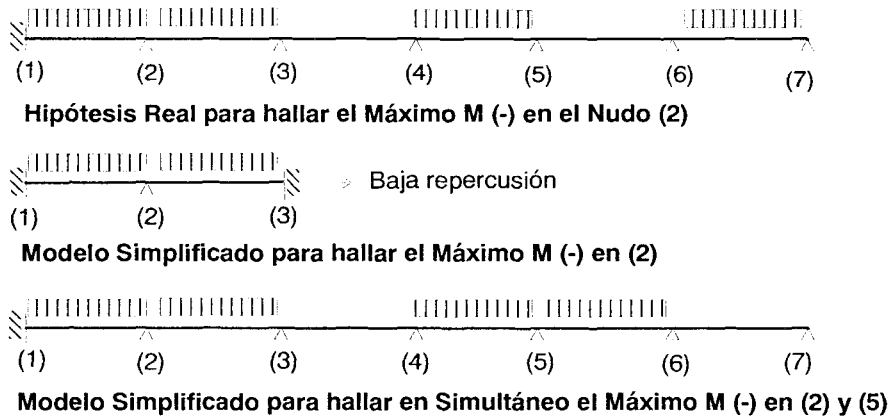


Fig. 3.10. Modelos Simplificados para Obtener el Máximo Momento Negativo.

Sin embargo, ha podido observarse que mientras no exista mucha variación en la magnitud de la sobrecarga, así como en las longitudes de los tramos, es suficiente con sobrecargar todos los tramos para calcular simultáneamente los máximos momentos negativos en todos los nudos. Otras razones que conducen a esa conclusión son:

- a.- En los edificios altos las columnas son robustas en comparación con las vigas; esto hace que las vigas estén prácticamente biempotradas, en cuyo caso, ni siquiera

será necesario realizar las alternancias de sobrecarga para hallar el máximo momento positivo. En estas situaciones, basta con sobrecargar todos los tramos en simultáneo como para obtener, con buena aproximación, los máximos momentos flectores positivos y negativos.

- b.- Todas las combinaciones de sobrecarga no se presentan al mismo tiempo, por lo que resulta muy conservador diseñar las vigas como para que soporten la envolvente de los máximos momentos flectores.
- c.- Existe un fenómeno denominado Redistribución de Momentos (que se ve en detalle en los libros de Concreto Armado y Estructuras Metálicas), por el cual, en los nudos convenientemente confinados por estribos a corto espaciamiento (no en aligerados), puede presentarse la rótula plástica, manteniéndose constante el momento negativo (M_p en la Fig. 3.11), mientras que el positivo se incrementará con el incremento de la solicitación; esto puede ocurrir cuando el nudo es diseñado para soportar un momento negativo menor al máximo valor que puede originarse ante las distintas combinaciones de sobrecarga. Cabe mencionar que en las vigas de concreto armado no es conveniente que las rótulas plásticas se formen en su zona central, porque esa zona usualmente carece de estribos a corto espaciamiento.

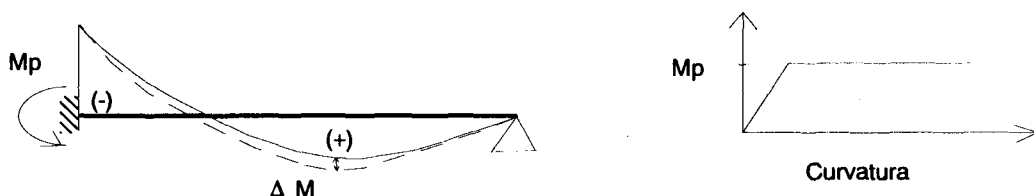


Fig. 3.11. Redistribución de Momentos.

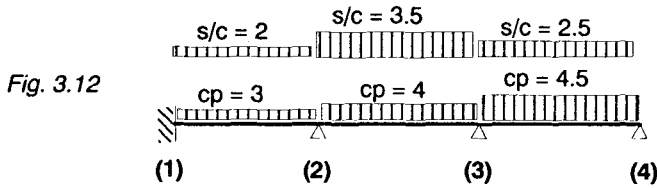
3.2.1. Envolvente de Momento Flector

Por lo expresado en los párrafos anteriores, para determinar los máximos momentos flectores positivos se realizará la alternancia de sobrecargas, mientras que para evaluar los máximos momentos negativos se sobrecargará todos los tramos en simultáneo, a no ser que exista demasiada diferencia entre las magnitudes de la sobrecarga o entre las longitudes de los tramos, en cuyo caso, deberá realizarse la combinación de sobrecarga que permita calcular el máximo momento flector negativo en cada nudo.

Cabe resaltar que las combinaciones se realizan variando la posición de las sobrecargas, en vista que las cargas permanentes (c_p) siempre están presentes, en tanto que el efecto sísmico y los factores que se utilizan para amplificar las cargas para pasarlas a condición de "rotura", se verán en el acápite 7.2.

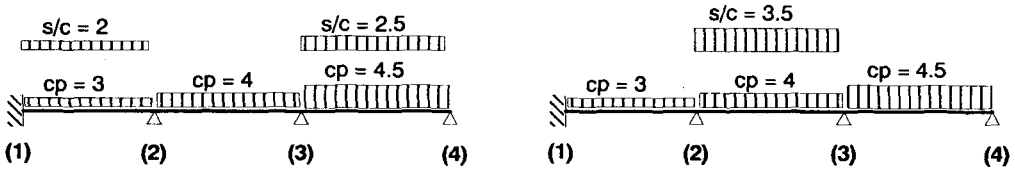
Cada hipótesis de carga genera su propio diagrama de momento flector (DMF) y su propio diagrama de fuerza cortante (DFC), y para el diseño se utiliza la curva que envuelva a estos diagramas ("Envolvente del DMF" y "Envolvente del DFC").

Como ejemplo se verá como abordar el problema mostrado en la Fig. 3.12.

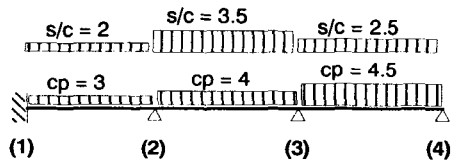


Los pasos a seguir son:

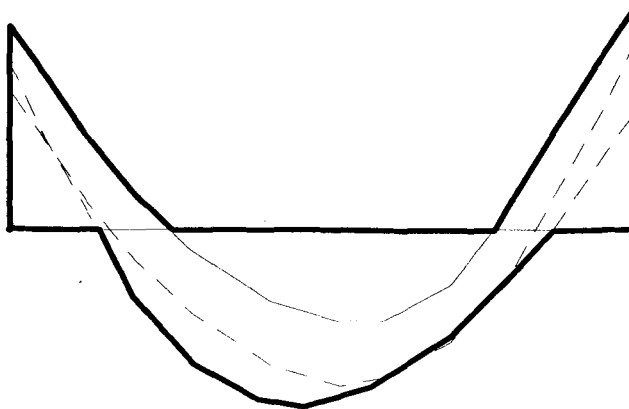
- 1.- Efectuar las alternancias de sobrecarga para determinar los máximos momentos flectores positivos; luego, resolver cada estado aplicando Cross, para después graficar para cada hipótesis de carga su DMF, montándolos en un sólo diagrama.



- 2.- Sobrecargar totalmente la estructura para obtener, aproximadamente, los máximos momentos flectores negativos; luego, resolver la estructura aplicando Cross, para después trazar su DMF montándolo sobre los diagramas anteriores.



- 3.- Trazar la envolvente del DMF; por ejemplo, para el tramo 2-3 se tendría:



3.2.2. Programa VIGA1

El programa "VIGA1", cuyo manual de uso es "VIGA 1.MAN", realiza todas las combinaciones de cargas verticales descritas en el acápite 3.2.1, e incluso, proporcionando los momentos sísmicos correspondientes a los extremos de cada tramo (evaluados con otro programa, por ejemplo: "EDIFICIO"), ejecuta las combinaciones de carga especificadas por la Norma E-060, amplificando las cargas de servicio (datos) por los factores de carga indicados por dicha Norma (por ejemplo: 1.5 para carga permanente y 1.8 para sobrecarga; ver el resto de factores en el acápite 7.2), con lo cual, el programa dibuja la envolvente de esfuerzos en condición de "rotura".

Este programa utiliza el modelo simplificado de la Norma E-060 para el análisis de vigas de hasta 10 tramos sujetas a carga vertical, y para el trazado de la envolvente del DMF, se subdivide la longitud de cada tramo en 16 intervalos equidistantes (ver la Fig. 2.31).

La información que se proporciona al programa (características geométricas y elásticas de las barras, cargas verticales de servicio, momentos sísmicos, etc.), debe almacenarse en un archivo de datos, cuyo nombre lo define el usuario (por ejemplo: VIGAX.DAT) y los resultados (momentos y cortantes en condición de servicio y de rotura), se graban en otro archivo (por ejemplo: VIGAX.RES). En conjunto con el manual de uso, se proporciona un ejemplo de aplicación, cuyos datos aparecen en el archivo VIGA1.DAT, mientras que los resultados están en el archivo VIGA1.RES.

Estos archivos pueden ser manejados con cualquier procesador de textos, con tal que los datos se graben en ASCII; sin embargo, se recomienda emplear el utilitario SK, el que al quedar residente en la memoria del computador, permite modificar los datos en cualquier instante.

Lógicamente, el programa también resuelve aligerados, y para el caso en que exista un extremo empotrado será cuestión de proporcionar columnas muy robustas en dicho extremo, y si el extremo estuviese articulado se proporciona columnas de inercia nula en ese nudo; ver la Fig. 3.13.

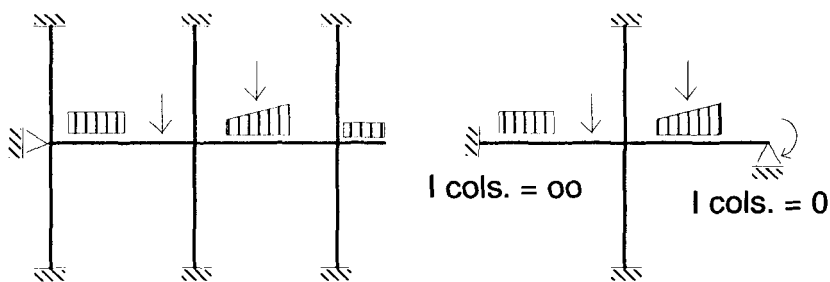


Fig. 3.13. Artificios para Generar Extremos Empotrados y Articulado en el Programa VIGA1.

3.3. Coeficientes de la Norma E-060

Tanto el reglamento norteamericano ACI como la Norma E-060, proporcionan unos coeficientes que permiten hallar los máximos valores de los momentos flectores y de las fuerzas cortantes reducidos a la cara del apoyo (Fig. 3.14); estos coeficientes se aplican para vigas y losas unidireccionales (macizas y aligeradas) sujetas a carga vertical.

Para hacer uso de estos coeficientes, deberá cumplirse las siguientes condiciones:

- 1.- Existen dos o más tramos sujetos a carga uniformemente repartida.
- 2.- La diferencia entre las luces de los tramos adyacentes debe ser menor o igual a 20%.
- 3.- La sobrecarga debe ser menor o igual que tres veces la carga permanente.
- 4.- Las barras deben ser prismáticas.

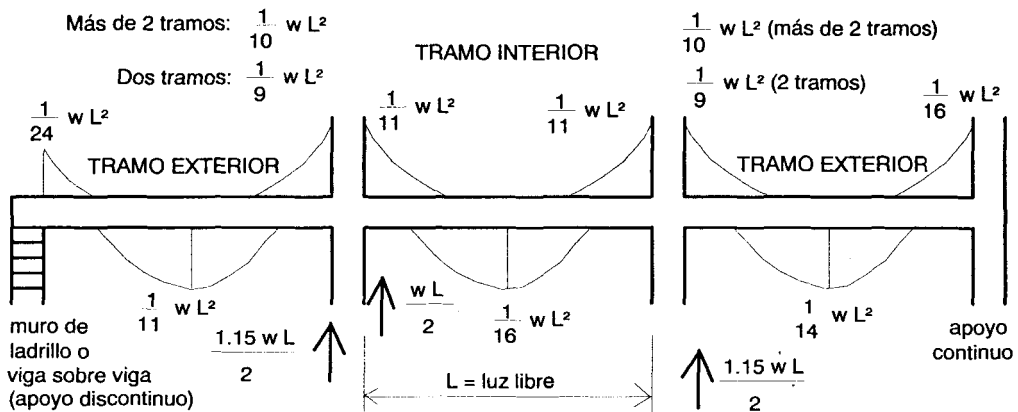


Fig. 3.14. Coeficientes de la Norma E-060.

Notas:

- Si $\sum k \text{ columnas} > 8 \sum k \text{ vigas}$, usar $1/12 wL^2$ para los momentos negativos
- Para los momentos positivos: $L = \text{luz libre del tramo en análisis}$.
- Para los momentos negativos: $L = \text{promedio de las luces libres de los tramos adyacentes al nudo en estudio}$.

3.4. Problemas Propuestos

- 1.- En la figura 3.15 se muestra la planta típica de un edificio de concreto armado destinado a oficinas, de 4 pisos. Aplicando el método de Cross, se dibujará la envolvente de momento flector de los aligerados 1 y 2, así como la envolvente correspondiente a la viga del eje 3. Los resultados se compararán contra los obtenidos aplicando los coeficientes del reglamento. Suponer:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$K_o = 1000 \text{ cm}^3$$

Columnas: $0.40 \times 0.40 \text{ m}$

Vigas: $0.30 \times 0.40 \text{ m}$

Espesor de las placas: 0.15 m

Altura de entrepiso = 3.0 m

$$\text{Peso del aligerado} = 0.3 \text{ ton/m}^2$$

$$\text{Acabados} = 0.1 \text{ ton/m}^2$$

$$\text{Tabiquería flotante} = 0.1 \text{ ton/m}^2$$

$$\text{Sobrecarga} = 0.25 \text{ ton/m}^2$$

$$\gamma (\text{concreto}) = 2.4 \text{ ton/m}^3$$

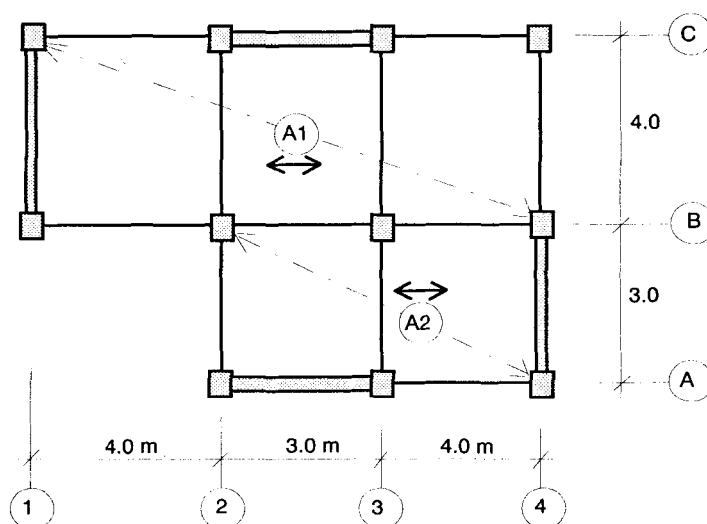


Fig. 3.15. Planta Típica del Problema Propuesto No. 1.

Nota: Para el análisis de la viga del eje 3, en las columnas 3-A y 3-C se adicionará un ancho efectivo de placa igual a cuatro veces su espesor. Adicionalmente, se supondrá que los aligerados están empotrados en las placas; asimismo, en las zonas extremas de los aligerados que apoyen sobre vigas, se adicionará un momento negativo equivalente a un semiempotramiento ($w L^2 / 24$).

- 2.- Aplicando el programa "VIGA1", se trazará la envolvente de momento flector y de fuerza cortante (ambas en condición de "rotura") para la viga mostrada en la Fig. 3.16; se supondrá que los momentos sísmicos son nulos.

Datos:

Columnas: 40 x 50 cm Vigas: 30 x 60 cm

Cargas de Servicio: $w1_D = 3 \text{ ton/m}$ $w1_L = 2 \text{ ton/m}$
 $w2_D = 2 \text{ ton/m}$ $w2_L = 0$
 $P_D = 5 \text{ ton}$ $P_L = 3 \text{ ton}$

Notación: D = Dead load (carga muerta o permanente)
 L = Live load (carga viva o sobrecarga)

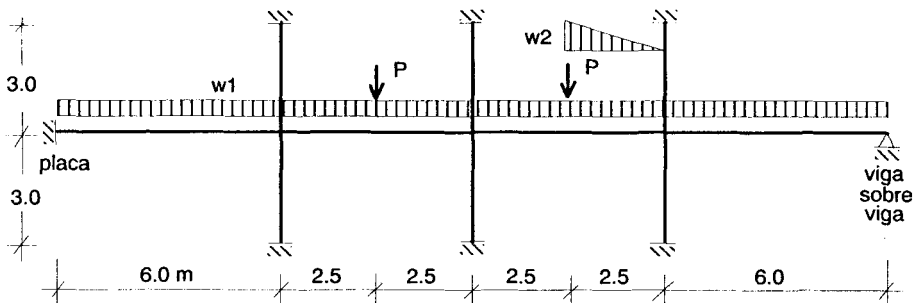


Fig. 3.16. Viga Continua del Problema Propuesto No.2.

4

ESTRUCTURAS QUE SE DESPLAZAN LINEALMENTE. MÉTODO DE CROSS INDIRECTO

4.1. Identificación de los Grados de Libertad Traslacionales

El método de Cross Indirecto consiste en aplicar el principio de superposición sobre los desplazamientos lineales (traslaciones) que sean grados de libertad (GL). Estos desplazamientos son absolutos y se definen positivamente de acuerdo a un sistema de coordenadas prefijado.

Previamente, será necesario identificar los grados de libertad traslacionales. Una regla práctica para efectuar esa identificación consiste en articular todos los nudos de la estructura, transformándola en un mecanismo inestable, para luego agregar apoyos simples (ficticios) hasta estabilizar a la estructura; el número de apoyos simples agregados corresponderá al número de grados de libertad traslacionales. En la Fig. 4.1 se ilustra la aplicación de esa regla, suponiendo que las barras no se deforman axialmente.

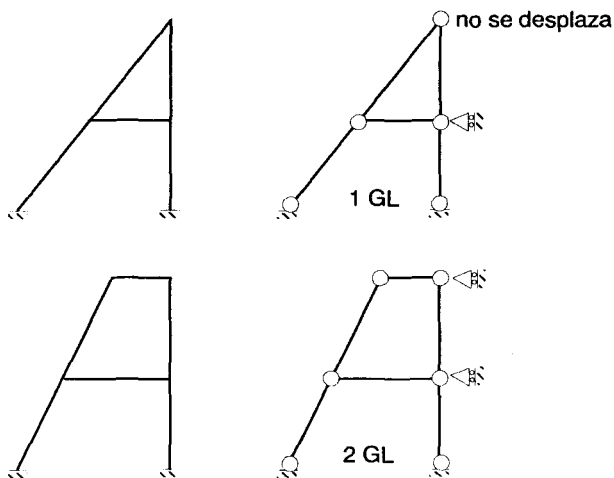


Fig. 4.1. Regla Práctica para Calcular el Número de GL.

4.2. Aplicación Algebraica del Método de Cross Indirecto. Matriz de Rigidez y de Flexibilidad Lateral

En las Figs. 4.2 y 4.3, se ilustra algebraicamente la manera cómo se aplica el método de Cross Indirecto para una estructura de 1 y 2 GL traslacionales, respectivamente.

Primer Ejemplo Algebraico (1 GL Traslacional):

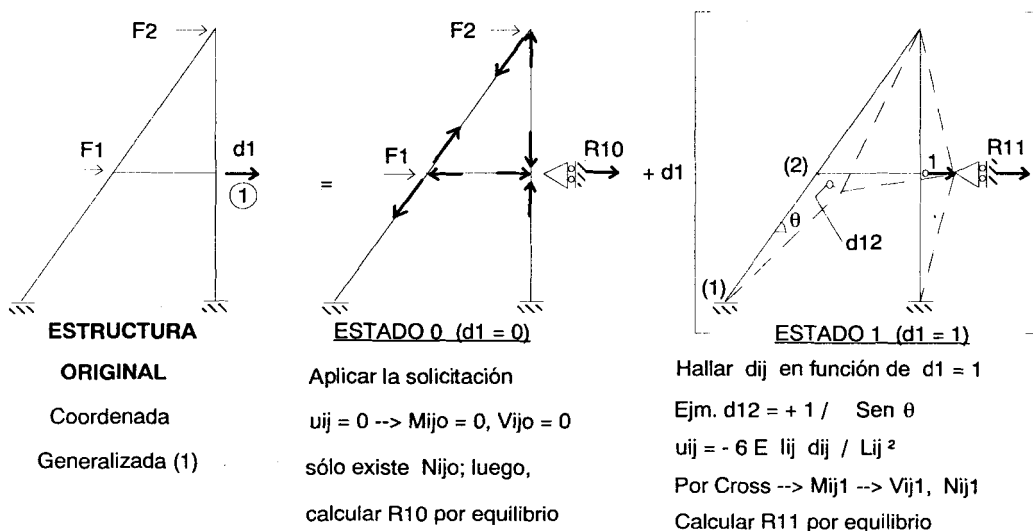


Fig. 4.2. Aplicación Algebraica de Cross Indirecto. Estructura con 1 GL Traslacional.

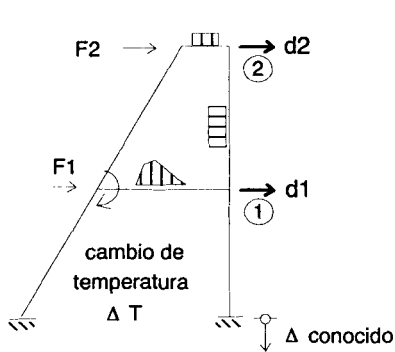
En el Estado 0 de este ejemplo, los momentos M_{ijo} son nulos ya que no existen cargas aplicadas sobre las barras ($u_{ij} = 0$). En el Estado 1, los momentos de fijación son producidos por los desplazamientos relativos d_{ij} , con lo cual, luego de liberar rotacionalmente a los nudos aplicando Cross (determinando M_{ij1}), se podrá calcular por equilibrio: las fuerzas cortantes V_{ij1} , las fuerzas axiales N_{ij1} y la reacción R_{11} . Adicionalmente, nótese que las reacciones R_{10} y R_{11} son positivas cuando siguen el sentido positivo de la coordenada generalizada (1). Estas reacciones son ficticias y no existen en la estructura original, por lo que:

Por equilibrio en la coordenada (1): $R_{10} + d_1 R_{11} = 0$

De donde se obtiene: $d_1 = -R_{10} / R_{11}$

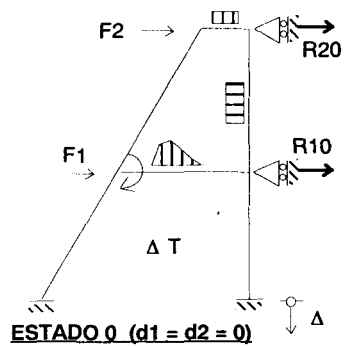
Finalmente, por superposición: $M_{ij} = M_{ijo} + d_1 M_{ij1} \dots$ en este ejemplo $M_{ijo} = 0$

$\theta_i = \theta_{io} + d_1 \theta_{i1} \dots$ en este ejemplo $\theta_{io} = 0$

Segundo Ejemplo Algebraico (2 GL Traslacionales):**ESTRUCTURA ORIGINAL**

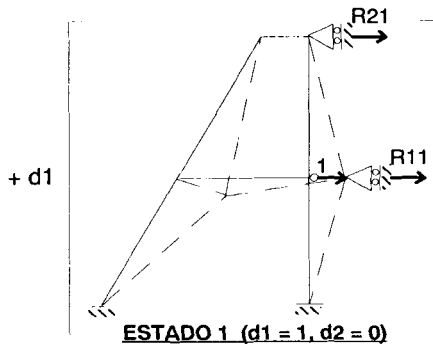
Coordenadas generalizadas: (1) y (2)

=

**ESTADO 0 (d1 = d2 = 0)**Aplicar la solicitación y hallar u_{ij}

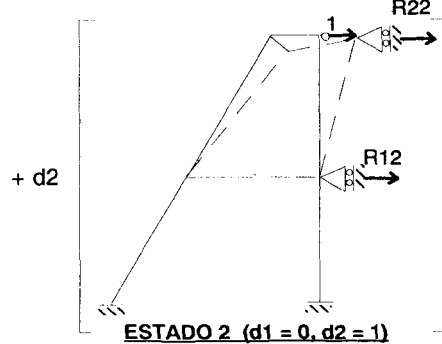
Cross --> Mijo --> Vijo, Nijo

Calcular Rio por equilibrio

**ESTADO 1 (d1 = 1, d2 = 0)**Hallar d_{ij} en función de $d1 = 1$

$$u_{ij} = -6 E I_{ij} d_{ij} / L_{ij}^2$$

Cross --> Mij1 --> Vij1, Nij1

Calcular R_{i1} por equilibrio**ESTADO 2 (d1 = 0, d2 = 1)**Hallar d_{ij} en función de $d2 = 1$

$$u_{ij} = -6 E I_{ij} d_{ij} / L_{ij}^2$$

Cross --> Mij2 --> Vij2, Nij2

Calcular R_{i2} por equilibrio

Fig. 4.3

Cancelando las reacciones ficticias se tiene:

$$\text{En la coordenada (1):} \quad R_{10} + d1 R_{11} + d2 R_{12} = 0 \quad [1]$$

$$\text{En la coordenada (2):} \quad R_{20} + d1 R_{21} + d2 R_{22} = 0 \quad [2]$$

De [1] y [2] se calcula: $d1$ y $d2$ Finalmente, por superposición: $M_{ij} = M_{i0} + d1 M_{ij1} + d2 M_{ij2}$

$$\theta_i = \theta_{i0} + d1 \theta_{i1} + d2 \theta_{i2}$$

Observaciones. Matriz de Rigidez y de Flexibilidad Lateral

- 1.- Debe resolverse por Cross $N + 1$ estados, donde N = número de GL traslacionales. En cada estado los únicos GL son las rotaciones, por lo que pueden solucionarse mediante Cross. Los estados donde se aplican desplazamientos unitarios equivalen a que la estructura esté sujeta a un desplazamiento de apoyo conocido.
- 2.- Las ecuaciones [1] y [2] pueden arreglarse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} R10 \\ R20 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R11 & R12 \\ R21 & R22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d1 \\ d2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En general: $\{ R_o \} + [R_{ij}] \{ d \} = \{ 0 \}$

Donde: $[R_{ij}]$ = Matriz de Rigidez Lateral, de orden $N \times N$

Luego: $\{ d \} = - [R_{ij}]^{-1} \{ R_o \}$

Donde: $[R_{ij}]^{-1} = [f_{ij}]$ = Matriz de Flexibilidad Lateral, de orden $N \times N$

Cabe indicar que el programa "EDIFICIO" calcula la Matriz de Flexibilidad Lateral $[f_{ij}]$ aplicando cargas unitarias en cada coordenada generalizada (Fig. 4.4) y luego invierte esa matriz para obtener la Matriz de Rigidez Lateral ($[R_{ij}] = [f_{ij}]^{-1}$).

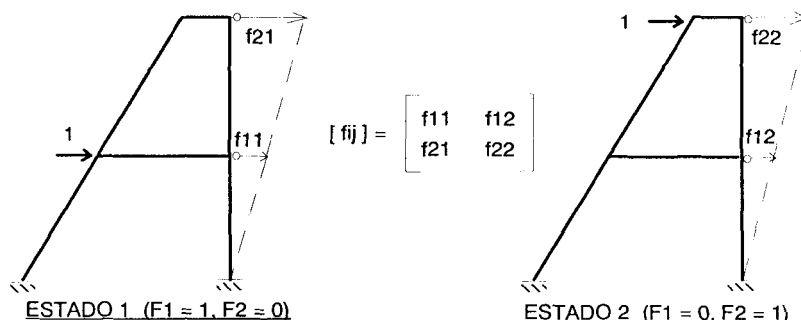
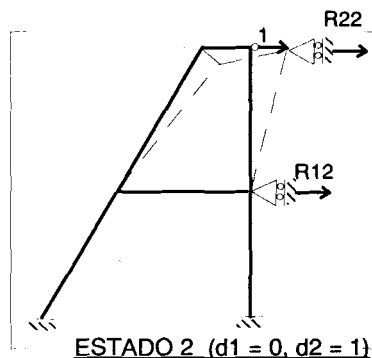
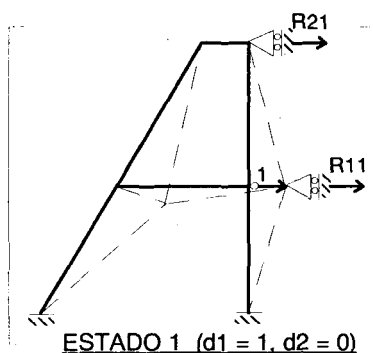


Fig. 4.4. Coeficientes de la Matriz de Flexibilidad Lateral (desplazamientos laterales).

- 3.- Los coeficientes R_{ij} de la Matriz de Rigidez Lateral se definen como:

R_{ij} = reacción en la coordenada "i" cuando $d_j = 1$, con $d_i = 0$ para $i \neq j$

En general $R_{ij} = R_{ji}$, es decir, la matriz $[R_{ij}]$ es simétrica, lo que se puede demostrar aplicando el teorema de Betti entre los estados 1 y 2 correspondientes a la Fig. 4.3.



Aplicando Betti: $R_{11} \times 0 + R_{21} \times 1 = R_{12} \times 1 + R_{22} \times 0 \Rightarrow R_{21} = R_{12}$

- 4.- Cuando se desconoce el momento de inercia de las barras (I), puede trabajarse con desplazamientos (D) proporcionales a los reales (d) en un factor igual a $2 E K_0$:

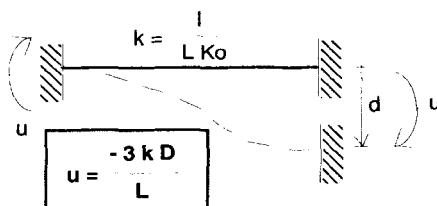
$$D = (2 E K_0) d \dots \text{ en ton-m}^2$$

En este caso, los momentos de empotramiento se calculan de la siguiente manera:

Barra biempotrada:

$$u = -6 E I d / L^2 = -6 E k K_0 d / L$$

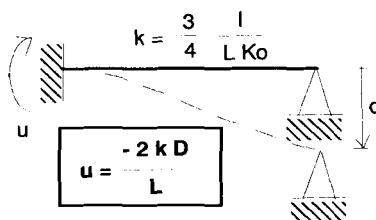
$$u = -3 (2 E K_0 d) k / L = -3 k D / L$$



Barra empotrada-articulada:

$$u = -3 E I d / L^2 = -3 E [4/3 k K_0] d / L$$

$$u = -2 (2 E K_0 d) k / L = -2 k D / L$$



4.3. Ejemplo de Aplicación

Resolver el pórtico de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$) a dos aguas mostrado en la Fig. 4.5.

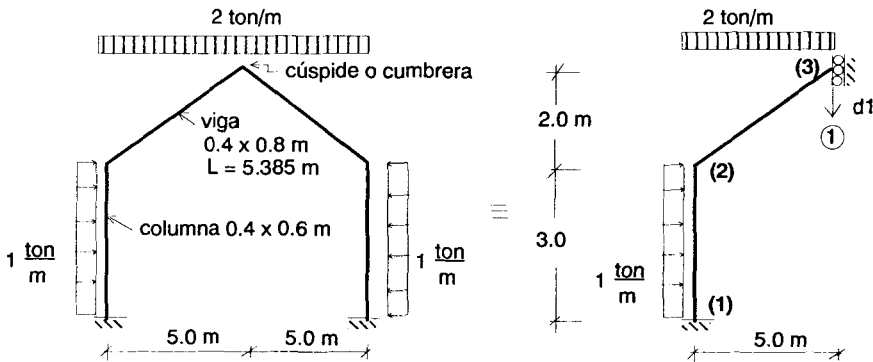


Fig. 4.5. Pórtico a Dos Aguas Simétrico en Forma y Carga.

Nota: Como V_{32} es desconocida, no se puede reducir el GL "d1" a cero; este caso es diferente al de un pórtico con viga horizontal simétricamente cargado. En la Fig. 4.6, se aprecia que $V_{32} = P/2$, por lo tanto, puede reducirse "d1" a cero, trabajando la viga con la cuarta parte de su rigidez, mediante Cross con GL rotacionales.

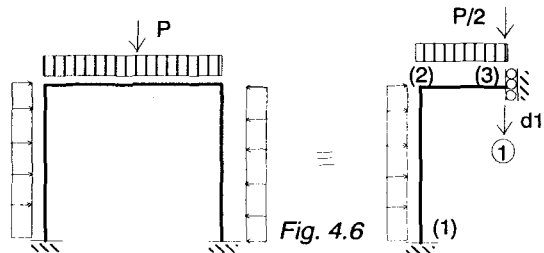
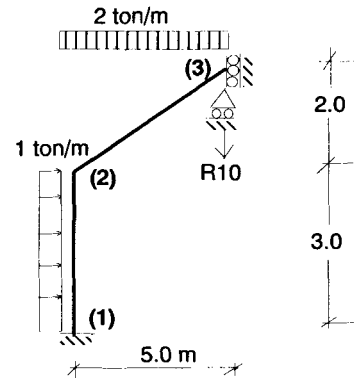


Fig. 4.6

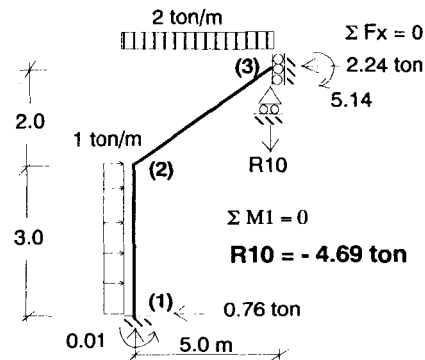
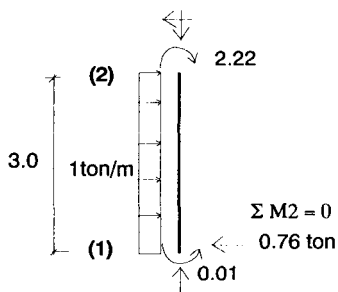
Momentos de Inercia:	columna:	$I_c = 0.4 \times 0.6^3 / 12 = 0.0072 \text{ m}^4$
	viga:	$I_v = 0.4 \times 0.8^3 / 12 = 0.01707 \text{ m}^4$
Rigideces al Giro ($4EI/L$):	K_c	$K_c = 4 \times 2000000 \times 0.0072 / 3 = 19200 \text{ ton-m}$
	K_v	$K_v = 4 \times 2000000 \times 0.01707 / 5.385 = 25359 \text{ ton-m}$
Coeficientes α_{ij} :	α_{21}	$\alpha_{21} = K_c / (K_c + K_v) = 0.431$
	α_{23}	$\alpha_{23} = K_v / (K_c + K_v) = 0.569$
ESTADO 0 ($d_1 = 0$):	u_{12}	$u_{12} = -u_{21} = -1 \times 3^2 / 12 = -0.75 \text{ ton-m}$
	u_{23}	$u_{23} = -u_{32} = -2 \times 5^2 / 12 = -4.17 \text{ ton-m}$

Solución del Estado 0 por Cross:

Nudo	1	2		3
Barra	1-2	2-1	2-3	3-2
α_{ij}	0.00	0.431	0.569	0.00
u_{ij}	-0.75	0.75	-4.17	4.17
D	0.00	1.47	1.94	0.00
T	0.74	0.00	0.00	0.97
Mij0	-0.01	2.22	-2.22	5.14



Cálculo de R10:

ESTADO 1 ($d_1 = 1$)

$$d_{21} = -1 \operatorname{tg} \beta = -1 \times 2 / 5 = -0.4$$

$$d_{23} = 1 / \operatorname{Cos} \beta = 5.385 / 5 = 1.077$$

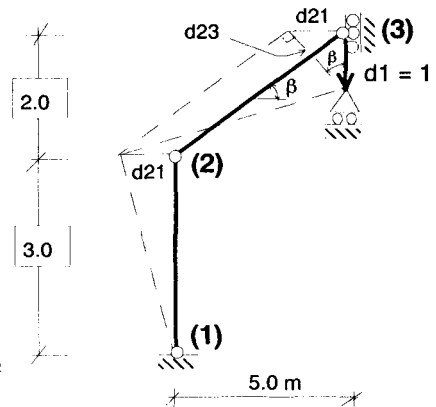
$$u_{ij} = -6 E I d / L^2$$

$$u_{12} = u_{21} = -6 \times 2 \times 10^6 \times 0.0072 \times (-0.4) / 3^2$$

$$u_{12} = u_{21} = 3840 \text{ ton-m}$$

$$u_{23} = u_{32} = -6 \times 2 \times 10^6 \times 0.01707 \times 1.077 / 5.385^2$$

$$u_{23} = u_{32} = -7608 \text{ ton-m}$$

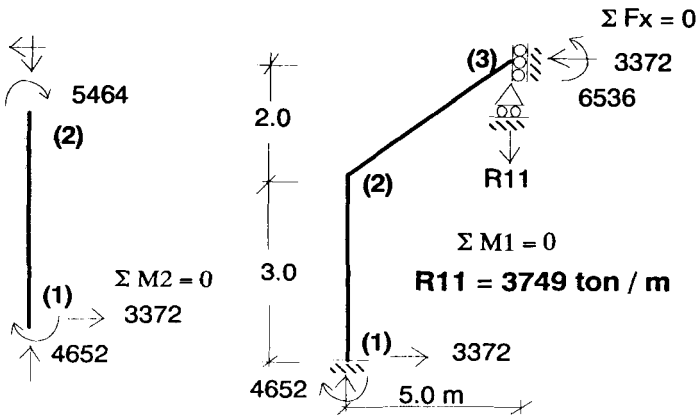


Solución del Estado 1 por Cross:

Nudo	1	2	3
Barra	1-2	2-1	2-3
α_{ij}	0.00	0.431	0.569
u_{ij}	3840	-3840	-7608
D	0	1624	2144
T	812	0	0
Mij1	4652	5464	-5464

Nótese que el Cross cierra en un ciclo, sólo porque la estructura tiene un grado de libertad rotacional (θ_2).

Cálculo de R11:



Luego, por equilibrio en la coordenada 1:

$$R10 + R11 \, d1 = 0$$
$$-4.69 + 3749 \, d1 = 0$$

De la cual resulta:

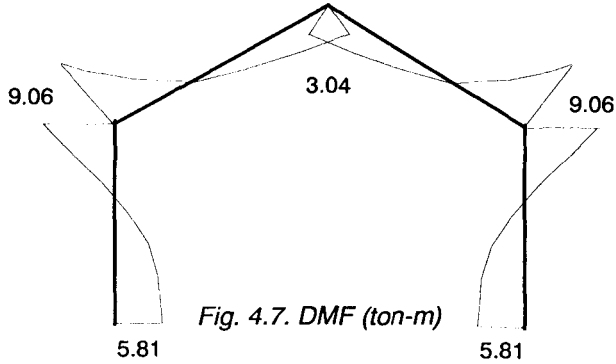
$$d1 = 0.001251 \, \text{m} = 1.25 \, \text{mm}$$

Finalmente:

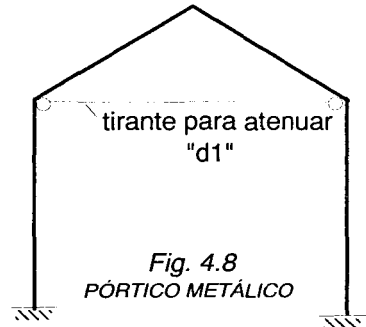
$$Mij = Mij0 + d1 \, Mij1$$

barra	1-2	2-1	2-3	3-2
Mij0 +	-0.01	2.22	-2.22	5.14
d1 Mij1	5.82	6.84	-6.84	-8.18
Mij	5.81	9.06	-9.06	-3.04

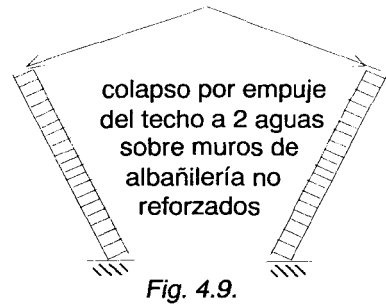
En la tabla anterior, puede notarse la importancia del desplazamiento "d1", a pesar que apenas es 1.25 mm (imperceptible), llega incluso a invertir al momento flector del nudo central de la estructura y a magnificar los momentos del nudo 2 (ver la Fig. 4.7).



Muchas veces para techar grandes ambientes (por ejemplo, fábricas) se recurre a pórticos metálicos que resultan ser muy flexibles, por lo que para atenuar los efectos del desplazamiento "d1" se colocan tirantes metálicos (Fig. 4.8).

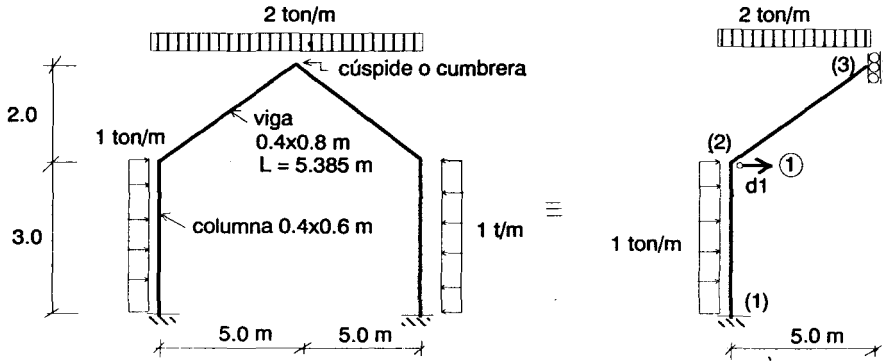


Cabe también mencionar que hace algunos años una vivienda de albañilería sin reforzar (ubicada en Lima) colapsó, por el empuje que le ocasionó el techo a dos aguas que soportaban los muros de albañilería carentes de columnas de arriestre (Fig. 4.9).



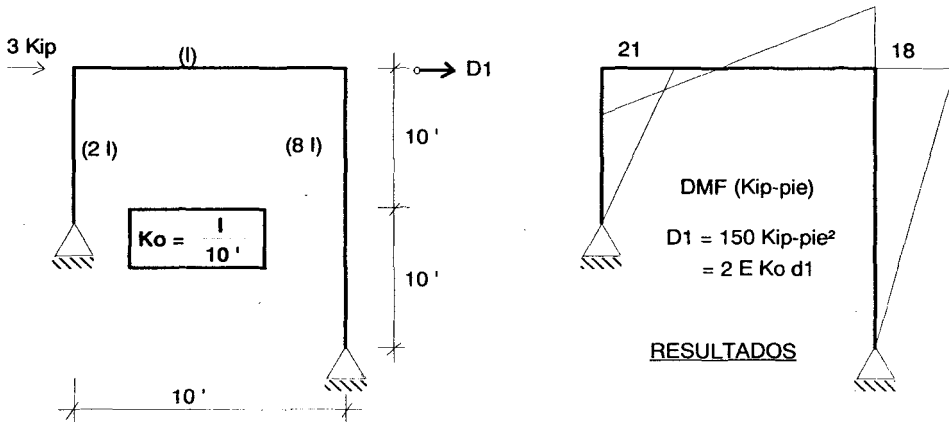
4.4. Problemas Propuestos

1.- Resolver el pórtico de la Fig. 4.5 empleando la coordenada generalizada mostrada:

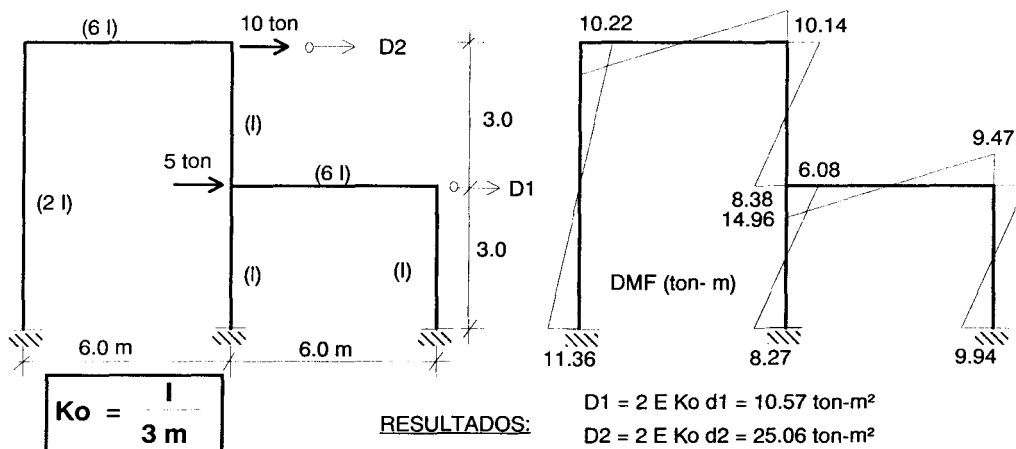


En los problemas 2 y 3, se desconoce el momento de inercia de las barras, por lo que se trabajarán empleando desplazamientos proporcionales (D) a los reales (d).

Problema 2:



Problema 3:



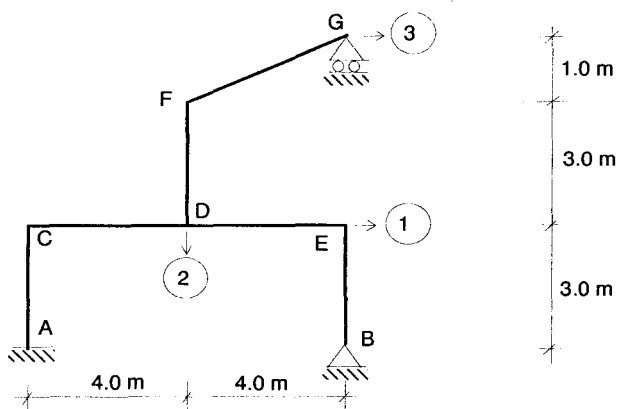
- 4.- Considerando los grados de libertad, asociados a los desplazamientos lineales, que se muestran en la figura, calcule el vector de rigideces R_{i2} (correspondiente a un desplazamiento unitario $d2 = 1$).

Suponer:

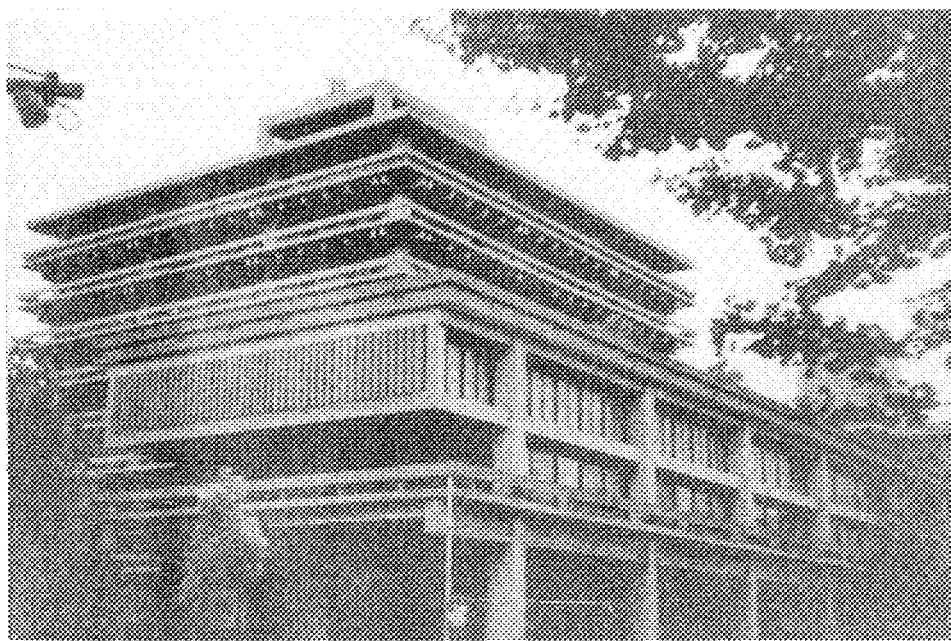
$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

Columnas: 0.30x0.60 m

Vigas: 0.30x0.70 m



$$\text{Resultado: } \{ R_{i2} \} = \begin{Bmatrix} -1733 \\ 4525 \\ 1257 \end{Bmatrix} \text{ ton / m}$$



HURACÁN EN MIAMI (vista superior) y
EDIFICIO JAPONÉS (vista inferior)

5

CASOS ESPECIALES

Aplicando el método de Cross (o Cross Indirecto), en este capítulo se resolverán algunos casos particulares, como por ejemplo: las estructuras compuestas por barras de sección variable, los efectos de la deformación por corte, los pórticos con vigas curvas, etc. Para estos casos se necesita trabajar con tres parámetros, los que incluso se utilizan en la solución matricial por computadora; estos parámetros son:

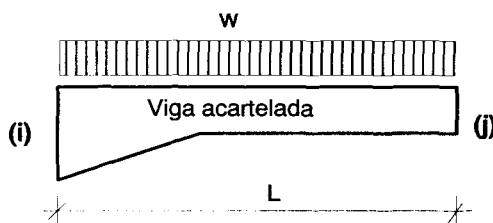
- 1.- Las Rigideces al Giro Absolutas K_{ij} , K_{ji} , que permiten determinar $\alpha_{ij} = K_{ij} / \sum K_{ij}$
- 2.- Los Factores de Transporte f_{ij} , f_{ji}
- 3.- Los Momentos de Empotramiento u_{ij} , u_{ji}

Debe remarcarse que esos parámetros son distintos a los calculados para las barras prismáticas; por ejemplo, en la viga mostrada se tiene:

$$K_{ij} \neq 4EI / L \neq K_{ji}$$

$$f_{ij} \neq 1/2 \neq f_{ji}$$

$$u_{ij} \neq wL^2 / 12 \neq u_{ji}$$



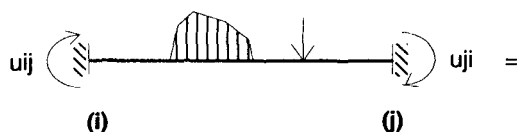
5.1. Momentos de Empotramiento en Función de K_{ij} y f_{ij}

En este acápite se verá cómo obtener los momentos de empotramiento u_{ij} en función general de K_{ij} y f_{ij} , mientras que los acáptes siguientes tratarán sobre la manera de cómo calcular K_{ij} y f_{ij} para estos casos especiales.

Cabe mencionar que el programa "KFU" hace uso de los siguientes procedimientos para calcular los momentos de fijación u_{ij} .

a.- Cálculo de " u_{ij} " Cuando Existen Cargas Aplicadas Sobre la Barra

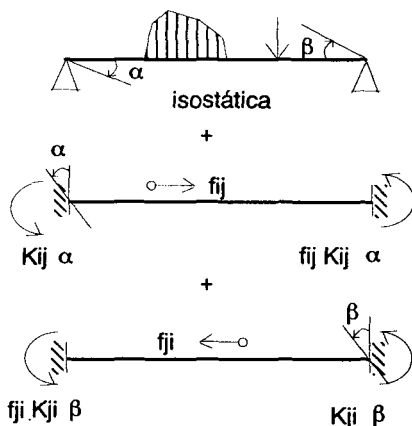
Aplicando superposición sobre las rotaciones se tiene:



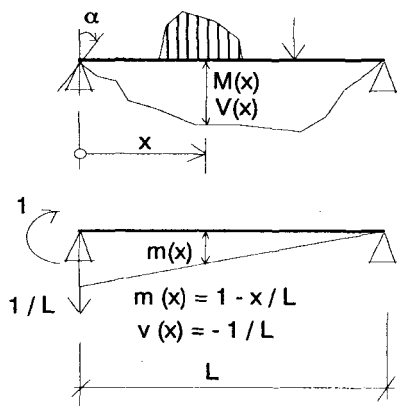
Sabiendo que $f_{ij} K_{ij} = f_{ji} K_{ji}$, por superposición se obtiene:

$$u_{ij} = -K_{ij} [\alpha + f_{ij} \beta]$$

$$u_{ji} = -K_{ji} [\beta + f_{ji} \alpha]$$



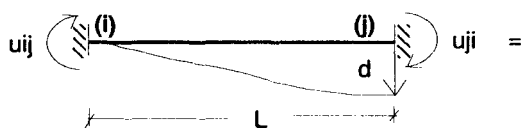
Las rotaciones α y β se determinan analizando la barra isostática mediante el método de la carga unidad (Fig. 5.1), indicándose que las integrales se calculan numéricamente, por ejemplo, empleando la Regla de los Trapecios, proceso que se explicará en el acápite 5.2.1. A continuación se muestra cómo se calcula α incluyendo las deformaciones por flexión (primera integral) y por fuerza cortante (segunda integral), donde G es el módulo de corte, E es el módulo de elasticidad y f , A e I son el factor de forma, el área axial y el momento de inercia de la sección transversal, respectivamente.



$$\alpha = \int_0^L \frac{M(x) m(x) dx}{E I (x)} + \int_0^L \frac{V(x) v(x) f dx}{G A (x)}$$

Fig. 5.1. Aplicación del Método de Carga Unidad para Obtener en una Barra Isostática.

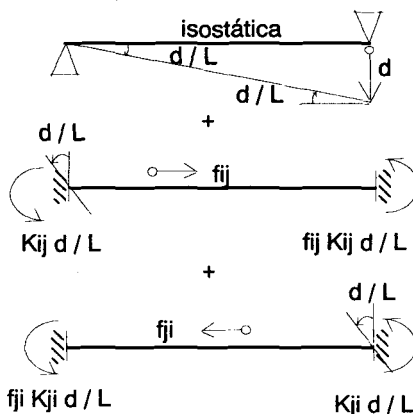
b.- Cálculo de "uij" Cuando Existe Desplazamiento Relativo "d"



Sabiendo que $f_{ij} K_{ij} = f_{ji} K_{ji}$, por superposición se obtiene:

$$u_{ij} = -K_{ij} [1 + f_{ij}] d / L$$

$$u_{ji} = -K_{ji} [1 + f_{ji}] d / L$$



Nótese que en la barra isostática, sujeta al desplazamiento relativo d , no se presentan esfuerzos ya que rota como un sólido rígido.

Por otro lado, se observa que en general u_{ij} es diferente a u_{ji} ; solamente cuando la barra es simétrica en forma ($K_{ij} = K_{ji}$, $f_{ij} = f_{ji}$) se cumple que $u_{ij} = u_{ji}$.

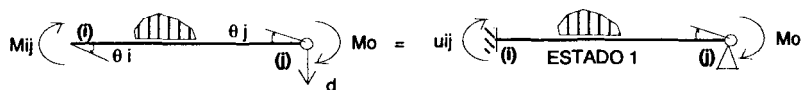
Por ejemplo, si la barra fuese prismática, se tendría: $K_{ij} = K_{ji} = 4EI/L$, $f_{ij} = f_{ji} = 1/2$; con lo cual resulta: $u_{ij} = u_{ji} = -4EI/L [1 + 1/2] d/L^2 = -6EI d/L^2$.

c.- Caso de Barras con Conexión Articulada

Cuando la barra presenta una conexión articulada en el extremo "j", también, para estos casos especiales, es posible reducir el grado de libertad θ_j a cero, siempre y cuando:

- 1.- Se modifique la rigidez al giro a un valor igual a $K'_{ij} = K_{ij} (1 - f_{ij} f_{ji})$, donde K_{ij} , f_{ij} y f_{ji} corresponden a la barra continua, por ejemplo, si la barra fuese prismática: $K'_{ij} = 4EI/L (1 - 1/2 \times 1/2) = 3EI/L$; y,
- 2.- Se evalúe el momento de empotramiento (u_{ij}) trabajando con la barra empotrada en "i" y articulada en "j".

En el análisis que se muestra a continuación se ha desdoblado el problema en la superposición de 3 estados, los cuales se estudian en forma independiente, demostrándose que el momento final M_{ij} es independiente de θ_j (como si esa rotación no existiese).

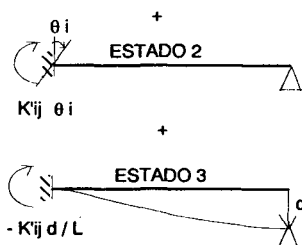


$M_{ji} = M_o = \text{valor conocido}$

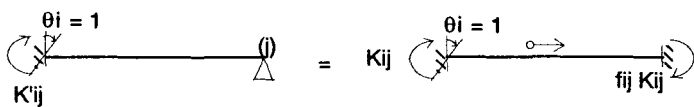
por superposición se obtiene:

$$M_{ij} = u_{ij} + K'_{ij} \theta_i - K'_{ij} d/L$$

independiente de θ_j

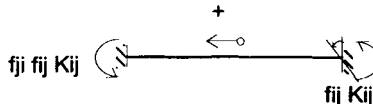


ESTADO 2:

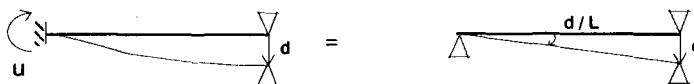


por superposición se obtiene:

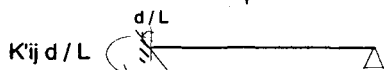
$$K'_{ij} = K_{ij} (1 - f_{ij} f_{ji})$$



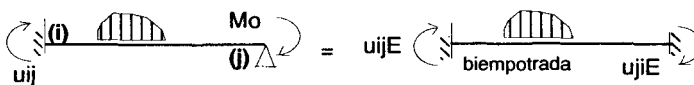
ESTADO 3:



$$u = -K'_{ij} d/L$$



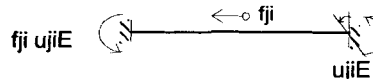
ESTADO 1:



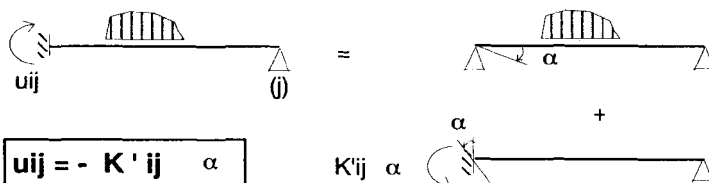
por superposición se obtiene:

$$u_{ij} = u_{ijE} - f_{ji} u_{jiE}$$

$$u_{ij} (M_o) = f_{ji} M_o$$



También, u_{ij} puede calcularse mediante la expresión: $-K'_{ij} \alpha$, donde α se determina aplicando el método de la carga unidad sobre la viga isostática (ver la Fig. 5.1).



$$u_{ij} = -K'_{ij} \alpha$$

5.2. Estructuras Compuestas por Barras de Sección Variable

Las estructuras compuestas por barras de sección variable son poco frecuentes en nuestro medio, pero podrían presentarse por razones de arquitectura (capillas, iglesias, etc.) y otras veces por motivos estructurales, por ejemplo, en estructuras con grandes luces o con altas sobrecargas, puede colocarse cartelas (incremento gradual del peralte) en los extremos de las vigas, con la finalidad de disminuir las deflexiones y los momentos positivos a costa de incrementar los momentos negativos (Fig. 5.2).

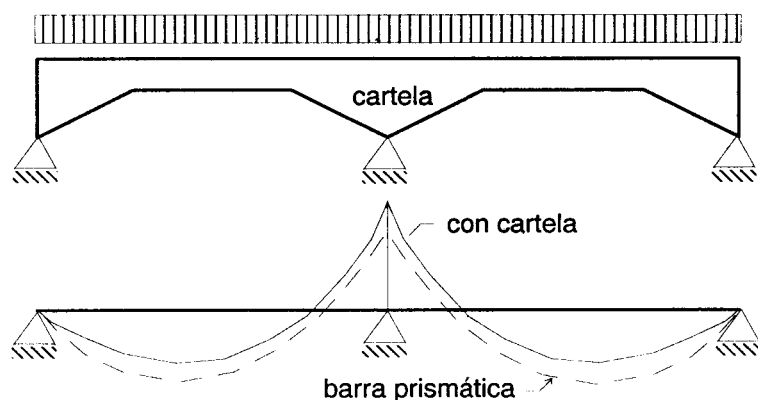


Fig. 5.2. Diagramas de Momento Flector en Vigas Acarteladas y Prismáticas.

Estos casos también se presentan en las losas armadas en dos sentidos que apoyan directamente sobre columnas ("Flat Slab"), donde, con la finalidad de evitar que las columnas perforen a la losa, se ensancha el extremo superior de las columnas formando capiteles (o ábacos) troncos cónicos o piramidales, los que las convierten en elementos de sección variable. Estas losas se resuelven mediante el método del Pórtico Equivalente (Reglamento ACI), subdividiéndolas en franjas, tal como se muestra en la Fig. 5.3.

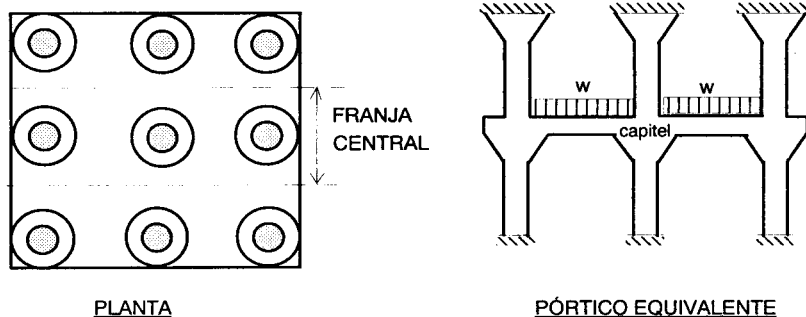


Fig. 5.3. Modelo de una Franja Correspondiente a un "Flat Slab".

En realidad todo elemento prismático de concreto armado cuya sección transversal se agriete, trabaja como una barra de sección variable (Fig. 5.4), donde el momento de inercia en la zona fisurada (I_{cr} , incluyendo el acero de refuerzo) es menor al momento de inercia de la sección bruta (I_g) correspondiente a la zona sin fisurar, pero, también ocurre que en los nudos la barra cambia abruptamente de peralte (por ejemplo, el peralte de la viga pasa a ser la altura de la columna), funcionando esa zona como un brazo rígido ($I \rightarrow \infty$), por lo que para fines prácticos se supone que existe una compensación de rigideces y se trabaja como si la barra fuese prismática (con $I = I_g$).

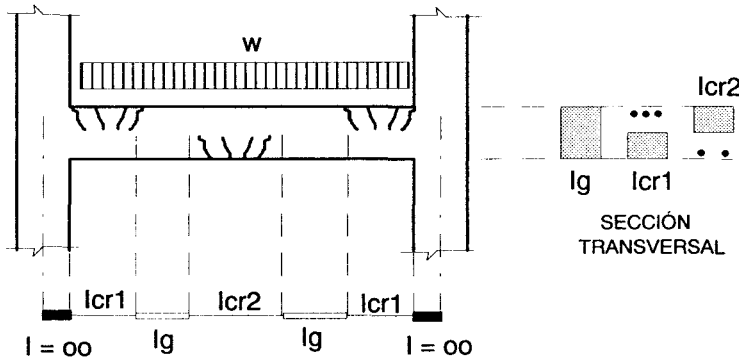


Fig. 5.4. Variación del Momento de Inercia en una Viga Prismática Fisurada.

El único caso que se estudiará corresponde al de las barras de sección variable cuyo eje es sensiblemente recto; cuando el eje sea curvo, será conveniente recurrir a los programas de pórticos planos (por ejemplo, "EDIFICIO"), subdividiendo al elemento en una serie de barras rectas, con la sección transversal promedio del tramo en cuestión, tal como se muestra en la Fig. 5.5.

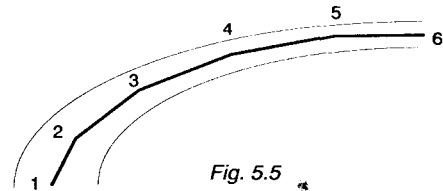


Fig. 5.5

5.2.1. Determinación de K_{ij} y f_{ij}

Para determinar la rigidez al giro (K_{ij}) y el factor de transporte (f_{ij}) en las barras deformables por flexión, cuyo momento de inercia varía a lo largo de su longitud ($I(x)$, Fig. 5.6), se utilizará el segundo teorema Area-Momento, que dice: "La distancia que existe entre la prolongación de la pendiente en "j" hasta tocar con la elástica en "i" (t_{ij}) es igual al momento estático del diagrama Area-Momento (DAM) con respecto al extremo "i", y viceversa". Ver la Fig. 5.7.

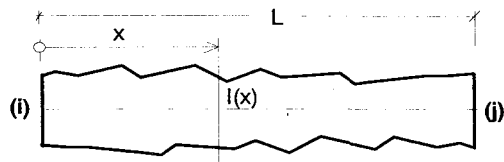


Fig. 5.6. Barra con Eje Sensiblemente Recto

En la Fig. 5.7 se observa:

1.- $t_{ij} = 0$, ya que $\theta_j = 0$

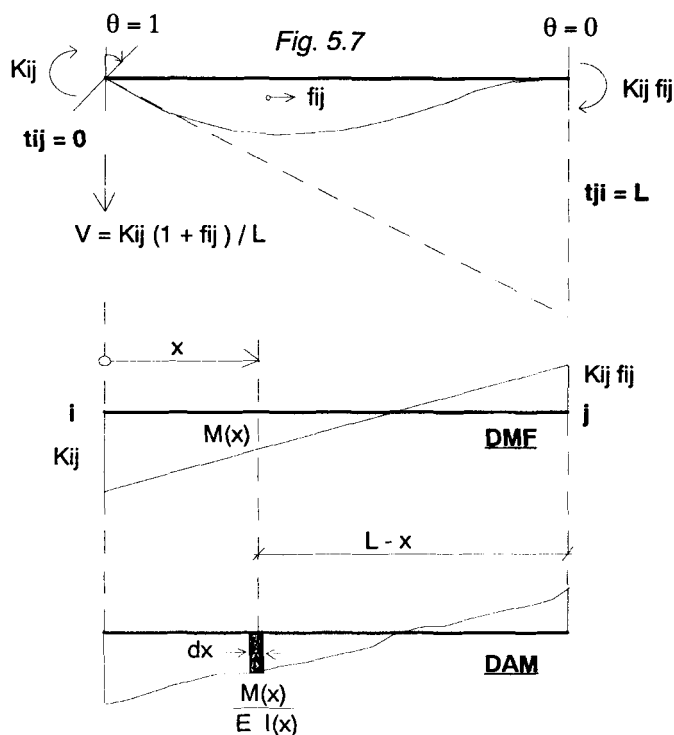
2.- $t_{ji} = L$, ya que $\theta_i = 1$

3.- Por equilibrio:

$$V = K_{ij} (1 + f_{ij}) / L$$

$$M(x) = K_{ij} - V x$$

$$M(x) = K_{ij} [(L-x) - f_{ij} x] / L$$



Aplicando el segundo teorema Area-Momento respecto a "i" (brazo de palanca = x), se obtiene:

$$t_{ij} = 0 = \int_0^L \frac{M(x) dx}{E I(x)} x = \int_0^L \frac{K_{ij} [(L-x) - f_{ij} x] x}{E L I(x)} dx$$

Donde K_{ij} , f_{ij} , E y L son constantes que pueden salir de la integral, obteniéndose finalmente:

$$f_{ij} = \frac{\int_0^L \frac{(L-x) \cdot x}{I(x)} dx}{\int_0^L \frac{x^2}{I(x)} dx}$$

Nota: Para calcular f_{ji} se aplica la expresión que permite hallar f_{ij} , pero, deberá cambiarse el sentido de la integración (desde j hacia i). Además, nótese que cuando la barra es prismática ($I(x) = I = \text{constante}$), resulta $f_{ij} = 1/2$.

El cálculo de K_{ij} se realiza aplicando el segundo teorema Area-Momento respecto al extremo "j" (brazo de palanca = $L - x$):

$$t_{ji} = L = \int_0^L \frac{M(x) dx}{E I(x)} (L - x) = \int_0^L \frac{K_{ij} [(L - x) - f_{ij} x] (L - x)}{E I(x)} dx$$

De donde se obtiene:

$$K_{ij} = \frac{E L^2}{\int_0^L \frac{(L - x)^2}{I(x)} dx - f_{ij} \int_0^L \frac{(L - x) x}{I(x)} dx}$$

Notas:

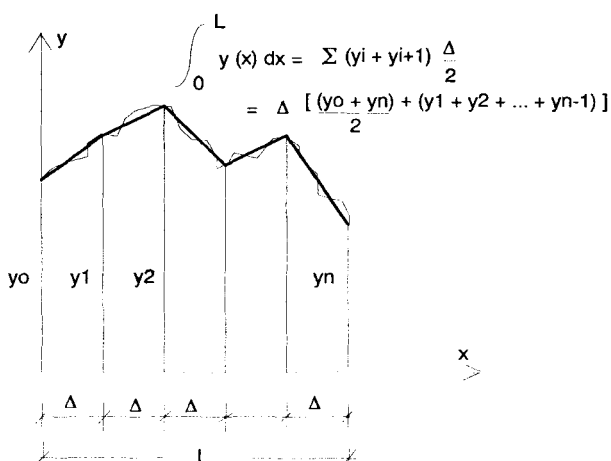
- 1.- Se sobreentiende que f_{ij} ha sido calculado previamente.
- 2.- Para determinar K_{ji} se aplica la expresión anterior, pero deberá invertirse el sentido de la integración (desde j hacia i); asimismo, deberá intercambiarse f_{ij} por f_{ji} .
- 3.- En elementos prismáticos ($I(x) = I = \text{constante}$), $f_{ij} = \frac{1}{2}$, por lo que: $K_{ij} = 4 E I / L$.
- 4.- Sólo en barras que presenten simetría en forma se cumple: $f_{ij} = f_{ji}$ y $K_{ij} = K_{ji}$.

Evaluación Numérica de las Integrales Mediante la Regla de los Trapecios

Subdividiendo la longitud L en una serie de intervalos de igual magnitud (Δ), la integral de una función cualquiera $y(x)$ puede calcularse aproximadamente como:

Δx [semisuma de las ordenadas extremas + suma de las ordenadas internas].

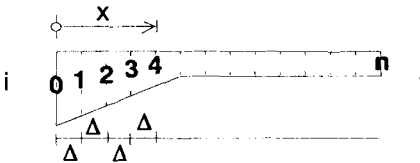
Lógicamente, cuánto mayor cantidad de subdivisiones tenga la barra, se obtendrá mejores resultados



El procedimiento para calcular K_{ij} y f_{ij} debe realizarse en forma tabulada, tal como se muestra a la derecha.

Por otro lado, cuando se calcule K_{ji} y f_{ji} , la integración se realiza desde j hacia i , manteniéndose las columnas x y $(L - x)$ de la tabla, pero, los valores $I(x)$ deberán intercambiarse así:

$I(0)$ por $I(n)$
 $I(1)$ por $I(n-1)$, etc.



Pto.	x	L - x	I (x)	$\frac{(L - x) x}{I (x)}$	$\frac{x^2}{I (x)}$	$\frac{(L - x)^2}{I (x)}$
0	0	L				
1	Δ	...				
2	2Δ	...				
...	...	...				
n	L	0				

5.2.2. Tablas de la PCA

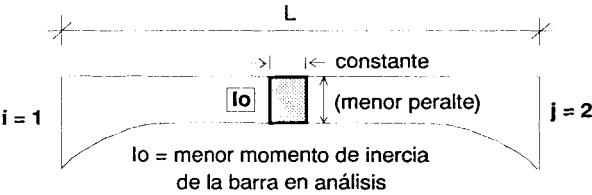
Para los casos comunes de barras con sección rectangular, cuyas cartelas varían linealmente o parabólicamente, mientras que su ancho permanece constante, existen las tablas de la Portland Cement Association (PCA, ver Anexo 1), que permiten calcular los tres parámetros K_{ij} , f_{ij} y u_{ij} necesarios para aplicar ya sea el método de Cross o el Análisis Matricial. La nomenclatura que se utiliza en estas tablas es:

Carry-over Factors:

$f_{ij} = r_{12}$ $f_{ji} = r_{21}$

Stiffness Factors:

$K_{ij} / (E I_o / L) = c_{12}$
 $K_{ji} / (E I_o / L) = c_{21}$



Nota: en las barras prismáticas: $c_{12} = c_{21} = 4$, $r_{12} = r_{21} = 1/2$

En estas tablas también aparecen unos coeficientes M_{12} y M_{21} , que permiten calcular los momentos de empotramiento cuando la barra está sujeta a una carga repartida o concentrada, ver la Fig. 5.8.

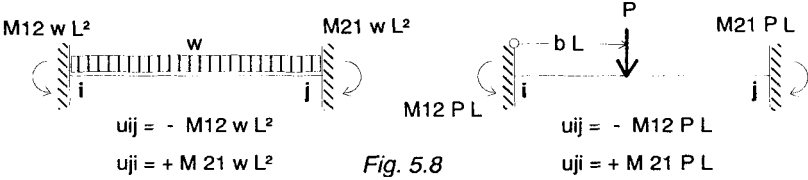


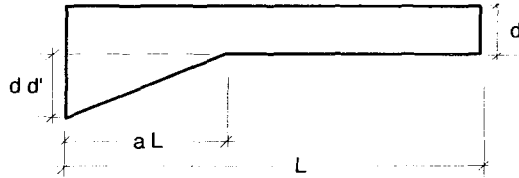
Fig. 5.8

Para ingresar a estas tablas es necesario conocer:

- 1.- El peralte de la cartela = $d \text{ d'}$
- 2.- La longitud de la cartela = $a L$

Donde: d = menor peralte

Conociendo "a" y "d'" (coeficientes adimensionales) se ingresa a las tablas para calcular: r , c y M , lo que permite obtener: f , K y u , respectivamente.

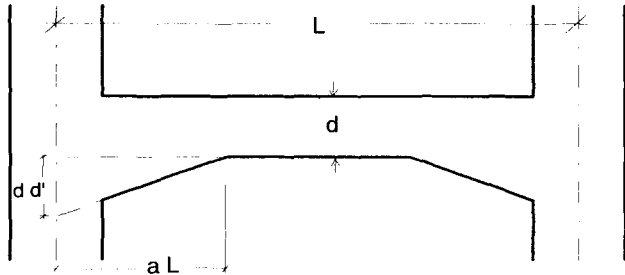


5.2.3. Determinación del Peralte y de la Longitud de la Cartela

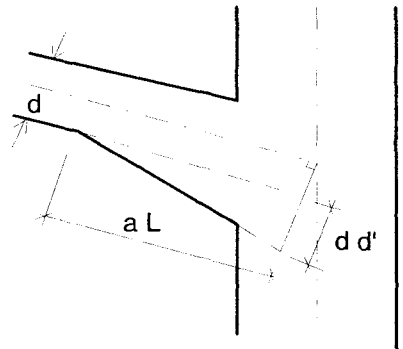
Para determinar el peralte ($d \text{ d'}$) y la longitud de la cartela ($a L$), se seguirá las recomendaciones de Charon (Ref. 2).

VIGAS

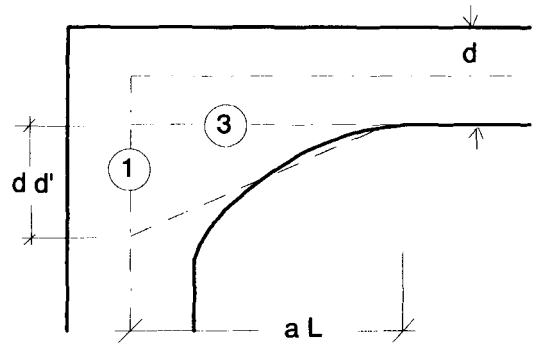
- a.- **Cartelas Lineales.** Prolongar la cartela hasta que toque con el eje de la columna



- b.- **Viga Inclinada.** Interceptar el eje de la viga con el de la columna; por ese punto, trazar una línea perpendicular al eje de la viga, luego, prolongar la cartela hasta que toque con esa línea.

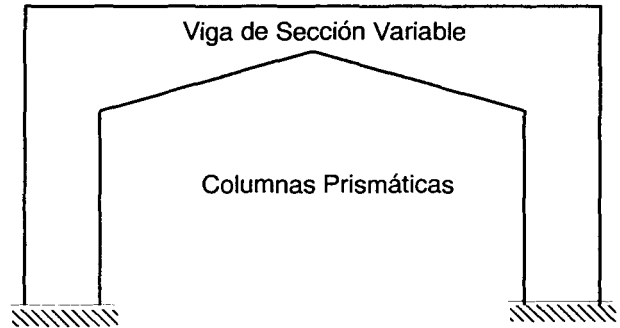


- c.- **Cartelas que Tocaban Tangencialmente a la Columna.** En este caso, se reemplaza la cartela parabólica por una cartela lineal ficticia, cuya pendiente es 1:3; lo que proporciona:
 $d d' = a L / 3$

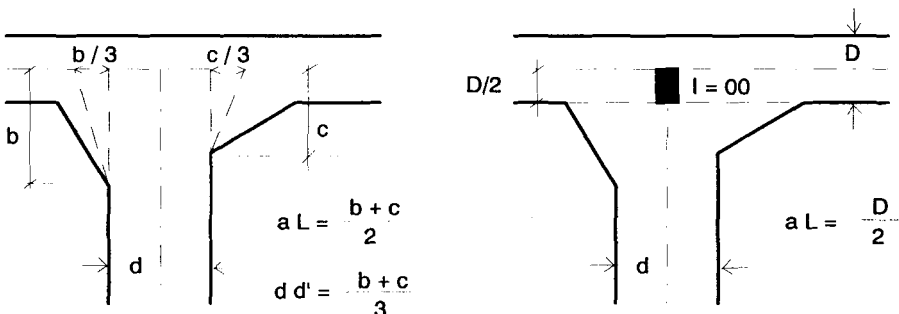


COLUMNAS

- a.- Cuando la columna es muy peraltada en relación con la viga, o cuando las cartelas predominan hacia el lado de la viga, podrá trabajarse como si la columna fuese una barra prismática, mientras que la viga es el elemento de sección variable.



- b.- Para evitar la duplicidad de cartelas en el nudo (por el lado de la viga y de la columna), algunos autores recomiendan trabajar con cartelas ficticias con pendientes 1:3, y otros proponen emplear un brazo rígido ($I = \infty$) sólo en el lado de la columna, con una longitud igual a la mitad del peralte de la viga ($D / 2$), la parte inferior al brazo rígido se trabaja como si fuese prismática (peralte = d). La última recomendación es la que se utilizará en este libro.



5.2.4. Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1. Resolver por Cross al pórtico con viga acartelada mostrado en la Fig. 5.9. Suponer que el espesor de la viga es 0.3 m y el de las columnas es 0.4 m. La base de las columnas se ha supuesto articulada debido a que el suelo de cimentación es blando y no restringe la rotación de la zapata. Por otro lado, las Tablas de la PCA, empleadas para solucionar este ejemplo, aparecen en el Anexo 1.

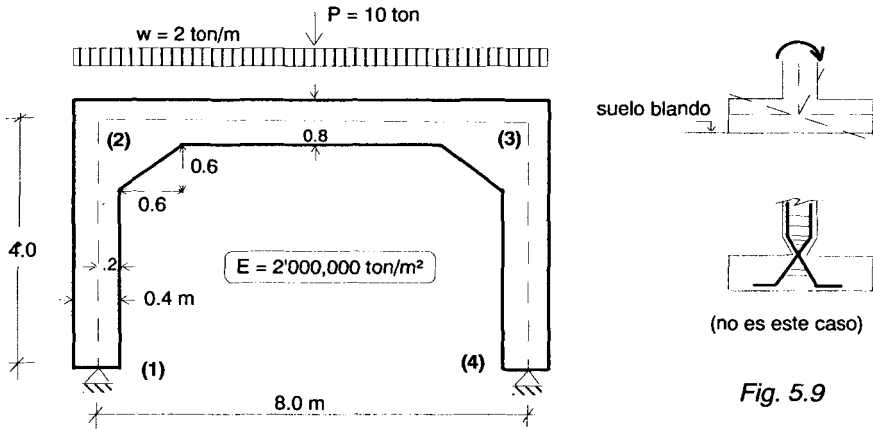


Fig. 5.9

VIGA 2-3 (Tabla 3 de la PCA)

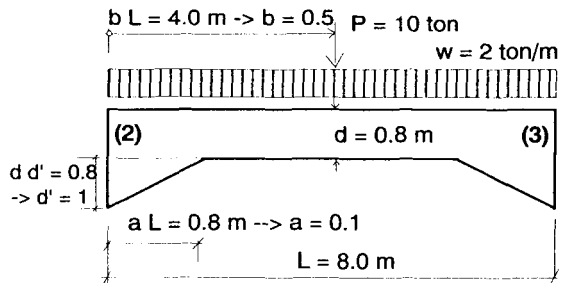
$$I_o = 0.3 \times 0.8^3 / 12 = 0.0128 \text{ m}^4$$

$$E I_o / L = 2 \times 10^6 \times 0.0128 / 8 = 3200 \text{ t-m}$$

Ingresando a la Tabla 3 de la PCA con $a = 0.1$ y $d' = 1$, se obtiene:

$$f_{23} = 0.588$$

$$c_{23} = 5.54$$



$$\text{Con lo cual: } K_{23} = c_{23} E I_o / L = 5.54 \times 3200 = 17728 \text{ ton-m}$$

Momentos de empotramiento:

$$u_{23}(w) = -0.0925 \times 2 \times 8^2 = -11.84 \text{ ton-m}$$

$$u_{23}(P) = -0.14 \times 10 \times 8 = -11.20 \text{ ton-m}$$

$$u_{23} = u_{23}(w) + u_{23}(P) = -23.04 \text{ ton-m}$$

... diferente a $w L^2 / 12$

... diferente a $P L / 8$

COLUMNA 2-1 (Tabla 7 de la PCA)

$$I_o = 0.4 \times 0.4^3 / 12 = 0.002133 \text{ m}^4$$

$$E I_o / L = 2 \times 10^6 \times 0.002133 / 4 = 1067 \text{ ton-m}$$

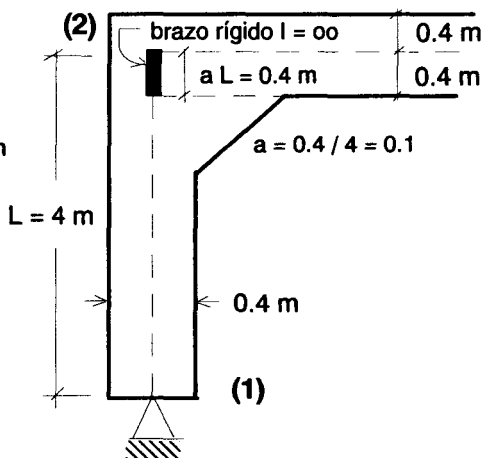
Ingresando a la Tabla 7 de la PCA
con $a = 0.1$, se obtiene:

$$f_{12} = 0.667$$

$$f_{21} = 0.486$$

$$c_{21} = 6.09$$

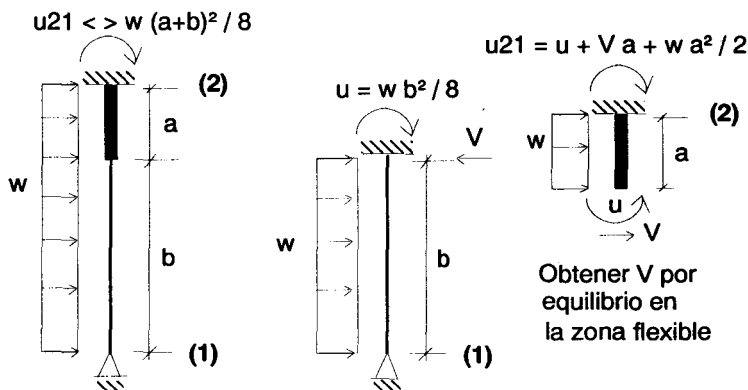
$$K_{21} = 6.09 \times 1067 = 6487 \text{ ton-m}$$



Como $M_{12} = 0$, entonces puede trabajarse con la barra equivalente reduciendo el grado de libertad θ_1 a cero; de esta manera, la rigidez modificada será:

$$K'_{21} = 6487 (1 - 0.667 \times 0.486) = 4384 \text{ ton-m}$$

Es necesario indicar que si sobre la columna existiese carga aplicada, el momento de empotramiento se calcularía de la siguiente manera:



Retornando al ejemplo, se observa que la columna 1-2 está descargada, que $\delta_{21} = 0$ y que $\theta_1 = 0$, por lo tanto, puede reducirse a un resorte helicoidal con rigidez $K = 4384 \text{ ton-m} = K'_{21}$.

Asimismo, por simetría en forma y carga: $\theta_2 = -\theta_3$, con lo cual, $T_{23} = -f_{23} D_{23} = -T_{32}$

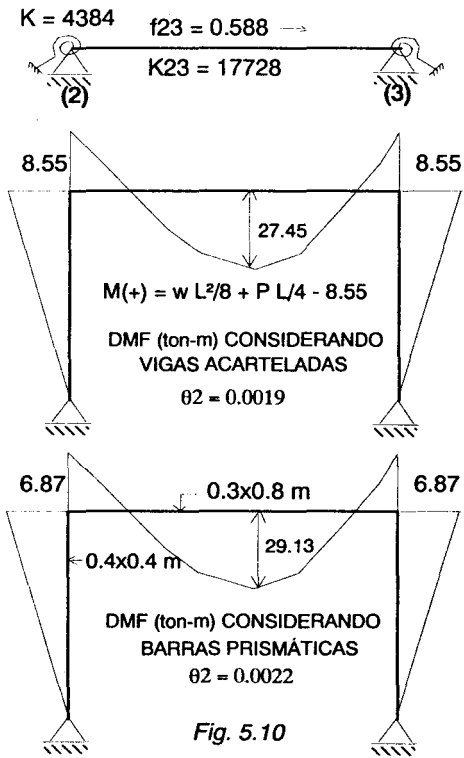
De esta manera, puede aplicarse Cross trabajando con media estructura y un sólo nudo.

Adicionalmente, con fines comparativos, en la Fig. 5.10 se presenta los resultados correspondientes al mismo pórtico, suponiendo que está constituido por barras prismáticas (viga de $0.3 \times 0.8 \text{ m}$ y columnas de $0.4 \times 0.4 \text{ m}$).

Nudo	2	
Barra	2-3	
α_{ij}	0.802	
u_{ij}	-23.04	$M_2 =$
D	18.47	23.04
T	-10.86	
D	8.71	10.86
T	-5.12	
D	4.10	5.12
T	-2.41	
D	1.94	2.41
T	-1.14	
D	0.91	1.14
T	-0.54	
D	0.43	0.54
Mij	-8.55	$\Sigma 2 = 43.11$

$$\theta_2 = \Sigma M_2 / (K_{21} + K_{23}) =$$

$$43.11 / (4384 + 17728) = 0.0019 \text{ rad}$$



Cabe mencionar que algunas veces se acartelan las vigas con la finalidad de rigidizar sus extremos, para que de esta manera crezca el momento negativo disminuyendo el positivo. En este ejemplo, el momento positivo decreció 6% en comparación al caso en que se consideró barras prismáticas (Fig. 5.10), este porcentaje resultó mínimo debido a que la viga tenía una gran rigidez con relación a la columna (17,728 vs 4,384), comportándose prácticamente como si estuviese simplemente apoyada; nótese también una reducción del giro correspondiente al nudo 2, lo que implica un decremento en la deflexión de la viga. Asimismo, las cartelas incrementan la rigidez lateral de los pórticos ante las acciones sísmicas, tal como se verá en el ejemplo 2.

Ejemplo 2. Calcular la rigidez lateral del pórtico correspondiente a la Fig. 5.9, sujeto a una carga lateral igual a 5 ton.

Nota: La rigidez lateral de un entrepiso (K en la Fig. 5.11) se define como la fuerza cortante del entrepiso (V) dividida entre el desplazamiento del entrepiso (δ = desplazamiento relativo entre niveles).

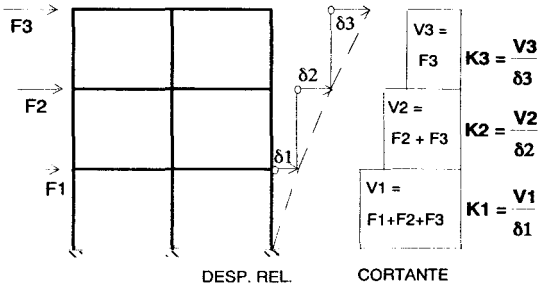


Fig. 5.11. Rigidez Lateral de Entrepiso.

Por condición de antisimetría, el pórtico en estudio resulta ser isostático; pero, es necesario aplicar Cross Indirecto (Fig. 5.12) para calcular el desplazamiento lateral, y con ello, su rigidez lateral.

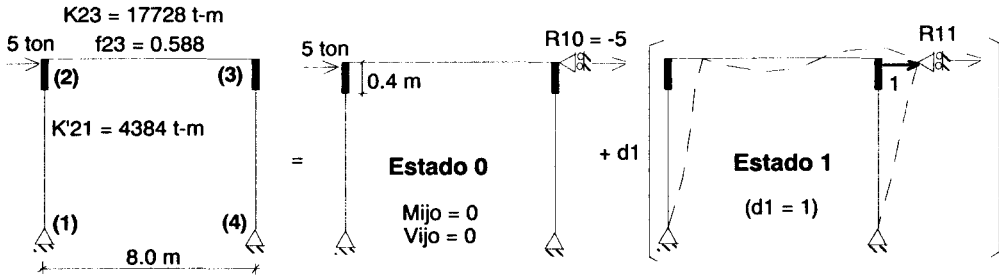
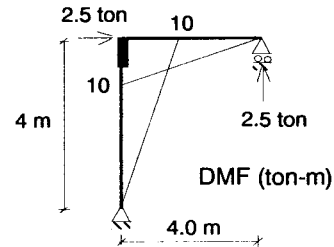


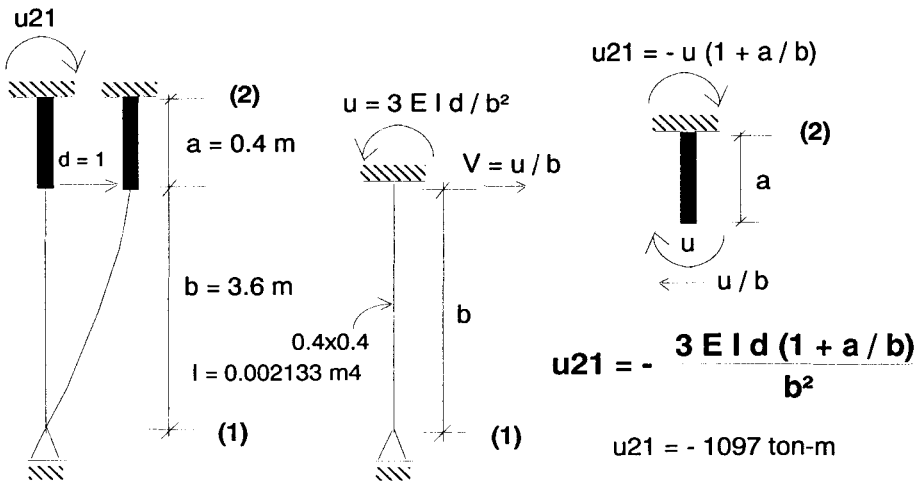
Fig. 5.12
Pórtico de la Fig. 5.9
Sujeto a
Carga Lateral.

Por Antisimetría:



ESTADO 1. Momento de empotramiento:

$$u_{21} = -K'_{21} d / L = -4384 \times 1 / 4 = -1096 \text{ ton-m, o también:}$$

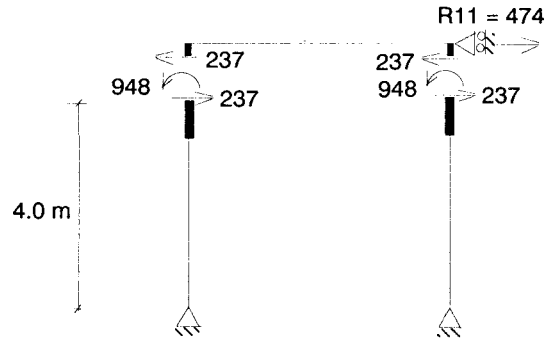


Por antisimetría en la sollicitación: $\theta_2 = \theta_3$; por lo que: $T_{23} = f_{23} D_{23} = T_{32}$ (donde $f_{23} = 0.588$); adicionalmente, nótese que en este caso la columna 2-1 no puede reducirse a un resorte helicoidal, ya que está sujeta a desplazamiento lateral.

Nudo	2	
Barra	2-1	2-3
α_{ij}	0.198	0.802
u_{ij}	-1096	0
D	217	879
T	0	517
D	-102	-414
T	0	-244
D	48	195
T	0	115
D	-23	-92
T	0	-54
D	11	43
T	0	25
D	-5	-20
T	0	-12
D	2	9
Mij1	-948	947
Mij	-10	10

$$M_{ij} = M_{ij0} + d1 M_{ij1}$$

$$= d1 M_{ij1}$$



$$R_{10} + R_{11} d1 = 0$$

$$-5 + 474 d1 = 0 \rightarrow d1 = 0.0105 \text{ m}$$

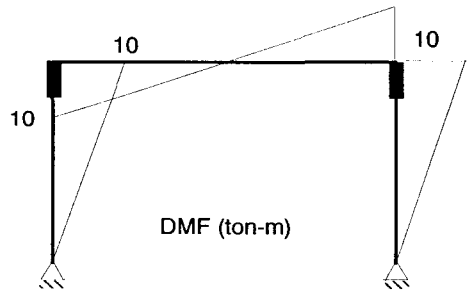
$$\text{Rigidez lateral} = 5 / 0.0105 = 474 \text{ ton/m}$$

SI LAS BARRAS FUESEN PRISMÁTICAS:

$$d1 = 0.01458 \text{ m}$$

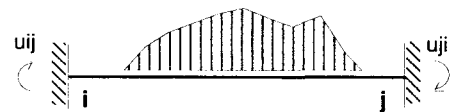
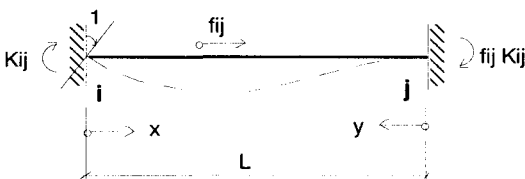
$$\text{Rigidez Lateral} = 5 / 0.01458 = 343 \text{ ton/m}$$

(38% menos que cuando hay cartelas)



5.2.5. Programa "KFU"

Este programa calcula las rigideces al giro (K_{ij} , K_{ji}), los factores de transporte (f_{ij} , f_{ji}) y los momentos de empotramiento (u_{ij} , u_{ji}) para las barras de sección variable cuyo eje es aproximadamente recto, contemplando la deformación por flexión y por fuerza cortante. Su manual de uso aparece en el archivo "KFU.MAN" y la nomenclatura que se emplea es la siguiente:



- f = factor de forma de la sección transversal (ver la Fig. 5.13).
 A = área axial de la sección transversal (variable).
 I = momento de inercia de la sección transversal (variable).
 $G = E / (2 (1 + \nu))$ = módulo de corte.
 E = módulo de elasticidad.
 ν = módulo de Poisson.

Los pasos que sigue el programa son:

1.- Por integración numérica se determina los siguientes parámetros:

$$\alpha = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{(1 - x/L)^2}{I(x)} dx$$

$$\beta = - \frac{1}{E L} \int_0^L \frac{(1 - x/L) x}{I(x)} dx$$

$$\theta = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{(1 - y/L)^2}{I(y)} dy$$

$$\omega = - \frac{1}{E L} \int_0^L \frac{(1 - y/L) y}{I(y)} dy$$

$$\gamma = \frac{f}{G L^2} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

$$\phi = \frac{f}{G L^2} \int_0^L \frac{dy}{A(y)}$$

2.- Luego se calcula:

$$f_{ij} = - \frac{[\omega + \phi]}{[\theta + \phi]}$$

$$f_{ji} = - \frac{[\beta + \gamma]}{[\alpha + \gamma]}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{[(\alpha + \gamma) + f_{ij} (\beta + \gamma)]}$$

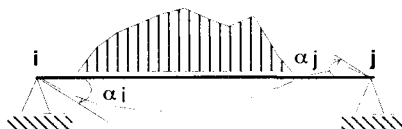
$$K_{ji} = \frac{1}{[(\theta + \phi) + f_{ji} (\omega + \phi)]}$$

3.- Los momentos de empotramiento se evalúan aplicando las siguientes expresiones:

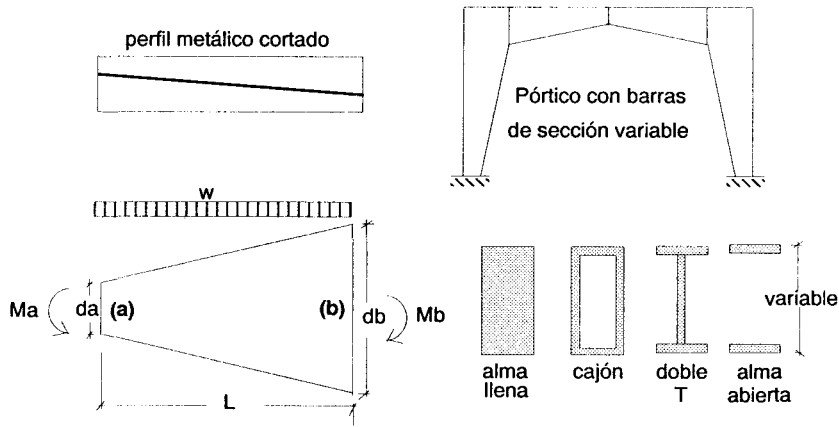
$$u_{ij} = - K_{ij} (\alpha_i + f_{ij} \alpha_j)$$

$$u_{ji} = - K_{ji} (\alpha_j + f_{ji} \alpha_i)$$

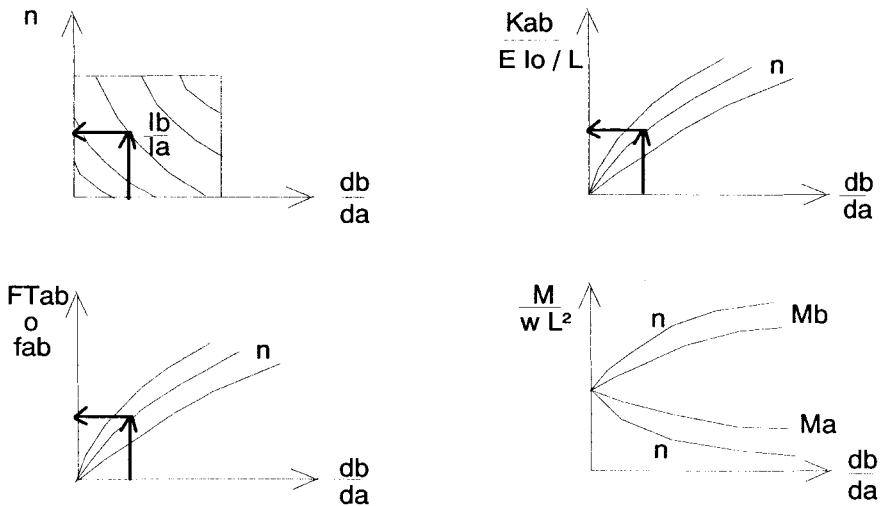
Donde: α_i y α_j se determinan numéricamente, aplicando el método de la carga unidad sobre una viga simplemente apoyada sujeta a las fuerzas actuantes (ver el Acápito 5.1).



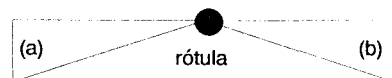
Finalmente, cabe destacar que en la Ref. 1 existen gráficos que permiten hallar K_{ij} , f_{ij} y u_{ij} para una serie de casos especiales, como por ejemplo el de una barra cuyo peralte varía linealmente mientras que su ancho permanece constante, pudiendo ser la sección transversal de alma llena (donde también es aplicable las tablas de la PCA), tipo cajón, doble T y de alma abierta. Estas barras pueden ser obtenidas cortando longitudinalmente un perfil metálico en 2 partes, lo que proporciona un ahorro de materiales.



Para ingresar a los gráficos, previamente debe calcularse el coeficiente de sección "n"

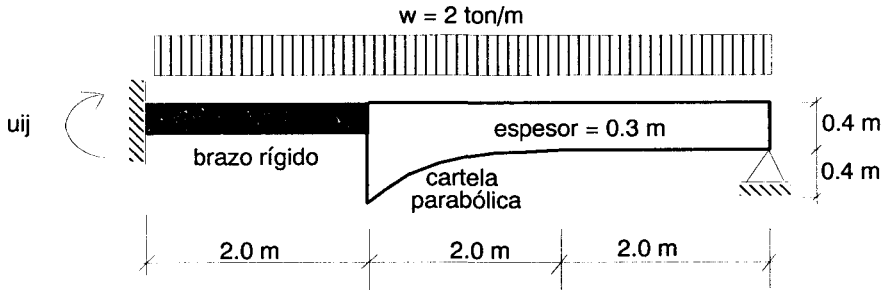


Gráficos similares existen para los casos:



5.2.6. Problemas Propuestos

- 1.- Empleando las tablas de la PCA, calcule el momento de empotramiento para la viga de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$) mostrada. Resultado: $u_{ij} = -20.77 \text{ ton-m}$.



- 2.- Asumiendo que las columnas del pórtico mostrado son prismáticas, calcule:

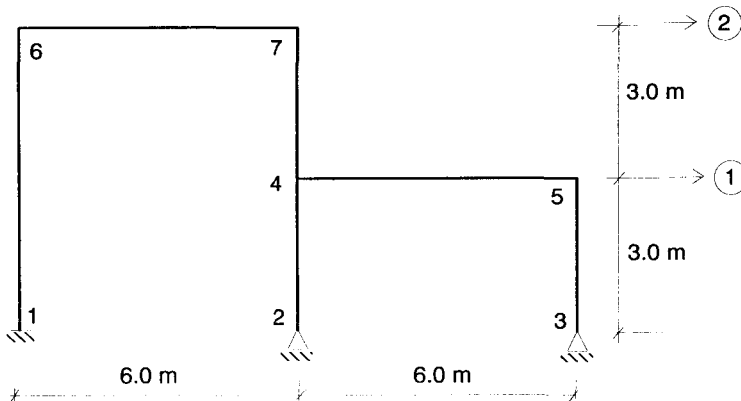
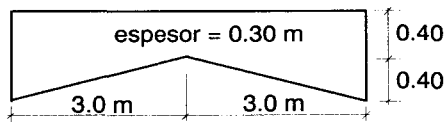
- La matriz de rigidez lateral $[R]$
- La matriz de flexibilidad lateral $[f]$, para lo cual se deberá aplicar una carga unitaria en cada coordenada. Se deberá comprobar que $[R][f] = \text{matriz unidad}$.

Suponer:

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

Columnas prismáticas $0.30 \times 0.60 \text{ m}$

Vigas acarteladas linealmente:



Resultados:

$$[R] = \begin{bmatrix} 3943 & -2205 \\ -2205 & 2375 \end{bmatrix} \text{ (ton/m)}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 5.275 & 4.897 \\ 4.897 & 8.757 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \text{ m/ton}$$

5.3. Efectos de la Deformación por Corte en Barras Prismáticas

El único caso que se tratará en detalle corresponde al de las estructuras compuestas por barras prismáticas; para otras situaciones, puede recurrirse al programa "KFU", descrito en el acápite 5.2.5.

Contemplando el efecto de la deformación por flexión y por fuerza cortante en una barra prismática, cualquier desplazamiento (δ) o rotación (θ) puede obtenerse mediante el método de la carga unidad, utilizando la siguiente expresión:

$$\delta, \theta = \frac{1}{EI} \int M m \, dx + \frac{f}{GA} \int V v \, dx$$

Donde:

M, V = momento flector y fuerza cortante producidos por el sistema de cargas.

m, v = momento flector y fuerza cortante, respectivamente, producidos por la carga unitaria aplicada en el punto donde se desee calcular δ o θ .

G = módulo de corte = $E / (2 (1 + \nu))$

ν = módulo de Poisson: Concreto Armado $\nu = 0.15 \rightarrow E / G = 2.3$
 Acero $\nu = 0.30 \rightarrow E / G = 2.6$
 Albañilería $\nu = 0.25 \rightarrow E / G = 2.5$

I, A = momento de inercia y área axial de la sección transversal, respectivamente.

f = factor de forma de la sección transversal = Área axial / Área de corte. Ver la Fig. 5.13.

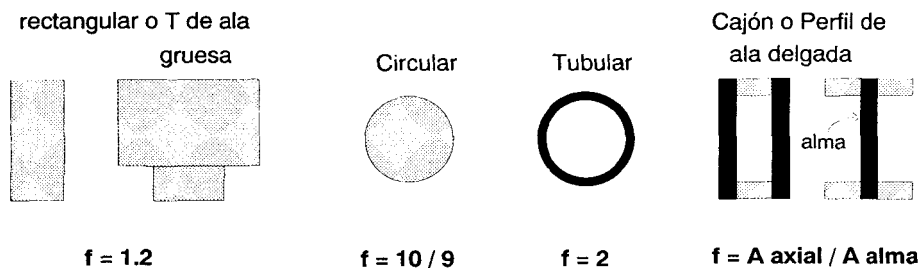


Fig. 5.13. Valores del Factor de Forma "f" Para Diversas Secciones Transversales.

5.3.1. Influencia del Esfuerzo Cortante en una Viga Simplemente Apoyada

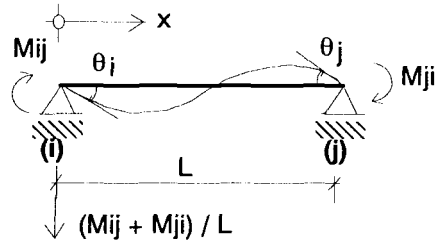
En primer lugar, se calculará las rotaciones θ_i , θ_j correspondientes a los extremos de una viga simplemente apoyada sujeta a momentos flectores M_{ij} , M_{ji} , para después, imponiendo condiciones de borde, calcular la rigidez al giro K_{ij} y el factor de transporte f_{ij} .

Cálculo de θ_i :

Sistema real:

$$M(x) = M_{ij} (1 - x/L) - M_{ji} x/L$$

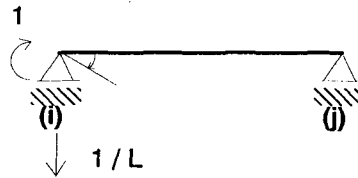
$$V(x) = -(M_{ij} + M_{ji})/L$$



Carga unitaria:

$$m(x) = 1 - x/L$$

$$v(x) = -1/L$$



$$\theta_i = \frac{1}{EI} \int_0^L [M_{ij} (1 - \frac{x}{L}) - M_{ji} \frac{x}{L}] (1 - \frac{x}{L}) dx + \frac{f}{GA} \int_0^L \frac{-(M_{ij} + M_{ji})}{L} (-\frac{1}{L}) dx$$

Luego, integrando y ordenando términos, se obtiene:

$$\theta_i = M_{ij} \left[\frac{L}{3EI} + \frac{f}{GAL} \right] + M_{ji} \left[-\frac{L}{6EI} + \frac{f}{GAL} \right] \quad (1)$$

En forma similar, pero aplicando un momento unitario en "j", se determina:

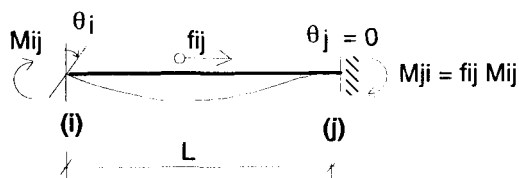
$$\theta_j = M_{ji} \left[\frac{L}{3EI} + \frac{f}{GAL} \right] + M_{ij} \left[-\frac{L}{6EI} + \frac{f}{GAL} \right] \quad (2)$$

Nótese que las expresiones (1) y (2) son muy similares (varían sólo en los subíndices), esto se debe a que la barra $i-j$ presenta simetría en forma.

5.3.2. Modificación de K_{ij} , f_{ij} y u_{ij}

a.- Modificación del Factor de Transporte (f_{ij})

Imponiendo condiciones de borde a la viga simplemente apoyada, analizada en el acápite 5.3.1, se tiene en la ecuación 2:



$$\theta_j = 0 = f_{ij} M_{ij} \left[\frac{L}{3EI} + \frac{f}{GAL} \right] + M_{ij} \left[-\frac{L}{6EI} + \frac{f}{GAL} \right]$$

de la cual se obtiene:

$$f_{ij} = \frac{\frac{L}{6EI} - \frac{f}{GAL}}{\frac{L}{3EI} + \frac{f}{GAL}}$$

Definiendo a la siguiente variable adimensional:
y sabiendo que por simetría $f_{ij} = f_{ji}$;

$$g = \frac{6EI f}{GAL^2}$$

se concluye que:

$$f_{ij} = f_{ji} = \frac{1 - g}{2 + g}$$

Observaciones:

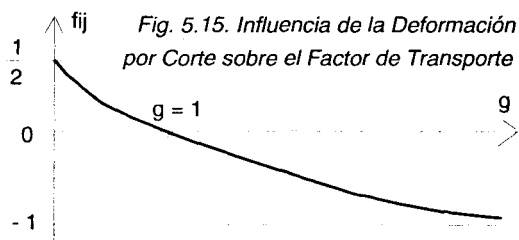
- 1.- El factor "g" contempla la deformación por corte, ya que si $g = 0$, entonces $f_{ij} = \frac{1}{2}$

En los programas de cómputo, a veces se requiere anular la deformación por corte de una barra, lo que se consigue dándole un factor de forma $f = 0$ (lo que implica: $g = 0$). Por ejemplo, si se reemplaza una conexión elástica helicoidal (Fig. 5.14) por una barra equivalente de la misma rigidez (K), que se deforme sólo por flexión, se tendría que proporcionar $f = 0$ en esa barra.



Fig. 5.14

- 2.- Mientras más alto sea el valor de "g", el factor de transporte f_{ij} decrece, pudiendo incluso cambiar de signo (en el límite, cuando $g \rightarrow \infty \Rightarrow f_{ij} = -1$). Ver la Fig. 5.15.



- 3.- Para el caso particular de una sección rectangular de concreto armado (base = b, peralte = d) se tiene:

$$I = b d^3 / 12$$

$$A = b d$$

$$f = 1.2$$

$$E / G = 2.3$$

$$g = 6 E I f / (G A L^2) = 1.38 (d / L)^2$$



$$g = 1.38 \left(\frac{d}{L} \right)^2$$

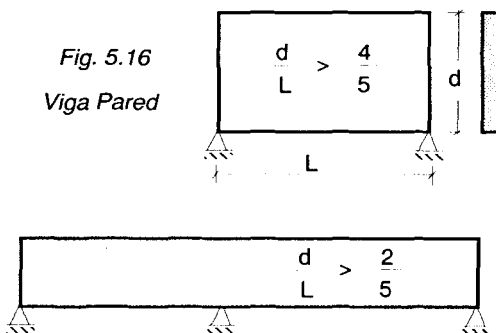
Es decir, físicamente "g" representa la inversa de la esbeltez que tiene la barra.

Por otro lado, las vigas de un pórtico de concreto armado son barras esbeltas, ya que usualmente su relación d / L es del orden de $1 / 10$; por lo que en estas barras se tendría $g = 1.38 (1/10)^2 = 0.0138$, lo que proporcionaría $f_{ij} = (1 - 0.0138) / (2 + 0.0138) \approx 1/2$, por consiguiente, en las barras esbeltas, los efectos de la deformación por corte se pueden despreciar.

En elementos peraltados los efectos de la deformación por corte son importantes, pero esto no quiere decir que en toda barra peraltada sea aplicable esta teoría, ya que el método de la carga unidad se basa en el cumplimiento de la hipótesis de Navier (las secciones planas continúan siendo planas después de haberse aplicado las cargas).

De acuerdo al Reglamento Nacional de Construcciones, en toda viga simplemente apoyada donde $d / L > 4 / 5$, o en toda viga continua donde $d / L > 2 / 5$ (Fig. 5.16), la hipótesis de Navier no se cumple y ellas tienen que ser tratadas como una "Viga Pared", para lo cual puede recurrirse al libro de Kalmanok, o sino, debe emplearse el método de Elementos Finitos para su solución, lo que está fuera del alcance de este libro.

Fig. 5.16
Viga Pared



Un ejemplo de viga pared se ilustra en la Fig. 5.17, correspondiente a la caseta de máquinas de un ascensor.

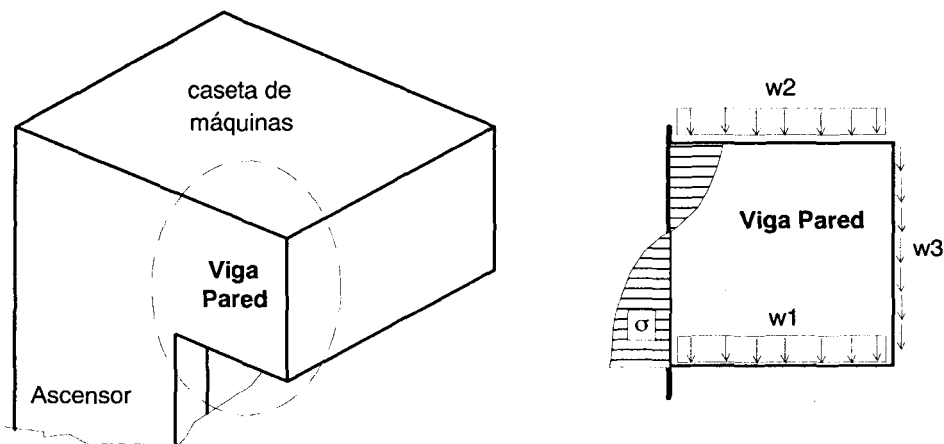
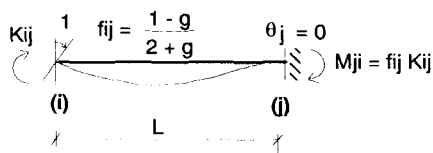


Fig. 5.17. Distribución No Lineal de Esfuerzos Normales () en una Viga Pared.

b.- Modificación de la Rigidez al Giro (K_{ij})

Imponiendo condiciones de borde a la viga simplemente apoyada, analizada en el acápite 5.3.1, se tiene en la ecuación 1:



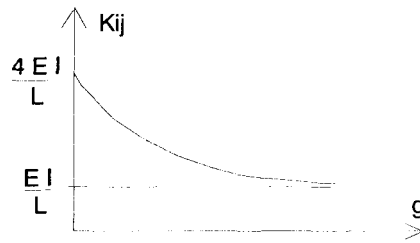
$$\theta_i = 1 = K_{ij} \left[\frac{L}{3EI} + \frac{f}{GAL} \right] + f_{ij} K_{ij} \left[-\frac{L}{6EI} + \frac{f}{GAL} \right]$$

Recordando que: $f/(GAL) = Lg/(6EI)$, $f_{ij} = (1-g)/(2+g)$, y sabiendo que por simetría en forma $K_{ij} = K_{ji}$, entonces podrá obtenerse K_{ij} como:

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{2EI}{L} \left[\frac{2+g}{1+2g} \right]$$

Donde puede notarse que cuando $g = 0$, entonces $K_{ij} = 4EI/L$; es decir, nuevamente se aprecia que el factor "g" contempla los efectos de la deformación por corte. Asimismo, en el límite, cuando $g \rightarrow \infty \Rightarrow K_{ij} = EI/L$. En la Fig. 5.18 puede apreciarse el decremento de K_{ij} conforme crecen los efectos de la deformación por corte.

Fig. 5.18. Influencia de la Deformación por Corte Sobre la Rigidez al Giro (K_{ij}).



c.- Modificación de los Momentos de Empotramiento (u_{ij})

Los momentos de fijación (u_{ij}) también se ven afectados por la deformación por fuerza cortante, excepto en aquellas barras que presentan un diagrama de fuerza cortante (V) antisimétrico (Fig. 5.19), ya que este efecto se cancela al realizarse el proceso de integración cuando se aplica el método de la carga unidad.

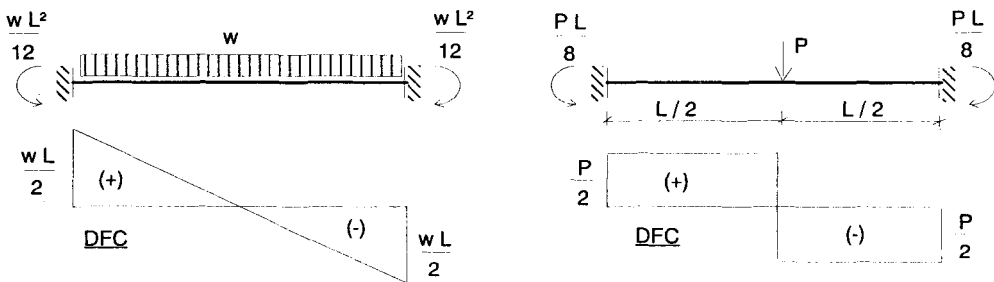
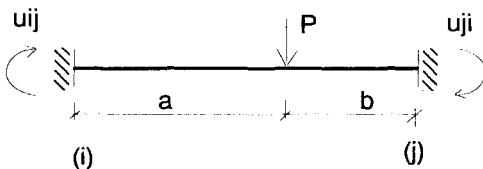


Fig. 5.19. Barras con Diagrama de Fuerza Cortante (DFC) Antisimétrico.

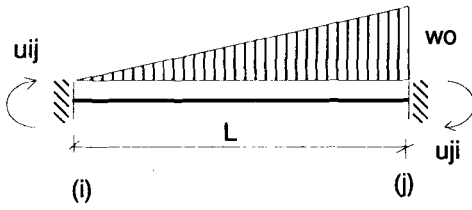
A continuación se presentan los momentos de fijación para otros casos:



$$u_{ij} = - \frac{P a b^2}{L^2} \frac{[1 + (L/b)g]}{1 + 2g}$$

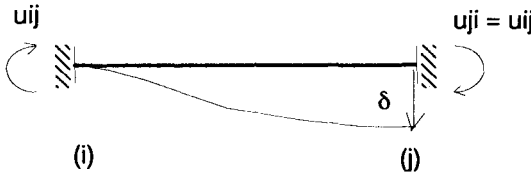
$$u_{ji} = \frac{P a^2 b}{L^2} \frac{[1 + (L/a)g]}{1 + 2g}$$

Nótese que cuando $a = b = L/2$, entonces $u_{ij} = -u_{ji} = -PL/8$

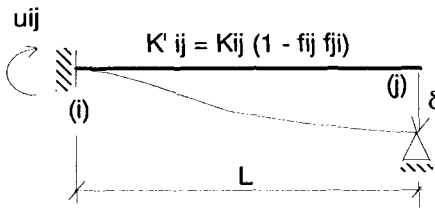


$$u_{ij} = - \frac{w_0 L^2}{30} \frac{[2 + 5g]}{[2 + 4g]}$$

$$u_{ji} = \frac{w_0 L^2}{20} \frac{[3 + 5g]}{[3 + 6g]}$$

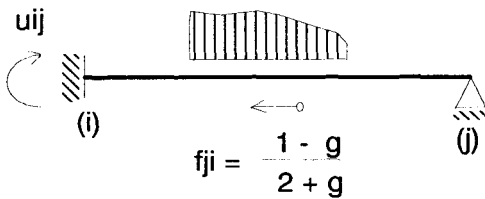


$$u_{ij} = - \frac{6EI\delta}{L^2} \frac{1}{[1 + 2g]}$$



$$u_{ij} = - K'_{ij} \delta / L$$

$$u_{ij} = - \frac{6EI\delta}{L^2} \frac{1}{[2 + g]}$$



$$u_{ij} = u_{ijE} - f_{ji} u_{jiE}$$

u_{ijE} y u_{jiE} se calculan en la barra biempotrada

Finalmente, conociendo los tres parámetros: K_{ij} , f_{ij} y u_{ij} , podrá resolverse cualquier viga relativamente peraltada, tal como la mostrada en la Fig. 5.20.

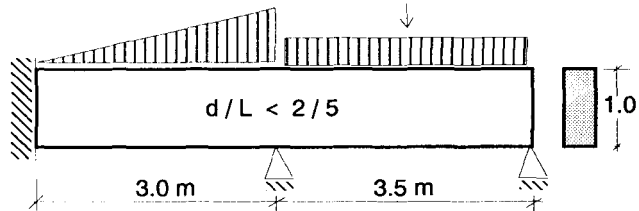


Fig. 5.20

5.3.3. Modelaje de Placas o Muros de Corte

Las placas son elementos peraltados que se utilizan en los edificios con el objeto de proporcionarles rigidez lateral, limitando los desplazamientos horizontales cuando actúan las fuerzas sísmicas; esto trae por consecuencia, una disminución de los esfuerzos sísmicos en las vigas y columnas ubicadas en los ejes paralelos a las placas.

Desde el punto de vista del análisis estructural, la diferencia que existe entre una placa y una columna se debe a que por el gran peralte que tiene la placa debe contemplarse necesariamente los efectos de la deformación por corte.

Por lo general, las placas se emplean en los edificios elevados, por lo que si se compara la altura total de la placa contra su peralte, puede decirse que ella es un elemento relativamente esbelto; de esta manera, la hipótesis de Navier resulta aplicable, salvo en aquellos casos donde la placa es "achatada" como ocurre, por ejemplo, en los muros de sótano con gran longitud (Fig. 5.23).

En la Fig. 5.21, se muestra (aceptando el cumplimiento de la hipótesis de Navier) dos de las tres deformaciones (la tercera es la deformación axial) que existen en una placa en voladizo.

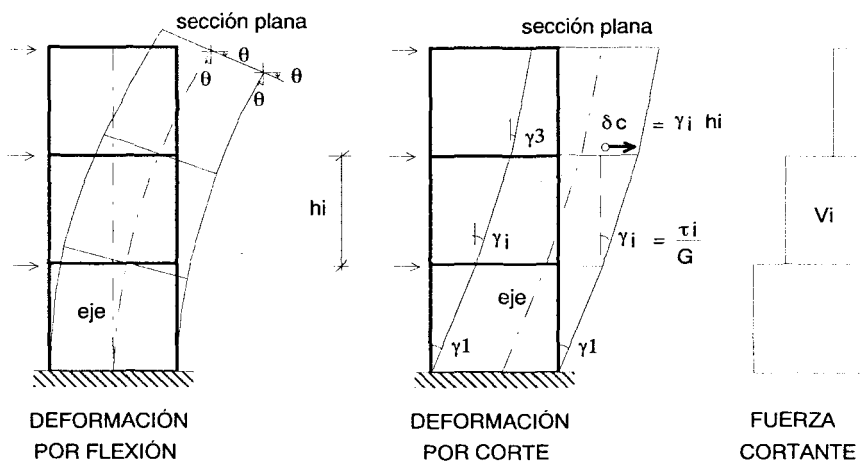


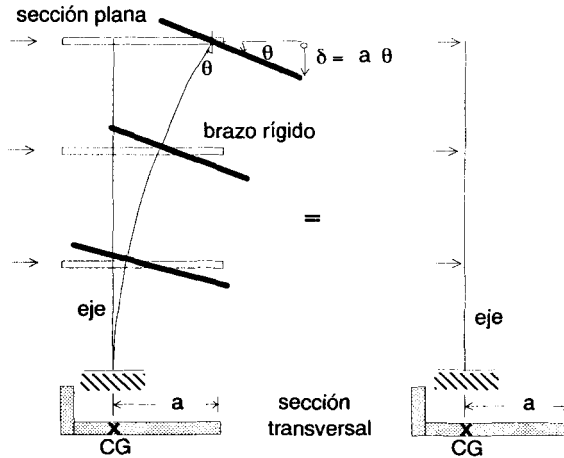
Fig. 5.21. Esquema de las Deformaciones de una Placa en Voladizo de 3 Pisos.

En un entrepiso cualquiera (i), el desplazamiento relativo producido por corte ($\delta_c = \gamma_i h_i$) puede obtenerse conociendo la distorsión angular (γ_i) mediante la expresión $\gamma_i = \tau_i / G$, donde el esfuerzo cortante (τ_i) se calcula como $\tau_i = V_i / \text{Area de corte} = V_i f / \text{Area axial}$. Notándose que el desplazamiento por corte es mayor en los pisos bajos, puesto que la fuerza cortante es máxima en esos pisos; cosa contraria ocurre con los desplazamientos por flexión que se maximizan en los pisos altos.

Para los tres tipos de deformación (incluyendo la deformación axial), la sección plana se puede simular a través de un brazo rígido ($l = \infty$), y las rotaciones por flexión (θ), así como las distorsiones angulares por corte (γ), pueden obtenerse analizando sólo al eje de la placa; sin embargo, cabe mencionar que para la placa en voladizo resulta ocioso agregar los brazos rígidos, debido a que el desplazamiento vertical en el borde de la placa puede calcularse conociendo θ , tal como se muestra en la Fig. 5.22.

Fig. 5.22

Modelo Matemático de la Placa en Voladizo mostrada en la Fig. 5.21.



Tal como se ha dicho, en los muros muy alargados la hipótesis de Navier no se cumple y para su solución debería recurrirse a la teoría de Elementos Finitos. Por ejemplo, en la Fig. 5.23 se presenta el caso de un muro de sótano del cual nace una placa y una columna, allí puede apreciarse que la configuración deformada del borde superior del muro de sótano (sujeto sólo a momentos flectores M y m) es muy diferente al caso en que se admita el cumplimiento de la hipótesis de Navier; también, puede observarse que la base de la placa (y de la columna) se comporta como un brazo rígido, debido a que el peralte de ese brazo corresponde a la altura total que tiene la placa.

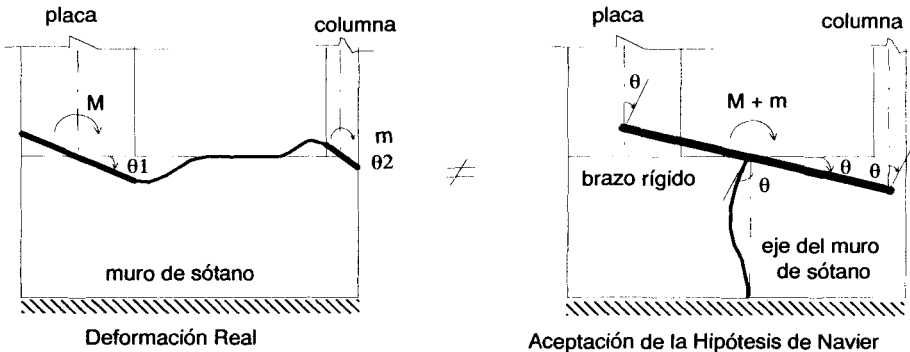


Fig. 5.23. Muro de Sótano Sujeto a Momentos M y m .

Problemas de este tipo han sido analizados mediante la teoría de elementos finitos, y se ha llegado a la conclusión que tanto ante la acción de los momentos flectores (M) como de las cargas axiales (P), que bajan a través de la placa, el muro de sótano contribuye con un ancho efectivo que abarca sólo 0.5 m a cada lado de la placa (Fig. 5.24), esta observación permite evaluar por medio de una barra equivalente la rigidez al giro (K) y la rigidez axial (K_v) que ofrece el muro de sótano en la base de la placa.

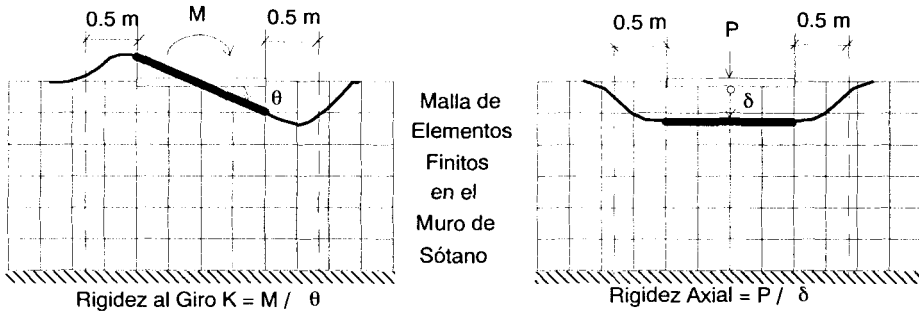


Fig. 5.24. Efectos del Muro de Sótano sobre la Superestructura.

De esta manera, si se va a utilizar un modelo compuesto por barras en la estructura mostrada en la Fig. 5.23, se aconseja adoptar la configuración que aparece en la Fig. 5.25, donde la biela axialmente rígida garantiza la acción de diafragma rígido que provee el techo del sótano; esta biela no genera más rigidez al giro, ni rigidez axial en la base de la placa, que la que proporciona el muro del sótano. Asimismo, como la parte central del muro del sótano provee rigidez lateral al sistema, su barra correspondiente deberá tener un Momento de Inercia (I) y un Área (A) equivalente a la inercia y área total del muro del sótano menos la suma de los momentos de inercia y áreas, respectivamente, que aportan las barras extremas.

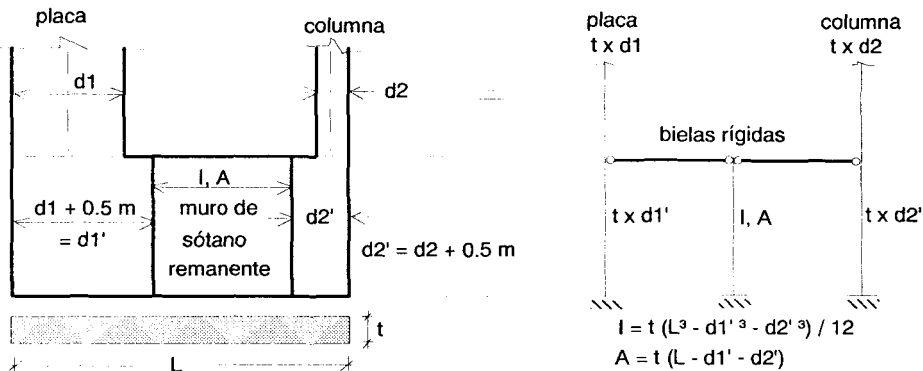


Fig. 5.25. Modelaje a través de Barras del Sistema Mostrado en la Fig. 5.23.

5.3.4. Pórticos Mixtos Sujetos a Carga Lateral. Longitud del Brazo Rígido

Un pórtico mixto (o híbrido) es aquel que está compuesto por vigas, columnas y placas; para este caso, el brazo rígido (que representa la sección plana en la placa) es necesario adicionarlo hacia el lado de la viga, tal como se muestra en la Fig. 5.26.

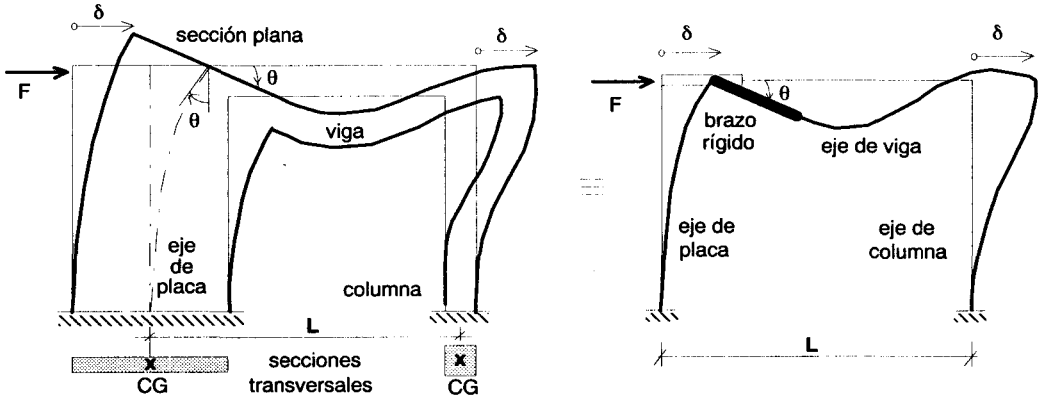


Fig. 5.26. Modelaje de Pórticos Mixtos.

En cuanto a la longitud del brazo rígido, debe tenerse en cuenta que en la zona de encuentro viga-placa se desarrollan concentraciones de esfuerzos, que hacen que la hipótesis de Navier no se cumpla totalmente en la placa, por lo que Muto (Ref. 5) recomienda reducir la longitud del brazo rígido en una cantidad igual a la cuarta parte del peralte de la viga coplanar, tal como se muestra en la Fig. 5.27. Sin embargo, cuando la viga presenta un cambio gradual de su peralte (cartelas), o cuando la viga concurre a un ensanchamiento ubicado en el borde de la placa, estas concentraciones de esfuerzos se atenúan, por lo que no será necesario reducir la longitud del brazo rígido.

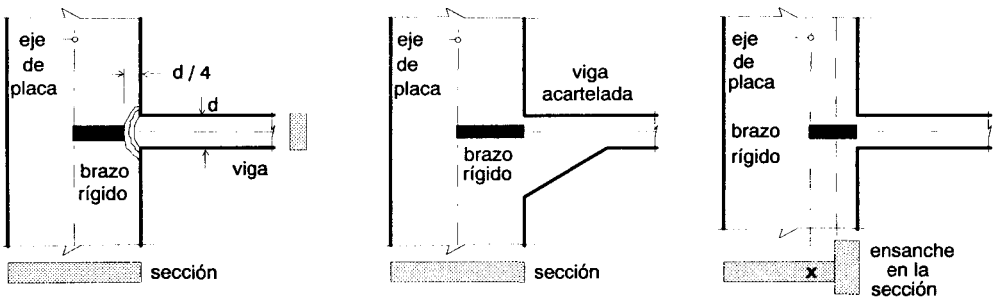
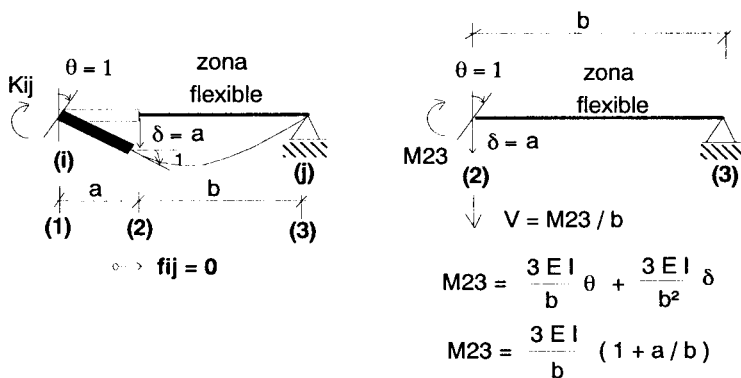


Fig. 5.27. Longitud del Brazo Rígido.

Para estos casos, es necesario conocer la rigidez al giro K_{ij} y el factor de transporte f_{ij} de una barra con brazo rígido. A continuación se efectúa el cálculo de K_{ij} para una barra que presenta un extremo articulado ($f_{ij} = 0$):



Equilibrio en el brazo rígido: K_{ij} M_{23}

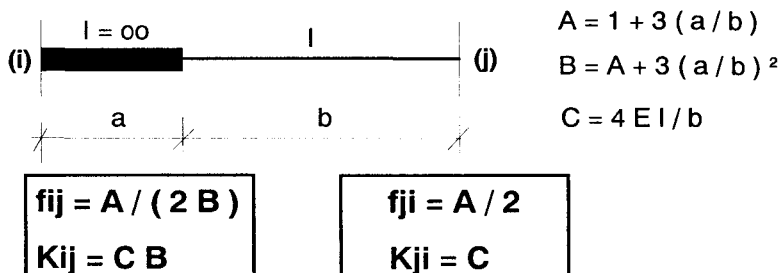
$K_{ij} = M_{23} + V a = M_{23} (1 + a / b)$ $V = M_{23} / b$

$$K_{ij} = \frac{3 E I}{b} (1 + a / b)^2$$

Para la misma barra articulada en "j", contemplando la deformación por corte en la zona flexible 2-3 (con $g = 6 E I f / G A b^2$) se obtiene:

$$K_{ij} = \frac{6 E I}{b} \frac{(1 + a / b)^2}{(2 + g)}$$

Para el caso en que la barra tiene continuidad en sus dos extremos, puede recurrirse a la Tabla 7 de la PCA (Anexo 1), o también, puede aplicarse las siguientes expresiones:



Efectuando un resumen del modelaje de los pórticos mixtos, en la Fig. 5.28 se muestra cómo idealizar matemáticamente un pórtico mixto de dos pisos, a través de un sistema compuesto por barras deformables (excepto los brazos rígidos) por carga axial, fuerza cortante y momento flector.

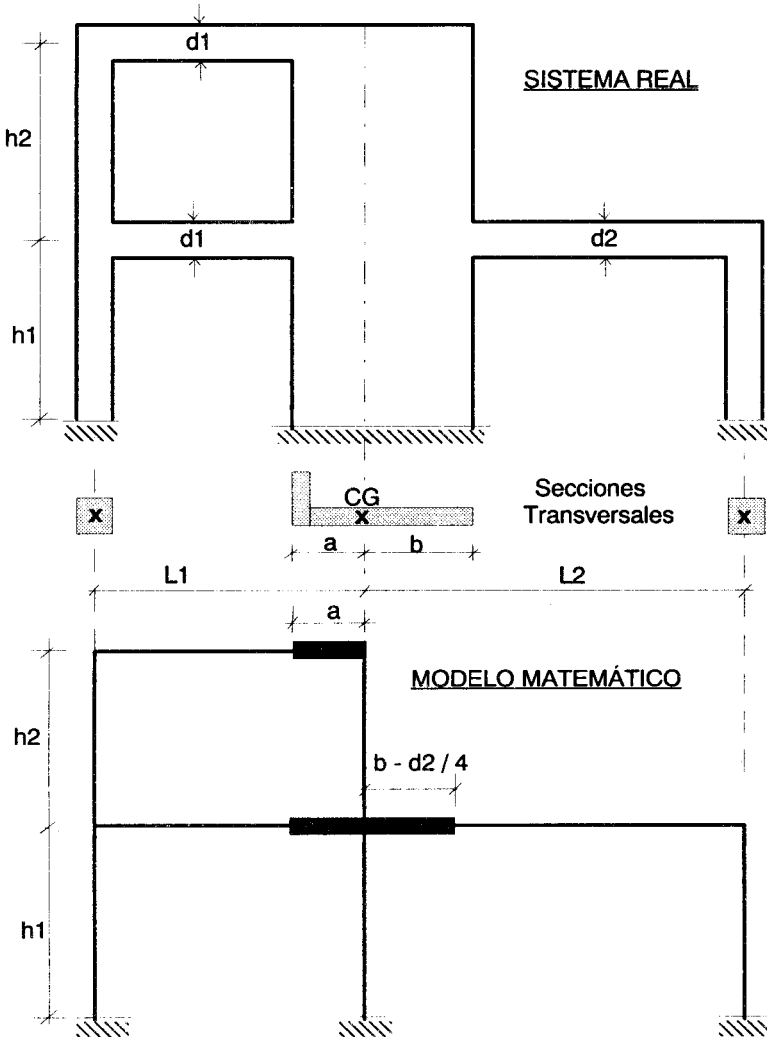
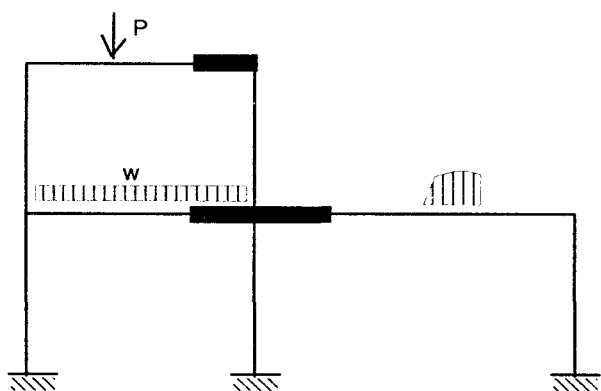


Fig. 5.28. Modelaje de un Pórtico Mixto.

5.3.5. Pórticos Mixtos Sujetos a Carga Vertical

Debido a la gran rigidez lateral que tiene la placa, por más asimetría que exista en la forma del pórtico o en la distribución de las cargas verticales, puede suponerse que el sistema no se desplaza lateralmente; asimismo, como la rigidez al giro de la placa es muy grande en comparación con la rigidez de las vigas, puede suponerse que ellas están empotradas en la placa.

De esta manera, el análisis de los pórticos mixtos sujetos a carga vertical se simplifica, pudiéndose analizar en forma independiente cada zona compuesta sólo por vigas y columnas, tal como se muestra en la Fig. 5.29. Después que se calculen las reacciones en los extremos empotrados de las vigas, podrá analizarse la placa como si se tratara de un elemento isostático, en voladizo, sujeto a cargas definidas.



PÓRTICO DE LA FIG. 5.28 SUJETO A CARGA VERTICAL

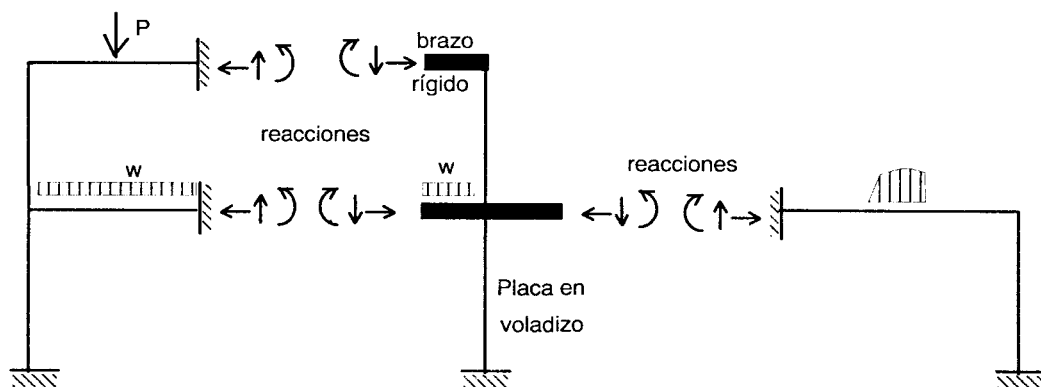


Fig. 5.29. Análisis Simplificado de los Pórticos Mixtos Sujetos a Carga Vertical.

5.3.6. Ejemplo de Aplicación

Resolver por Cross Indirecto al pórtico mixto (híbrido) de concreto armado mostrado en la Fig. 5.30. Suponer $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$, $E / G = 2.3$.

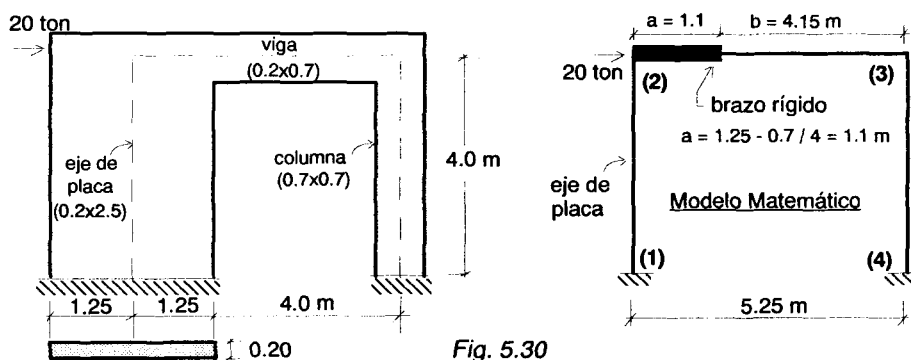


Fig. 5.30

Nota: El volumen de concreto de la placa y de la columna es similar; sin embargo, se demostrará que la placa es mucho más efectiva ante los efectos sísmicos.

Rígideces al Giro y Factores de Transporte:

$$\text{PLACA 1-2 } (I = 0.2 \times 2.5^3 / 12 = 0.2604 \text{ m}^4)$$

$$g = 1.38 (2.5 / 4)^2 = 0.54 \quad \dots \text{ sólo porque es rectangular y de concreto armado, de lo contrario emplear: } g = 6 E I f / G A L^2$$

$$f_{12} = f_{21} = (1 - 0.54) / (2 + 0.54) = 0.181$$

$$K_{12} = K_{21} = 2 \times 2 \times 10^6 \times 0.2604 \times [(2 + 0.54) / (1 + 2 \times 0.54)] / 4 = 317988 \text{ t-m}$$

$$\text{VIGA 2-3 } (I = 0.2 \times 0.7^3 / 12 = 0.005717 \text{ m}^4)$$

$$C = 4 E I / b = 4 \times 2 \times 10^6 \times 0.005717 / 4.15 = 11021 \text{ ton-m}$$

$$a / b = 1.1 / 4.15 = 0.265$$

$$A = 1 + 3 \times 0.265 = 1.795$$

$$B = 1.795 + 3 \times (0.265)^2 = 2.006$$

$$f_{23} = 1.795 / (2 \times 2.006) = 0.447$$

$$f_{32} = 1.795 / 2 = 0.897$$

$$K_{23} = 11021 \times 2.006 = 22107 \text{ ton-m}$$

$$K_{32} = 11021 \text{ ton-m}$$

COLUMNA 3-4 ($I = 0.7 \times 0.7^3 / 12 = 0.02 \text{ m}^4$)

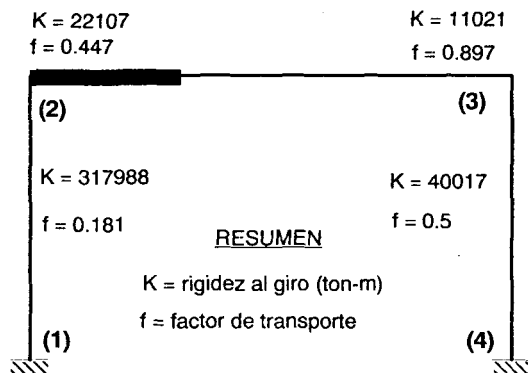
$$f_{34} = f_{43} = \frac{1}{2}$$

$$K_{34} = K_{43} = 4 \times 2 \times 10^6 \times 0.02 / 4 = 40017 \text{ ton-m}$$

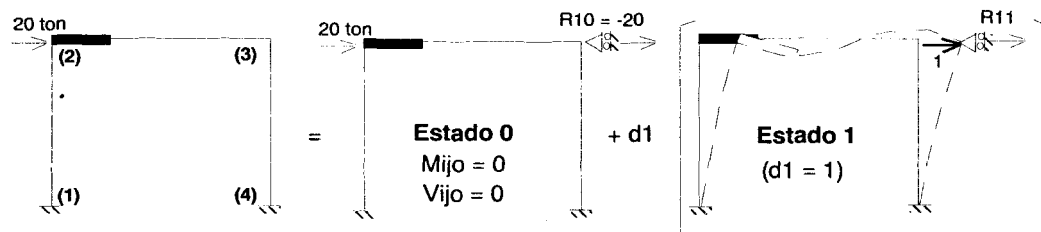
Coeficientes de Distribución de Momentos:

Nudo 2	Kij	α_{ij}
2-1	317988	0.935
2-3	22107	0.065
	340095	1.000

Nudo 3	Kij	α_{ij}
3-2	11021	0.216
3-4	40017	0.784
	51038	1.000



Cross Indirecto:



Solución del ESTADO 1

$$u_{12} = u_{21} = -6EI d / [L^2 (1 + 2g)] = -6 \times 2 \times 10^6 \times 0.2604 \times 1 / [4^2 \times (1 + 2 \times 0.54)] =$$

$$u_{12} = u_{21} = -93894 \text{ ton-m}$$

$$u_{34} = u_{43} = -6 \times 2 \times 10^6 \times 0.02 \times 1 / 4^2 = -15000 \text{ ton-m}$$

Cálculo de R_{11} , d_1 , M_{ij} y Trazado del DMF (Fig. 5.31):

Nudo	1	2		3		4
Barra	1-2	2-1	2-3	3-2	3-4	4-3
α_{ij}	0	0.935	0.065	0.216	0.784	0
f_{ij}	0.181	0.181	0.447	0.897	0.5	0.5
u_{ij}	-93894	-93894	0	0	-15000	-15000
D	0	87790	6103	3240	11760	0
T	15890	0	2906	2728	0	5880
D	0	-2717	-189	-589	-2139	0
T	-492	0	-528	-84	0	-1069
D	0	493	34	18	66	0
T	89	0	16	15	0	33
D	0	-15	-1	-3	-12	0
T	-3					-6
Mij1	-78410	-8343	8341	5325	-5325	-10162
Mij = d1 Mij1	-61.35	-6.52	6.52	4.17	-4.17	-7.95

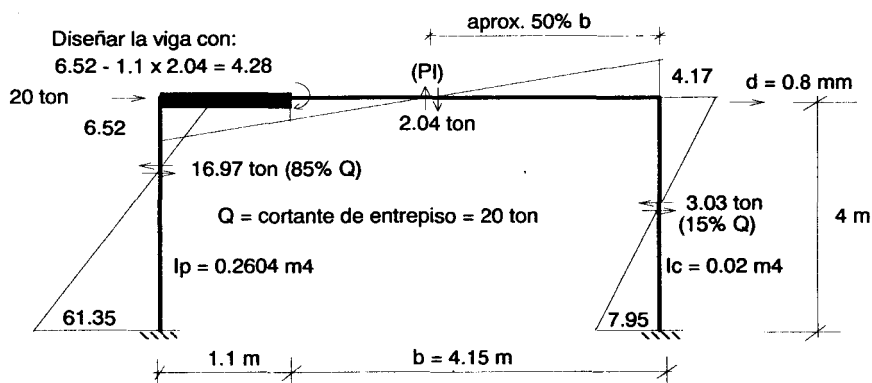
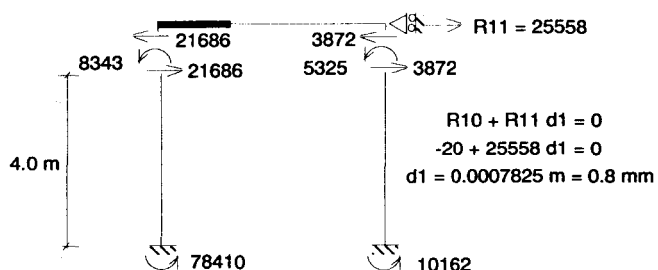


Fig. 5.31

DMF
(ton-m)

Observaciones:

- 1.- Al estructurar un edificio a veces es necesario adicionar placas con el objeto de disminuir el desplazamiento lateral (en el ejemplo se obtuvo 0.8 mm). Atenuar el desplazamiento lateral es útil para evitar choques entre edificios vecinos, o entre los bloques del mismo edificio.
- 2.- Debido a la gran rigidez lateral (K) que tienen las placas, ellas absorben un gran porcentaje del cortante de entrepiso (Q), descargando el trabajo de las columnas; en el ejemplo la placa tomó el 85% de Q. Sin embargo, esto no se refleja en la relación de momentos de inercia placa-columna (en el ejemplo $I_p / I_c = 0.26 / 0.02 = 13$), esto se debe a que la deformación por corte disminuye la rigidez lateral de la placa. Esta observación deberá tenerse presente cuando se predimensiona un edificio, donde es más conveniente repartir la fuerza cortante Q en base a la rigidez lateral de los elementos verticales (K) suponiéndolos biempotrados:

Para el ejemplo ($g_{\text{placa}} = 0.54$, $g_{\text{col.}} = 0$)

$$K_p = 12 \times 2 \times 10^6 \times 0.2604 / (4^3 \times (1 + 2 \times 0.54))$$

$$K_p = 46947 \text{ ton/m}$$

$$\text{vs. } K_p \text{ real} = 16.97 / 0.0007825 = 21687 \text{ ton/m}$$

$$K_c = 12 \times 2 \times 10^6 \times 0.02 / 4^3 = 7500 \text{ ton/m}$$

$$\text{vs. } K_c \text{ real} = 3.03 / 0.0007825 = 3872 \text{ ton/m}$$

Como se observa, las rigideces laterales reales son prácticamente la mitad de las rigideces correspondientes a las barras biempotradas; esto se debe a que las barras realmente rotan en su extremo superior. Por lo tanto, las rigideces correspondientes a las barras biempotradas, se emplearán sólo para repartir fuerzas cortantes (ver la Fig. 5.32), mas no para calcular el desplazamiento lateral.

Por equilibrio en la Fig. 5.32:

$$Q = V_p + V_c = d(K_p + K_c)$$

$$d = Q / (K_p + K_c); \text{ luego:}$$

$$V_p = K_p d = Q K_p / (K_p + K_c)$$

$$V_p = 46947 Q / (46947 + 7500)$$

Con lo cual:

$$V_p = 0.86 Q \dots \text{vs. } 0.85 Q \text{ (real)}$$

Similarmente:

$$V_c = 7500 Q / (46947 + 7500)$$

$$V_c = 0.14 Q \dots \text{vs. } 0.15 Q \text{ (real)}$$

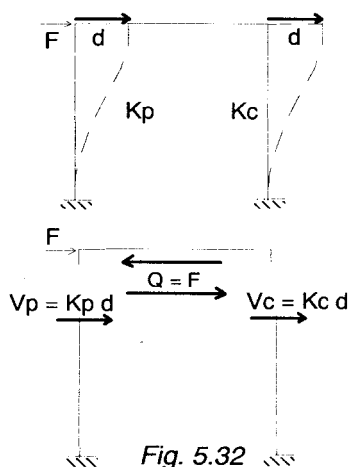
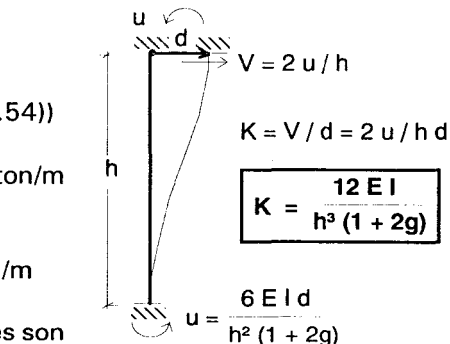
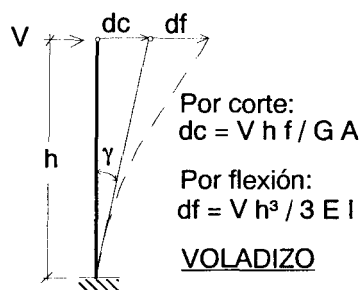


Fig. 5.32

Si se hubiese supuesto que las barras actúan en voladizo, se tendría $d = df + dc$, sabiendo que $g = 6 E I f / G A h^2$, se logra:

$$K = V / d = 3 E I / [h^3 (1 + g / 2)]$$

Lo que proporciona: $K_p = 19222 \text{ ton/m}$
 $K_c = 1875 \text{ ton/m}$.



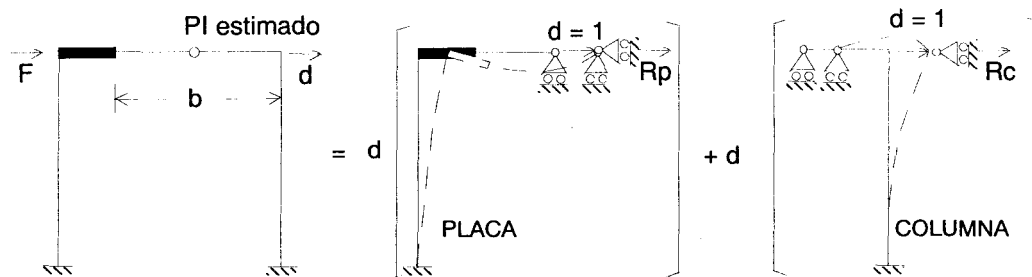
Con lo cual: $V_p = Q K_p / (K_p + K_c) = 0.91 Q$, por lo que suponiendo que las barras están biempotradas se logra mejor resultado; aunque, para ambos casos, el desplazamiento difiere considerablemente del real:

$$d (\text{barras biempotradas}) = 20 / (46947 + 7500) = 0.00037 \text{ m}$$

$$d (\text{barras en voladizo}) = 20 / (19222 + 1875) = 0.00095 \text{ m}$$

$$d (\text{real}) = 0.0007825 \text{ m}.$$

- 3.- En la parte flexible de la viga, el punto de inflexión (PI) se localiza prácticamente al centro de su longitud (50% de "b"). Esto es cierto cuando la columna vecina a la placa tiene grandes proporciones (como en este ejemplo); sin embargo, en los casos usuales, el PI trata de correrse hacia la zona menos rígida (hacia el lado de la columna), pudiendo ubicarse al 30% de "b". Esta observación se emplea en el método de Bazán, cuando se pretende analizar en forma aproximada a los pórticos mixtos. Para un sistema de un piso se tiene:



Por equilibrio: $F = F_p + F_c = d R_p + d R_c = (R_p + R_c) d = R d$

Con lo cual: $d = R^{-1} F$

Luego: $F_p = R_p d$; $F_c = R_c d$

Cuando el sistema tiene varios grados de libertad traslacionales (Fig. 5.33), puede seguirse un proceso similar, lo que conduce a las siguientes expresiones matriciales:

$$\{ F \} = \{ F_p \} + \{ F_c \} = [R_p] \{ d \} + [R_c] \{ d \} = [R] \{ d \}$$

Donde: $[R] = [R_p] + [R_c] = [R_i] = \text{matriz de rigidez lateral del sistema}$

Luego: $\{d\} = [R]^{-1} \{F\}$

Donde: $[R]^{-1}$ = matriz de flexibilidad lateral del sistema

Finalmente, las fuerzas que absorben la placa y la columna serán:

$$\{F_p\} = [R_p] \{d\} \quad \{F_c\} = [R_c] \{d\}$$

Como se observa, será cuestión de calcular la matriz de rigidez lateral $[R_i]$ de cada eje vertical (placa o columna), lo que se puede lograr aplicando el método de Cross (sólo con grados de libertad rotacionales). Por ejemplo, para calcular la segunda columna de la matriz de rigidez lateral del eje vertical mostrado en la Fig. 5.34, se tendrá:

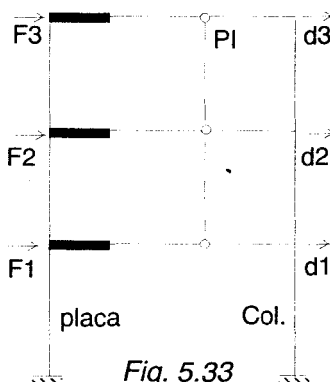
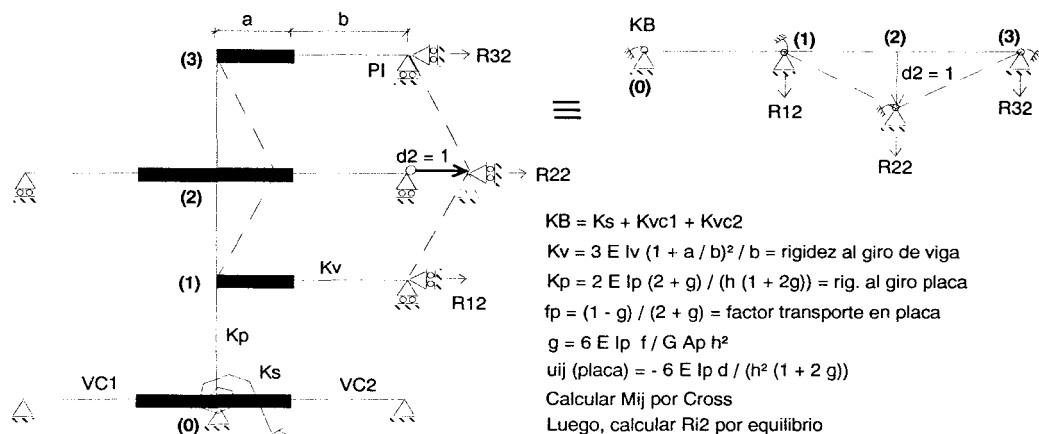


Fig. 5.33



NOTA: Para columnas $a = 0$. Para base empotrada $KB = \infty$. Para base articulada $KB = 0$

Fig. 5.34. Cálculo de la Segunda Columna de la Matriz de Rigidez Lateral $\{R_{i2}\}$ en un Eje Vertical (Columna o Placa) de 3 Niveles.

El resto de columnas de la matriz de rigidez lateral ($\{R_{i1}\}$ y $\{R_{i3}\}$), correspondientes al sistema mostrado en la Fig. 5.34, se obtienen liberando los niveles 1 y 3, independientemente, siguiendo el proceso indicado, lo que conduce para cada eje vertical a:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \text{ simétrica respecto a la diagonal}$$

Cabe señalar que en los años 70 se aplicaba este procedimiento para analizar sísmicamente, por computadora, a los edificios elevados.

5.3.7. Albañilería Armada y Confinada. Interacción Tabique-Pórtico

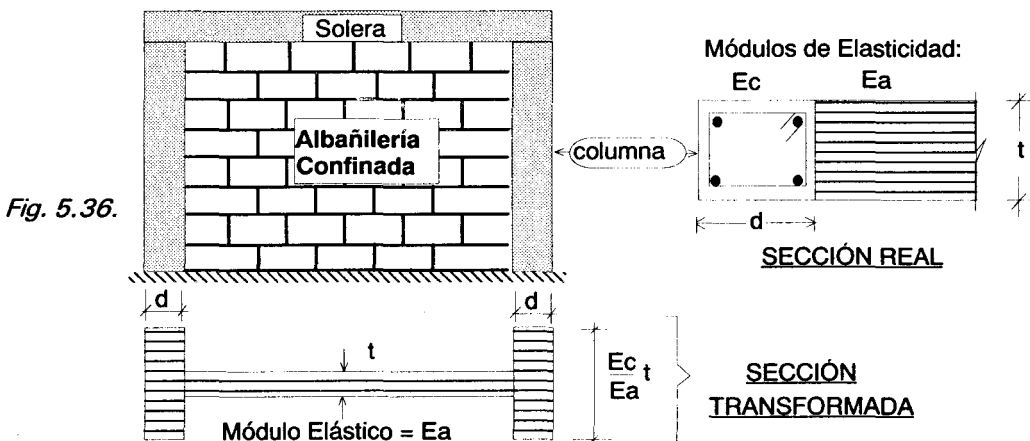
Uno de los sistemas estructurales más empleado en nuestro medio para la solución de los edificios multifamiliares de mediana altura (máximo 5 pisos), es el muro de albañilería confinada por elementos de concreto armado; otro sistema, menos usado, es la albañilería armada interiormente (Fig. 5.35), compuesta por bloques que presentan alvéolos verticales en cuyo interior se aloja el refuerzo vertical, mientras que el refuerzo horizontal se coloca ya sea en las juntas de mortero o en las cavidades horizontales del bloque.



Fig. 5.35. Sección Transversal de un Muro Armado.

En cambio, los tabiques son empleados como elementos separadores de ambientes en los edificios aporricados. Generalmente, los tabiques son hechos de albañilería, por las buenas propiedades térmica, acústica e incombustible que tiene este material. Puesto que tanto los tabiques como los muros confinados se encuentran bordeados por elementos de concreto armado, es necesario saber (para poder distinguirlos) que su comportamiento ante las cargas sísmicas y verticales es totalmente diferente; la diferencia principal radica en la secuencia constructiva que se sigue en cada sistema.

En el caso de los Muros Confinados, primero se construye la albañilería, luego se vacian las columnas y, finalmente, se vacian las vigas soleras en conjunto con la losa del techo. Esta secuencia hace que se desarrolle una gran adherencia en la interfase albañilería-concreto y que, por lo tanto, el sistema debe ser tratado como un elemento compuesto por dos materiales, donde es aplicable el criterio de la sección transformada (Fig. 5.36); asimismo, al desencofrarse finalmente el techo, el muro será portante de carga vertical.



Para el caso de los tabiques, la secuencia constructiva es al revés. Esto es, primero se construyen las columnas, luego se vacian las vigas en conjunto con la losa del techo, posteriormente, se desencofra la losa, con lo cual, el pórtico de concreto armado será el sistema portante de carga vertical; finalmente, se rellenan los paños con tabiques de albañilería, usando un mortero de relleno en la interfase albañilería-concreto, junta que es demasiado débil, por lo que cuando el edificio se encuentra sujeto a cargas sísmicas, el pórtico se separa del muro interactuando ambos elementos sólo en sus esquinas diagonalmente opuestas (Fig. 5.37).

Por la razón mencionada en el párrafo anterior, se acostumbra modelar a los tabiques reemplazándolos por un puntal de albañilería, que actúa siempre en compresión. El ancho del puntal equivalente " w_o " se toma como la longitud de la diagonal dividida entre cuatro; aunque, en la Ref. 8 se especifica otros valores que contemplan las propiedades tanto del tabique como las del pórtico de concreto armado.

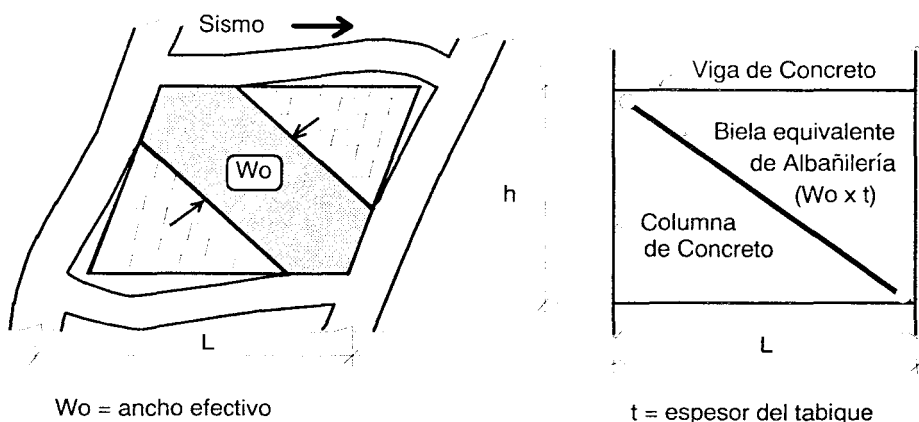


Fig. 5.37. Modelaje de Pórticos con Tabiques de Albañilería.

En las Figs. 5.38 y 5.39 se presentan dos estructuras muy similares; sin embargo, el modelo matemático de ambos sistemas será diferente, dependiendo de cómo haya sido construido el muro de albañilería:

- El modelo estructural de los pórticos mixtos compuestos por muros confinados o armados, portantes de carga vertical, es exactamente similar al caso de los pórticos mixtos que contienen placas de concreto armado, con la diferencia que los módulos elásticos (E , G) de los muros corresponden al material albañilería; por lo que si el muro es confinado, debe reemplazarse la columna de confinamiento por un área equivalente de albañilería. Ver la Fig. 5.38.
- Si el tabique de albañilería no ha sido aislado (haciéndolo "flotante") de la estructura aporticada, se producirá la interacción pórtico-tabique, que se contempla en el modelo estructural reemplazando al tabique por un puntal equivalente de albañilería, dirigido siempre en sentido contrario al de la carga lateral aplicada. Ver la Fig. 5.39.

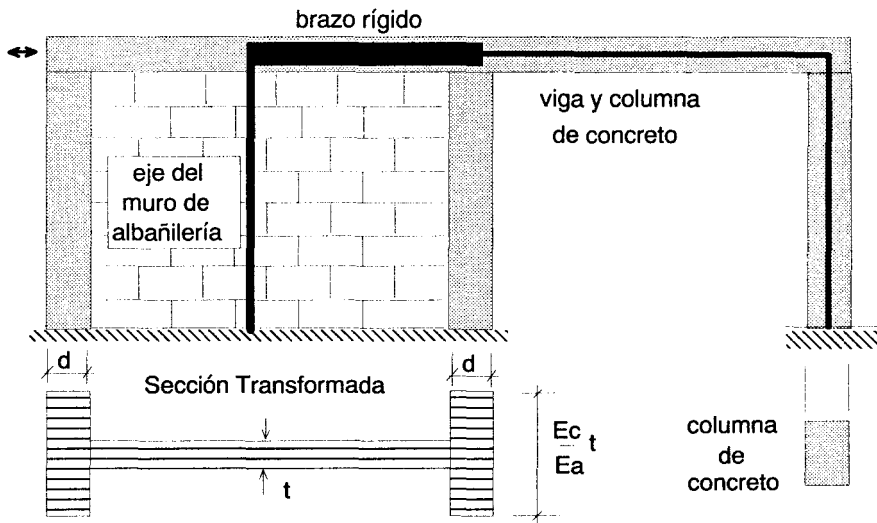


Fig. 5.38. Modelo de un Pórtico Mixto con Muro Confinado.

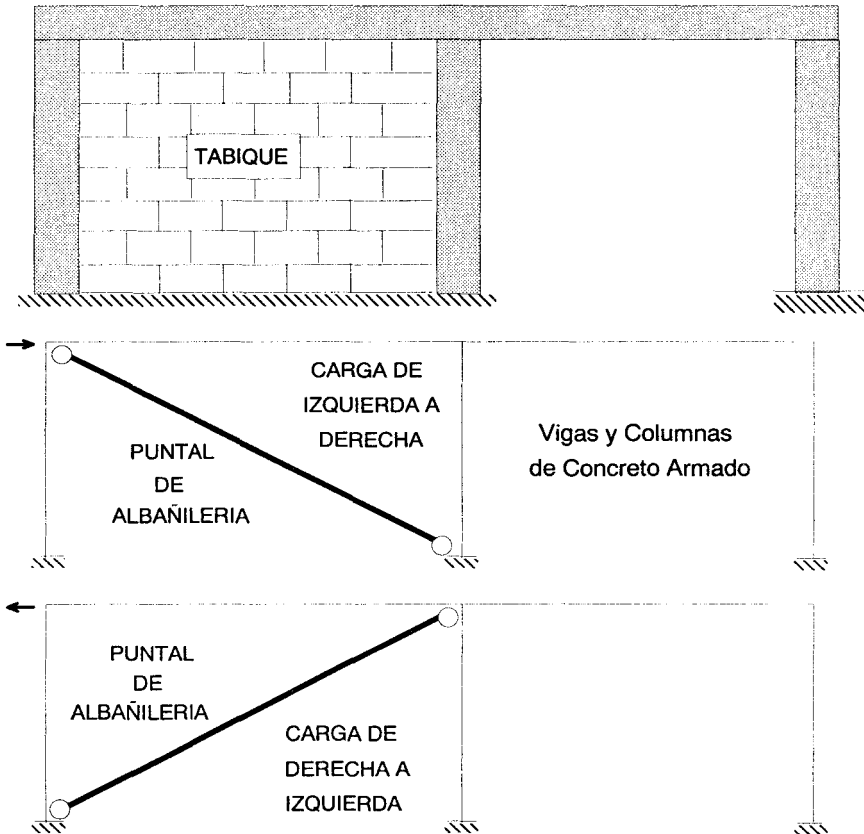
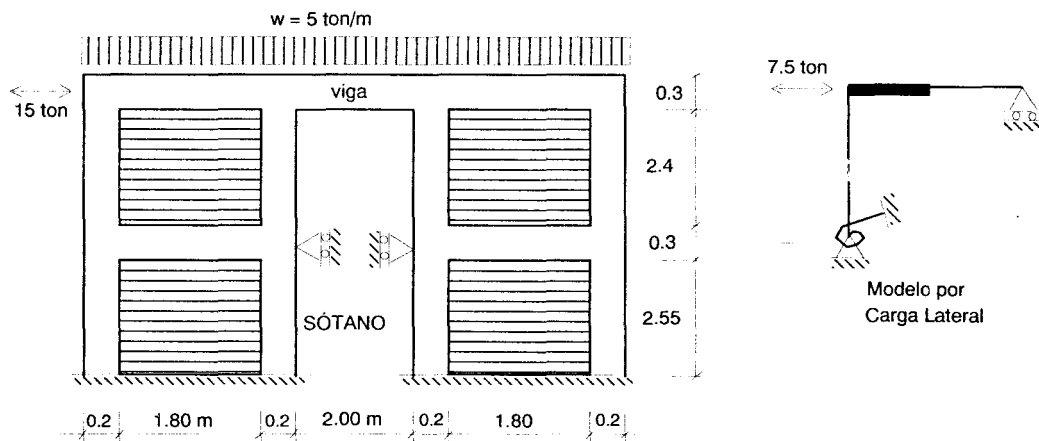


Fig. 5.39. Modelo de un Pórtico con Tabique de Albañilería.

5.3.8. Problemas Propuestos

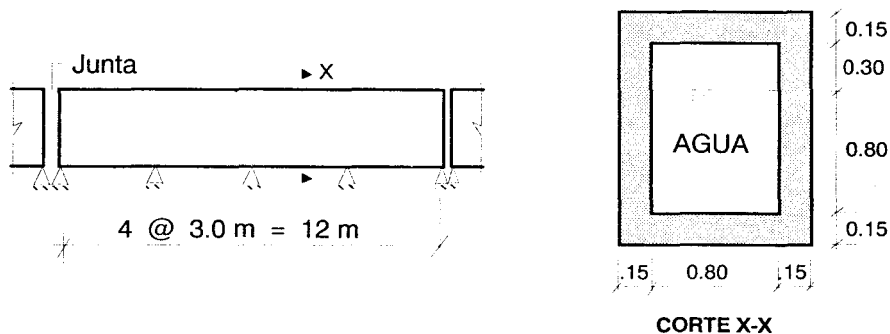
- 1.- Dibuje la envolvente de momento flector para la viga (zona flexible) que conecta a los muros de Albañilería Confinada. Se considerará 3 hipótesis de carga: a) Carga Vertical; b) Carga Vertical + Carga Lateral; y, c) Carga Vertical - Carga Lateral. El análisis por carga lateral se hará mediante el método de Cross Indirecto, mientras que por carga vertical se asumirá que la viga está biempotrada en los muros.

Suponer: Espesor = 0.15 m $E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$ $E_a = 400,000 \text{ ton/m}^2$
 $E_a / G_a = 2.5$



Nota: La estructura corresponde a un pórtico interior de un edificio con sótano. Al estar bordeado perimetralmente el sótano por placas de concreto (muy rígidas lateralmente), se asumirá que el techo del sótano no se desplaza horizontalmente.

- 2.- La figura muestra un canal cerrado hecho de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$, $E/G = 2.3$, $\gamma = 2.4 \text{ ton/m}^3$). Incluyendo la deformación por corte en el análisis, dibuje el DMF en el sentido longitudinal del canal.



- 3.- La figura muestra un pórtico de concreto armado interactuando con un alféizar de albañilería sumamente rígido, típico de las edificaciones escolares. Aplicando el método de Cross Indirecto, calcule la fuerza cortante que absorbe cada columna.

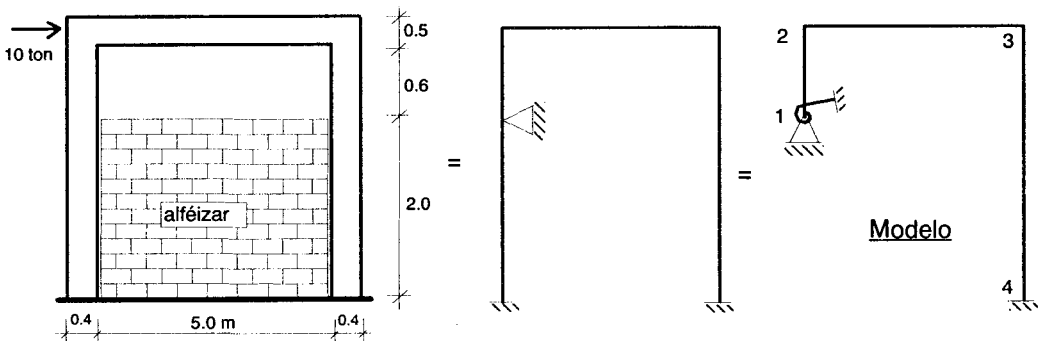
Nota: En la columna corta 1-2 deberá incluirse los efectos de la deformación por fuerza cortante.

Datos: $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$
 $E / G = 2.3$

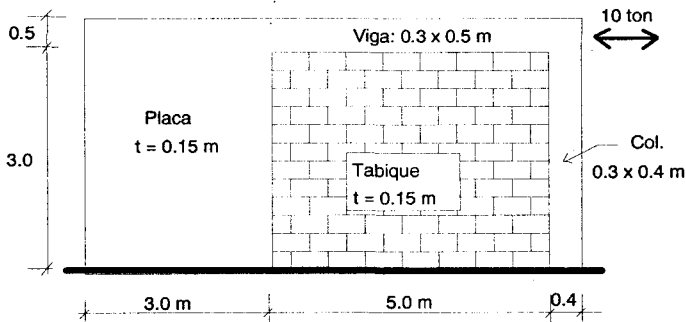
columnas: $0.60 \times 0.40 \text{ m}$
 viga: $0.30 \times 0.50 \text{ m}$

Resultado: $V_{12} = 8.75 \text{ ton}$

$V_{34} = 1.25 \text{ ton}$



- 4.- Dibujar el modelo matemático (+ XX y -XX) correspondiente al sistema mostrado.



5.4. Efectos de la Deformación Axial en Barras Prismáticas

Cualquiera que sea el caso por analizar, se considerará que las barras serán especialmente diseñadas para evitar problemas de pandeo; es decir, sólo se contemplarán los efectos que pueden ocasionar los alargamientos o acortamientos de las barras producidos por la carga axial.

Se estudiarán dos casos: 1) Armaduras con Nudos Rígidos; y,
2) Pórticos de Edificios de Concreto Armado.

5.4.1. Armaduras con Nudos Rígidos

Por la manera como se conectan las barras metálicas en los nudos, soldándolas o empernándolas sobre planchas de conexión (Fig. 5.40), de manera que sus ejes sean concéntricos para evitar excéntricas de la carga axial, puede afirmarse que los nudos no son rótulas sino que más bien son nudos rígidos. Más aún, cuando la armadura es de concreto armado, las uniones son monolíticas.

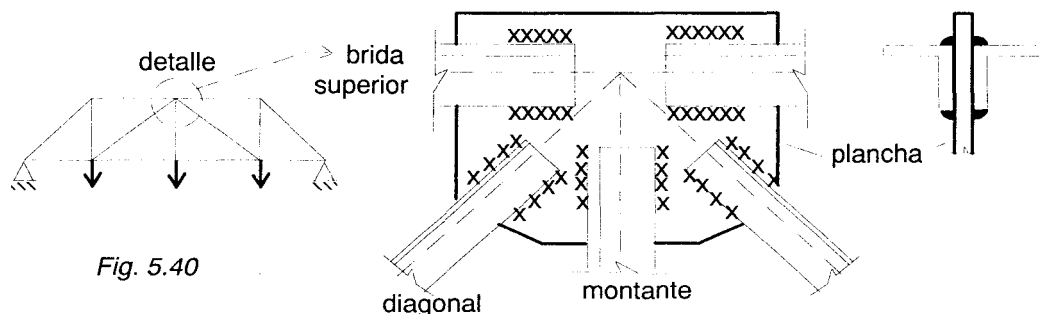


Fig. 5.40

Sin embargo, al analizar los tijerales se supone que los nudos son rótulas perfectas. Esto se debe a que, generalmente, las barras son esbeltas (baja relación I/L) y a que las cargas actúan preferentemente sobre los nudos (usualmente se asume que la mitad del peso propio de las barras está concentrada en sus extremos), por lo que los momentos de empotramiento (u_{ij}) son prácticamente nulos.

Todo ello conduce a que los momentos en los extremos de las barras (M_{ij}) sean de carácter secundario, esto puede apreciarse cuando se aplica las ecuaciones de pendiente y deflexión en una barra $i-j$: $M_{ij} = u_{ij} + 2E(I/L)(2\theta_i + \theta_j - 3\delta_{ij}/L) = 0$, lo que también conlleva a que las fuerzas cortantes sean nulas ($V_{ij} = 0$).

Por ejemplo, si se asumiese que la brida superior del tijeral metálico ($E = 2100 \text{ ton/cm}^2$) mostrado en la Fig. 5.40 estuviese constituido por 2 Ls de $3" \times 3" \times \frac{1}{2}"$ ($I = 100 \text{ cm}^4$), se tendría para una luz $L = 4 \text{ m}$ que: $EI/L = 2100 \times 100 / 400 = 525 \text{ ton-cm} = 5.25 \text{ ton-m}$; en cambio, si la barra fuese de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$), con una sección de $30 \times 40 \text{ cm}$ ($I = 0.0016 \text{ m}^4$), se tendría: $EI/L = 2'000,000 \times 0.0016 / 4 = 800 \text{ ton-m}$, 150 veces mayor que la correspondiente a la barra metálica, por lo que en la barra de concreto no puede despreciarse los efectos de la deformación por flexión.

En conclusión, los momentos en los extremos de las barras de una armadura son importantes sólo cuando ellas no son esbeltas (por ejemplo: en las barras que se emplean para las armaduras de los puentes), en cuyo caso, debido a lo extenso que resulta efectuar un análisis manual, se recomienda emplear un programa de computación que resuelva pórticos planos (puede usarse el programa EDIFICIO, ver el problema 3 del acápite 8.4.3), diseñando las barras a flexocompresión, flexotracción y corte.

5.4.2. Pórticos de Edificios de Concreto Armado

Los efectos de la deformación axial repercuten significativamente sobre los esfuerzos cuando el edificio es elevado (más de 10 pisos); sin embargo, también podrían ser importantes en los edificios de un piso, cuando la carga se concentra hacia el lado de una de las columnas, por ejemplo, en una nave industrial con puente grúa (Fig. 2.1).

Cabe mencionar que la losa del techo (aligerado o losa maciza) es un elemento axialmente rígido y como ésta se vacía simultáneamente con las vigas, se creará un monolitismo entre ambos elementos, por lo cual, como debe existir compatibilidad de deformación axial (Fig. 5.41), las vigas tampoco se deformarán axialmente. En cambio, la losa no es rígida ante las cargas perpendiculares a su plano (peso propio, sobrecarga, etc.), por lo que los elementos verticales (columnas, placas, muros de albañilería, etc.) pueden deformarse axialmente.

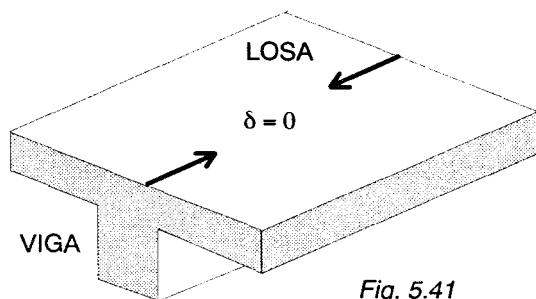


Fig. 5.41

De esta manera, cuando se emplea un programa de cómputo que contempla tres grados de libertad por nudo, se estaría cometiendo error, en vista que las vigas no se deforman axialmente. Una manera de atenuar este error consiste en amplificar el área axial de las vigas, empleando un factor (FA) del orden de 10, pero, para las barras verticales, este factor debe ser 1 (Fig. 5.42).

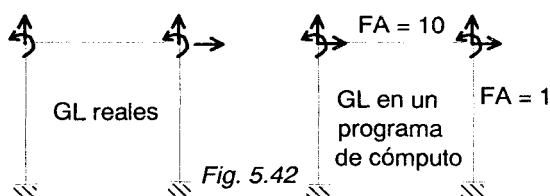


Fig. 5.42

Con relación a las cargas de peso propio, éstas constituyen un gran porcentaje de la carga gravitacional total; pero, estas cargas no actúan de una sóla vez, sino que más bien lo hacen paulatinamente conforme el edificio va construyéndose. En cambio, las sobrecargas se aplican después que el edificio terminó de construirse; asimismo, se supone que la carga sísmica actúa sobre el edificio ya terminado, debido a que es poco probable que ocurra un terremoto durante el proceso de construcción.

Cabe mencionar que en los edificios elevados la no consideración del proceso constructivo en el cálculo de los esfuerzos puede conducir a serios errores, tal como se explicará

más adelante. De este modo, cuando se analiza un edificio elevado debería desdoblarse el problema en dos partes:

CASO A.- Solicitación Obrando Sobre la Estructura ya Construida (sobrecarga, sismo, etc.).

CASO B.- Solicitación Obrando Sobre la Estructura en su Etapa Constructiva (peso propio, etc.).

Para ambos casos, los efectos de la deformación axial de las columnas se dejan sentir en mayor grado sobre las vigas extremas del pórtico, en vista que éstas estarán sujetas a los mayores desplazamientos verticales relativos entre sus extremos (Δ , Fig. 5.43). Este problema puede atenuarse si el área de las columnas fuese proporcional a la magnitud de su carga axial, en cuyo caso, los nudos extremos de las vigas bajarían la misma cantidad ($\delta = P h / E A$), con lo cual, prácticamente no existiría desplazamiento vertical relativo.

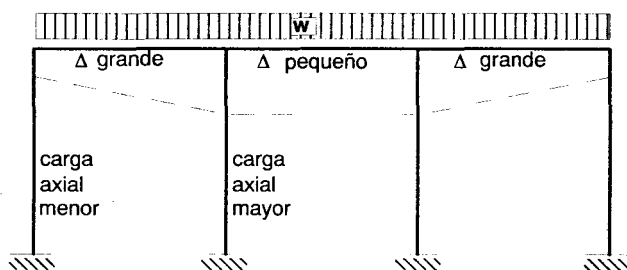


Fig. 5.43. Configuración Deformada por Carga Axial.

Lo propio ocurre cuando los pórticos están sujetos a carga sísmica (Fig. 5.44); en este caso, la carga axial en las columnas externas es elevada, mientras que en las columnas internas esta carga es pequeña al tratar de autocancelarse las fuerzas cortantes que provienen de las vigas que están ubicadas en ambos lados de la columna en análisis.

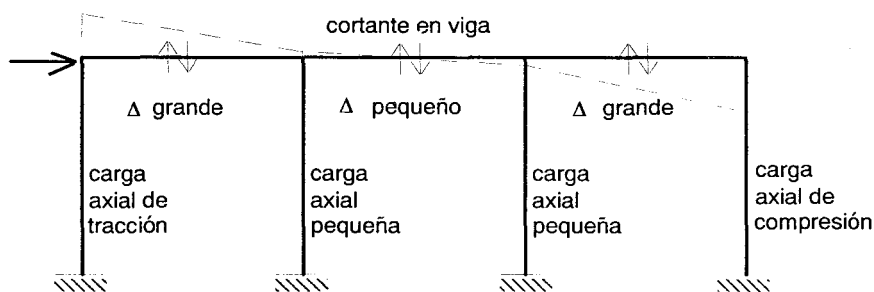


Fig. 5.44. Configuración Deformada por Carga Axial.

CASO A.- Solicitación Obrando Sobre la Estructura ya Construida (Sobrecarga, Sismo, etc.).
Ejemplo.

Para solucionar manualmente este problema en las estructuras pequeñas, puede aplicarse el método de Cross Indirecto (Fig. 5.45), aunque, como ya se ha dicho, en estas estructuras el efecto de la deformación axial sobre los esfuerzos es despreciable, a no ser que exista concentración de carga hacia el lado de una de las columnas.

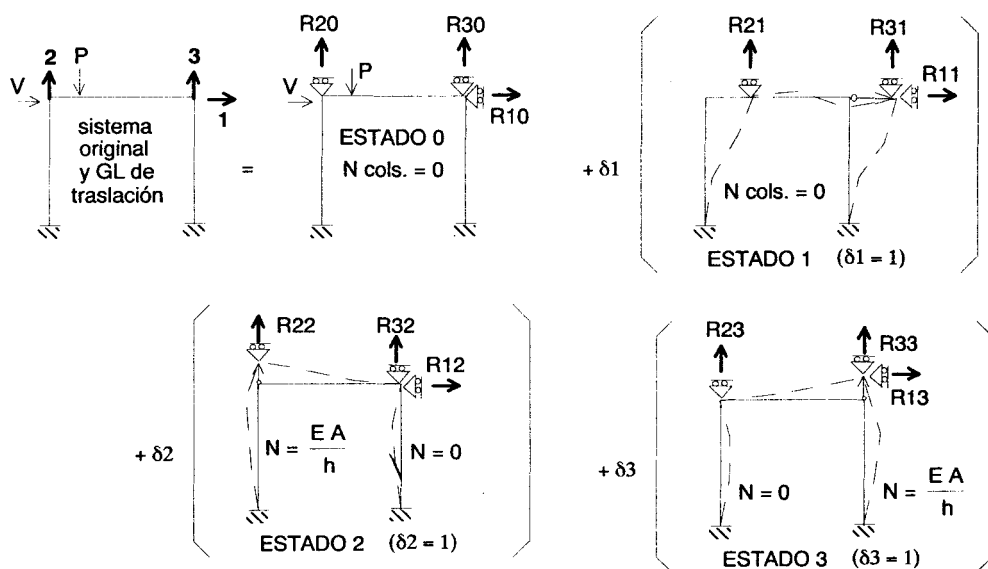


Fig. 5.45. CASO A. Aplicación del Método de Cross Indirecto.

Puesto que el método de Cross Indirecto resulta muy laborioso de aplicar en estructuras de mayor envergadura, se recomienda, para fines de un análisis manual, seguir el siguiente proceso aproximado:

Proceso Aproximado de Corrección de Momentos en Vigas por Efectos de la Deformación Axial de las Columnas. CASO A (Cargas sobre el Edificio Construido)

El proceso aproximado consiste de los siguientes pasos:

- 1.- Estimar la carga axial acumulada (P) mediante un metrado de cargas.
- 2.- Calcular la deformación axial neta $D = P h / E A$ de cada columna, y referirla al suelo para obtener el desplazamiento vertical total de los nudos.
- 3.- Hallar el desplazamiento relativo entre los extremos de las vigas (d_{ij}) y calcular los momentos de empotramiento $u_{ij} = -6 E I d_{ij} / L^2$; luego, resolver la viga por Cross empleando el modelo simplificado del ACI.

EJEMPLO. Evaluar la corrección de momentos por deformación axial de las columnas, para la viga del segundo nivel del pórtico mostrado en la Fig. 5.46. Se hace notar que se está trabajando con una columna de sección pequeña (25x25 cm; la sección mínima permitida por el ACI es 30x30 cm) y con un peralte de viga elevado (75 cm; para $L = 6$ m, pudo emplearse un peralte de 60 cm), con el objeto de magnificar los efectos de la deformación axial.

Datos:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$K_o = 0.001 \text{ m}^3$$

$$\text{Vigas: } 0.25 \times 0.75 \text{ m}$$

$$I_v = 0.25 \times 0.75^3 / 12 = 0.008789 \text{ m}^4$$

$$k_v = I / L K_o = 1.46$$

$$\text{Columnas: } 0.25 \times 0.25 \text{ m}$$

$$A = 0.0625 \text{ m}^2, I = 0.0003255 \text{ m}^4$$

$$k_c = I / h K_o = 0.11$$

Rigidez axial de una columna:

$$K_a = E A / h = 2 \times 10^6 \times 0.0625 / 3 = 41667 \text{ ton/m}$$

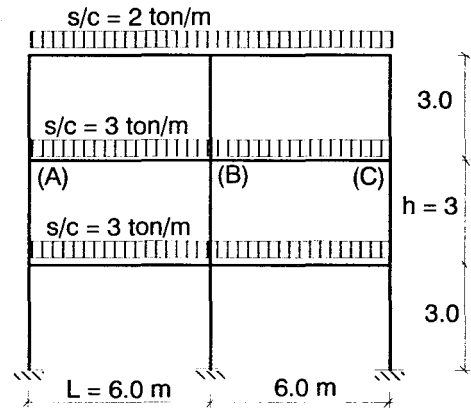


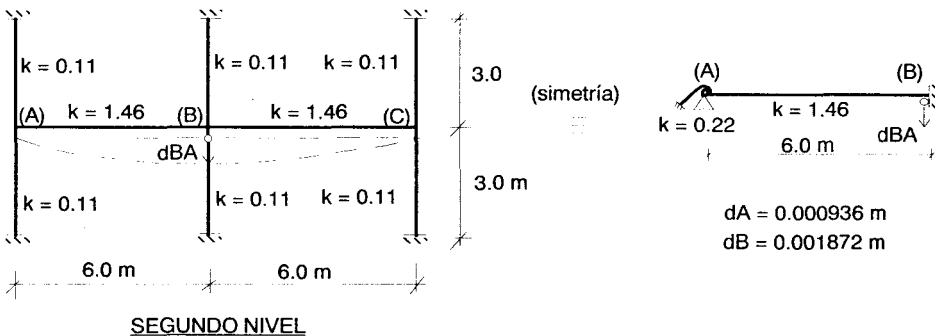
Fig. 5.46

Denominando: P_n = Carga axial existente en un nivel de la columna externa.
 P_a = Carga axial acumulada en la columna externa.
 D_t = Desplazamiento vertical total (respecto al suelo).

Se tendrá:

Columna Externa					Columna Interna
Nivel (ton)	P_n (ton)	P_a (m)	$D = P_a / K_a$ (m)	D_t (m)	$D_t = 2 D_t (\text{col. ext.})$
3	6	6	0.000144	0.001080	0.002160
2	9	15	0.000360	0.000936	0.001872
1	9	24	0.000576	0.000576	0.001152

Nota: como la columna interna tiene el doble de carga que la externa y la misma sección transversal, los desplazamientos correspondientes serán el doble.



Con lo cual, el desplazamiento relativo resulta: $d_{BA} = d_B - d_A = + 0.000936 \text{ m}$, lo que produce los siguientes momentos de empotramiento:

$$u_{AB} = u_{BA} = -6 E I v d_{BA} / L^2 = -6 \times 2 \times 10^6 \times 0.008789 \times 0.000936 / 6^2 = -2.74 \text{ ton-m}$$

Aplicando Cross:

EFECTOS DE DEF. AXIAL

Nudo barra	A A-B	B B-A
α_{ij}	0.87	0.00
u_{ij} (dsc)	-2.74	-2.74
D	2.38	0.00
T	0.00	1.19
Mij (dsc)	-0.36	-1.55

PORS/c ($w = 3\text{t/m}$). SIN DEF. AXIAL

Nudo barra	A A-B	B B-A
α_{ij}	0.87	0.00
u_{ij} (w)	-9.00	9.00
D	7.83	0.00
T	0.00	3.91
Mij (w)	-1.17	12.91

Los momentos totales resultan (considerando la deformación axial y la sobrecarga de 3 ton/m): $M_{AB} = -0.36 - 1.17 = -1.53 \text{ ton-m}$ y $M_{BA} = -1.55 + 12.91 = 11.36 \text{ ton-m}$. Estos valores difieren de los obtenidos mediante la solución matricial (programa EDIFICIO, Fig. 5.47), pero, principalmente, esto se debe a que los efectos hiperestáticos producidos por los momentos flectores en las vigas son importantes (para este caso las columnas tienen poca rigidez de flexión con relación a las vigas, haciendo que M_{AB} sea mucho menor que M_{BA}) y modifican sustancialmente a las cargas del metrado. Para mejorar este hecho, podría seguirse un proceso iterativo, corrigiendo las cargas del metrado contemplando esta vez los momentos flectores de las vigas.

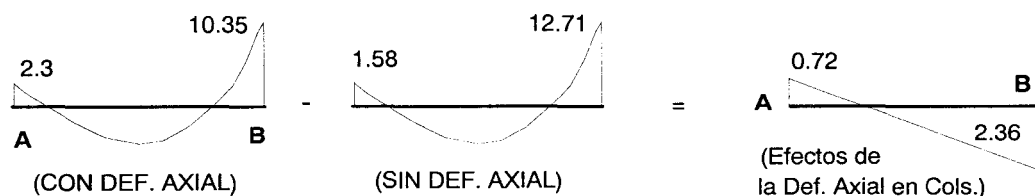


Fig.5.47. Solución Matricial del Pórtico de la Fig.5.46. DMF (ton-m). Viga del Nivel 2.

CASO B.- Solicitación Obrando Sobre la Estructura en su Etapa Constructiva

Las cargas de peso propio no actúan de una sola vez sobre la estructura ya construida, sino que lo hacen en forma paulatina (Fig. 5.48) conforme el edificio va construyéndose.

Por otro lado, los programas de cómputo no consideran el efecto del Proceso Constructivo, por lo cual, se presentan diagramas de momentos en los pisos superiores de los edificios elevados (más de 10 pisos) que están fuera de la realidad; nótese en la Fig. 5.47 cómo la mayor deformación axial de la columna central "jala" al diagrama de momento flector, aumentando M_{AB} y decreciendo M_{BA} con respecto al caso en que no se considere la deformación axial de las columnas.

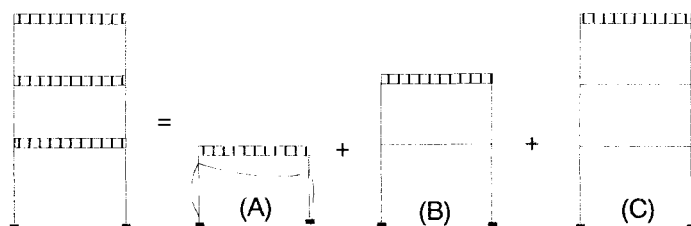
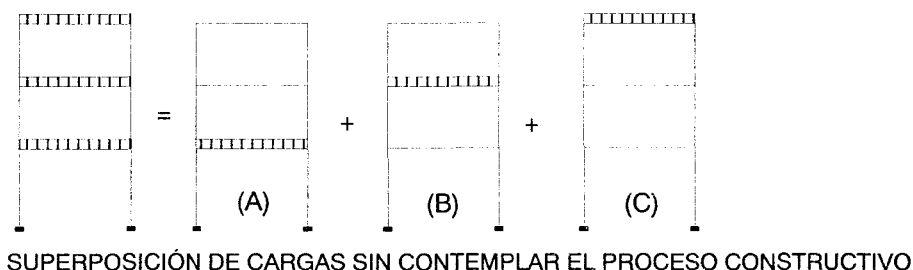


Fig. 5.48. Superposición de Cargas Considerando o No el Proceso Constructivo.

En la Fig. 5.48, puede apreciarse que el único estado coincidente es el último (C). En los demás estados, las deformaciones (rotaciones y desplazamientos verticales) producidas por los pisos construidos no generan esfuerzos sobre los pisos superiores que están recién por construirse. Esto se debe a dos razones:

- 1.- Las columnas se construyen a plomo (verticalmente), con lo cual, la rotación del nudo inmediato inferior se corrige; y,
- 2.- Las vigas se encofran procurando mantener su horizontalidad, esto es, la pérdida de altura producto de la deformación axial de la columna, se compensa.

Aplicar la superposición de estados (Fig. 5.48) para contemplar el proceso constructivo sería muy laborioso, incluso empleando programas de pórticos planos, ya que los modelos matemáticos cambian de uno a otro estado.

De esta manera, se recomienda seguir el siguiente proceso aproximado (utilizado por el Programa PROCONST, ver el acápite 5.4.3), ilustrado mediante el mismo pórtico anterior (Fig. 5.46), solucionando a la viga del segundo nivel, pero, esta vez se va a suponer que las cargas actuantes son cargas permanentes (cp) de la misma magnitud que las sobrecargas anteriores, con la finalidad de comparar resultados.

Método Aproximado Para Contemplar el Proceso Constructivo. Ejemplo, CASO B

Datos:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$K_o = 0.001 \text{ m}^3$$

$$\text{Vigas: } 0.25 \times 0.75 \text{ m}$$

$$I_v = 0.25 \times 0.75^3 / 12 = 0.008789 \text{ m}^4$$

$$k_v = I / L K_o = 1.46$$

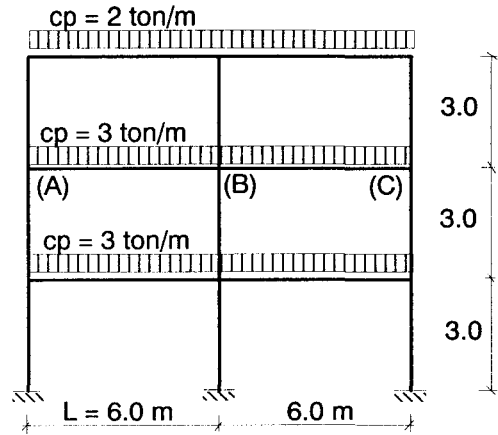
$$\text{Columnas: } 0.25 \times 0.25 \text{ m}$$

$$A = 0.0625 \text{ m}^2, I = 0.0003255 \text{ m}^4$$

$$k_c = I / h K_o = 0.11$$

Rigidez axial de una columna:

$$K_a = EA / h = 41667 \text{ ton/m}$$



Luego de efectuar el metrado de cargas por nivel (P_i), se procede con la evaluación de los desplazamientos verticales absolutos de cada eje de columna (Fig. 5.49); para la columna externa se tendrá:

$P_i = \text{Carga del Metrado por Nivel (ton)}$

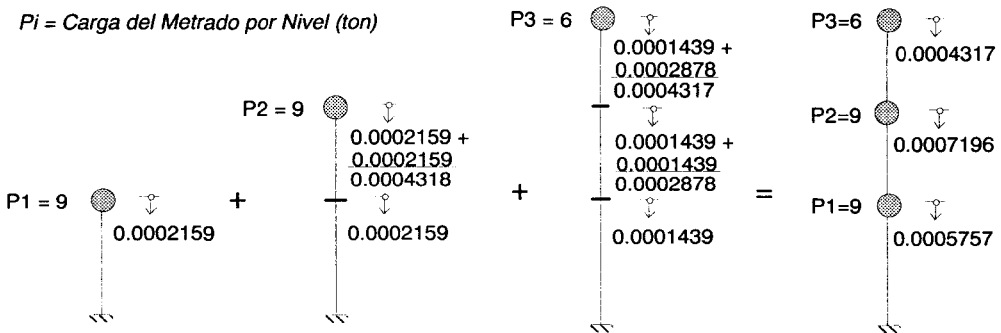


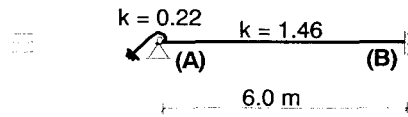
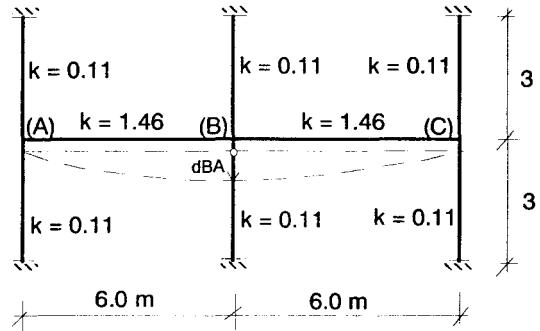
Fig. 5.49. Cálculo de Desplazamientos (m) Respecto al Suelo en la Columna Externa.

En la Fig. 5.49 puede notarse que el tercer nivel se desplaza verticalmente menos que el segundo nivel. Asimismo, como la columna interna tiene el doble de carga que la externa y la misma sección transversal, su desplazamiento a la altura del segundo nivel será $2 \times 0.0007196 = 0.0014392 \text{ m}$; con lo cual: $d_{BA} = 0.0014392 - 0.0007196 = 0.0007196 \text{ m}$.

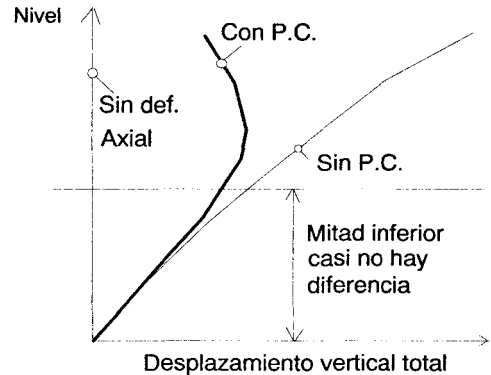
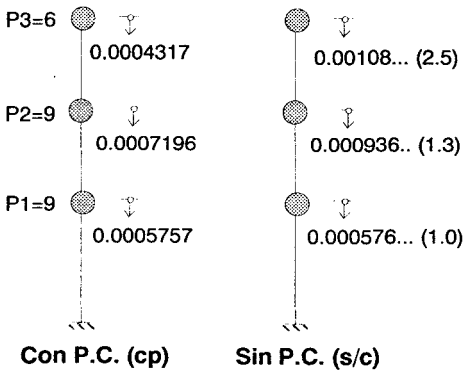
$$\text{De esta manera: } u_{AB}(\text{dcp}) = -6 \times 2 \times 10^6 \times 0.008789 \times 0.0007196 / 6^2 = -2.11 \text{ ton-m.}$$

Aplicando Cross se tendrá:

EFECTOS DEL PROC.CONST.		
Nudo	A	B
barra	A-B	B-A
α_{ij}	0.87	0.00
u_{ij} (dcp)	-2.11	-2.11
D	1.84	0.00
T	0.00	0.92
Mij (dcp)	-0.27	-1.19
Mij (dsc)	-0.36	-1.55



En este caso, no hay mayor diferencia entre considerar (Mij (carga permanente)) o no (Mij (sobrecarga)) el efecto del proceso constructivo; sin embargo, esta diferencia se acentúa en los niveles superiores de los edificios elevado, tal como se ilustra en la Fig. 5.50.



Nota: P.C. = Proceso Constructivo

Fig. 5.50. Comparación de Desplazamientos (m) Verticales en la Columna Externa.

Cuando se hace uso de un programa de cómputo para resolver pórticos planos, previamente debe calcularse unas cargas equivalentes "F" (positivas cuando están dirigidas hacia abajo), que aplicadas de una sola vez sobre la estructura ya construida, reproduzcan los desplazamientos generados durante el proceso constructivo.

Considerando que los desplazamientos generados por el proceso constructivo (d (PC)) han sido anteriormente calculados (Fig. 5.49), y tomando como ejemplo a la columna externa del pórtico en estudio (Fig. 5.46), el proceso tabulado (seguido por el programa PROCONST) para calcular "F" (en toneladas) es el siguiente:

CARGAS EQUIVALENTES "F" EN EL EJE DE COLUMNA EXTERNA (ton)				
Nivel	d (PC) (m)	d relativo $dr = d_n - d_{n-1}$	P acumulado $P = K_a dr$	F nivel = $P_n - P_{n+1}$
3	0.0004317	-0.0002879	-12	-12
2	0.0007196	0.0001439	6	18
1	0.0005757	0.0005757	24	18

Como la columna interna tiene el doble de desplazamiento y la misma rigidez axial que la externa, la fuerza equivalente ("F") respectiva será el doble; en caso contrario, habría que elaborar otra tabla similar para analizar ese eje de columna.

Por otro lado, las cargas aplicadas en las vigas producen fuerzas cortantes que se transmiten como carga axial sobre las columnas, por lo que si se aplican en simultáneo con las cargas equivalentes ("F") modificarían los desplazamientos generados por el proceso constructivo; de esta manera, esas fuerzas cortantes deben eliminarse agregando cargas contrarias en los nudos, tal como se ilustra en la Fig. 5.51.

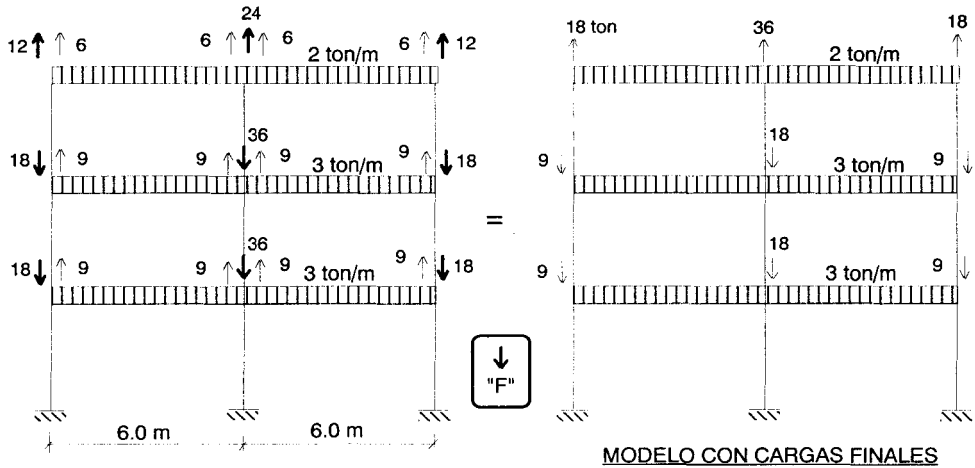


Fig. 5.51. Cargas Permanentes Aplicadas Sobre la Estructura ya Construida que Permiten Reproducir Aproximadamente el Efecto del Proceso Constructivo.

Debe indicarse que la técnica propuesta para reproducir los desplazamientos verticales producidos por el proceso constructivo, garantiza la compatibilidad de desplazamiento vertical que debe existir en una columna que pertenece a dos pórticos que se interceptan ortogonalmente (efecto espacial), cosa que no se logra cuando se trabaja desdoblado el sistema en pórticos planos; en ese caso, debe emplearse las cargas del metrado que provenga de ambos pórticos.

Por otro lado, vuelve a remarcarse que el efecto del proceso constructivo resulta importante en la mitad superior de los edificios elevados (más de 10 pisos), y que de no considerarse este efecto, podría obtenerse diagramas de momentos flectores como el mostrado en la Fig. 5.52.

Nótese en la Fig. 5.52 la inversión de momentos en el nudo central superior y la recarga de momentos en los nudos extremos; como si la mayor deformación axial de la columna interna "jalase" al diagrama de momento flector. Para atenuar este efecto, también se puede emplear columnas cuyas secciones tengan áreas proporcionales a la magnitud de la carga axial actuante, que por lo general no son aceptadas por razones de estética.

A continuación se presenta las fórmulas que emplea el programa "PROCONST", para evaluar las cargas equivalentes "F", que permiten reproducir aproximadamente los desplazamientos verticales generados durante el proceso constructivo.

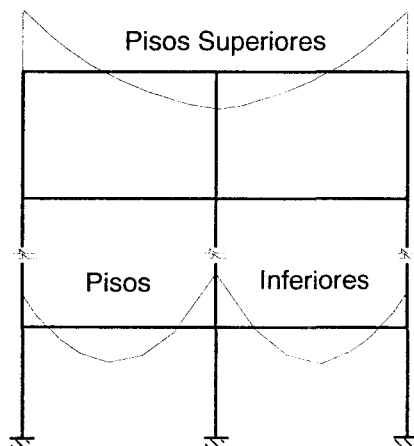


Fig. 5.52.

*DMF Típico de Pórticos Elevados
Cuando no se Contempla el
Proceso Constructivo.*

5.4.3. Programa "PROCONST" para Simular el Proceso Constructivo

El Manual de Uso de este programa aparece en el archivo "PROCONST.MAN" y como ejemplo se ha desarrollado el pórtico mostrado en la Fig. 5.46 (o 5.51), el archivo de datos se denominó PROCONST.DAT y el de resultados PROCONST.RES (pudo darse cualquier otro nombre). El procedimiento utilizado es el siguiente:

a.- Por cada eje vertical de columna (o placa), se define:

P_i = carga axial en el nivel "i" (no acumulada) proveniente del metrado de cargas permanentes.

$K_i = E A / h$ = rigidez axial de la columna en un entrepiso "i", cuya altura es "h"

N = número de pisos de la columna en análisis.

b.- Posteriormente, el programa PROCONST calcula:

d_i = desplazamiento vertical absoluto del nivel "i", correspondiente al eje vertical en estudio, contemplando el proceso constructivo.

d_r = desplazamiento relativo nivel a nivel.

P_a = carga axial acumulada producida por " d_i ".

F_i = carga vertical equivalente que aplicada sobre los nudos de la estructura ya construida, reproducen los valores " d_i "

Para calcular el desplazamiento en un nivel " j " se aplica la siguiente fórmula:

$$d_j = \left[\sum_{i=j}^N P_i \right] \times \left[\sum_{i=1}^j \frac{1}{K_i} \right]$$

Conociendo " d_j ", para $j = 1 @ N$, se calcula:

$d_{ri} = d_i - d_{i-1} \dots$ Para $i = 1 @ N$, con $d_0 = 0$;

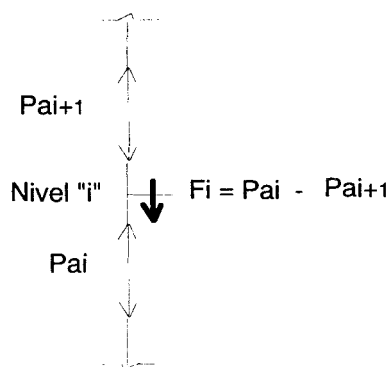
Luego:

$P_{ai} = K_i d_{ri} \dots$ Para $i = 1 @ N$

Finalmente, la carga equivalente será:

$F_i = P_{ai} - P_{ai+1} \dots$ Para $i = 1 @ N - 1$

$F_N = P_{a_N} \dots$ Para $i = N$



Debe remarcarse que al calcular las cargas finales por aplicar en los nudos de la estructura ya construida, debe restarse la fuerza cortante que provenga de las vigas, tal como se mostró en el ejemplo (Fig. 5.51). Alternativamente, puede superponerse dos estados: el primero compuesto por el pórtico sujeto sólo a las cargas equivalentes " F " y el segundo, donde se elimina la deformación axial de las columnas mediante apoyos simples colocados en los nudos, sujeto a las cargas existentes en las vigas.

Lógicamente, las cargas axiales en las columnas, que daría como resultado un programa que solucione pórticos planos (por ejemplo, "EDIFICIO"), en donde se ha tratado de reproducir los efectos del proceso constructivo con las cargas equivalentes, serían ficticias; por lo que para el diseño de las columnas debe emplearse las cargas acumuladas que provengan del metrado.

5.4.4. Problemas Propuestos

- 1.- Dibuje el DMF (producido sólo por la deformación axial de las columnas) para la viga del tercer nivel del pórtico mostrado. Se seguirá el siguiente proceso aproximado:
 - a. Mediante el método del Voladizo (ver el Acápite 6.2), calcule las fuerzas axiales acumuladas en las columnas, producidas por las cargas laterales.

- b. Determine las deformaciones axiales netas de las columnas y luego, los desplazamientos verticales absolutos de los nudos. Posteriormente, calcule los desplazamientos relativos (δ_{ij}) entre los extremos de la viga del tercer nivel.
- c. Evalúe los momentos de empotramiento producidos por δ_{ij} . Finalmente, mediante el método de Cross, analice la viga del tercer nivel, suponiendo que los extremos lejanos de las columnas que concurren a ella están empotrados.

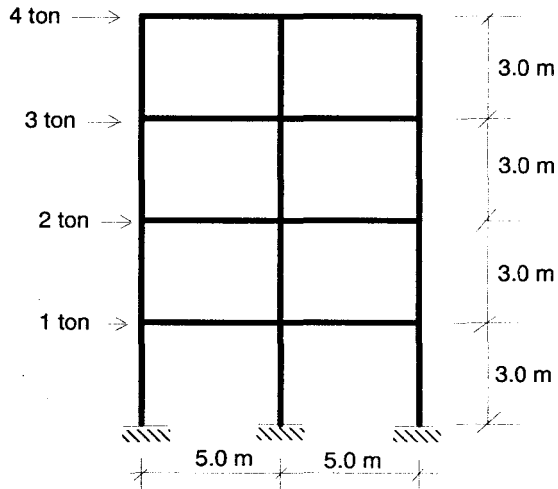
Datos:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

Columnas $0.3 \times 0.3 \text{ m}$

Vigas: $0.3 \times 0.5 \text{ m}$

$$K_o = 225 \text{ cm}^3$$



- 2.- Contemplando los efectos del proceso constructivo, calcule los desplazamientos verticales para el muro de albañilería confinada que se muestra. Suponer:

Columnas: $0.15 \times 0.15 \text{ m}$

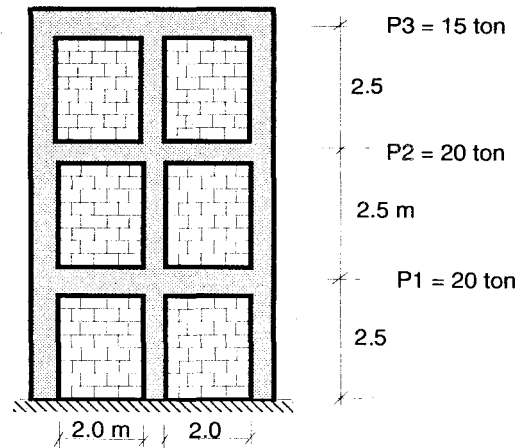
$$E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

Albañilería:

Paños de $0.15 \times 2.00 \text{ m}$

$$E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$$

P_i = cargas permanentes
por nivel (ton)



$$\text{RESULTADO (m): } \delta_1 = 0.0003161 \quad \delta_2 = 0.0004023 \quad \delta_3 = 0.0002586$$

5.5. Sistemas Hiperestáticos con Vigas Curvas

El único caso que se estudiará corresponde al de las vigas con forma de arco parabólico, simétrico y achatado ($f / L \leq 1 / 5$, Fig. 5.53), de manera que la única deformación importante sea la producida por el momento flector. Para otros casos, deberá contemplarse la deformación axial y la asimetría del arco, para lo cual, puede recurrirse a la Ref. 12.

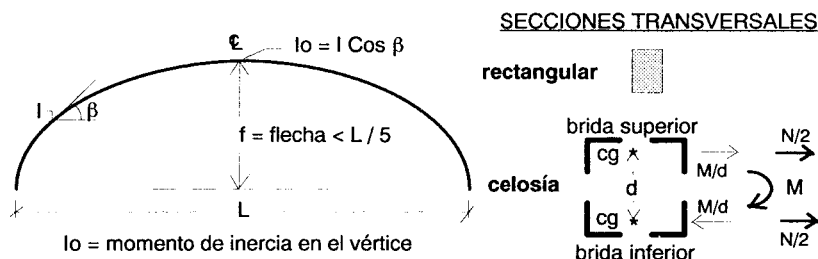


Fig. 5.53. Arco Parabólico Achatado.

La sección transversal del arco es constante y podrá ser rectangular o compuesta por perfiles metálicos (arco de celosía); en el último caso, deberá tenerse presente que el momento flector (M) produce fuerzas axiales en las bridas (M / d) que deberán agregarse a las generadas por la fuerza axial interna (N).

5.5.1. Determinación de K_{ij} , f_{ij} y u_{ij}

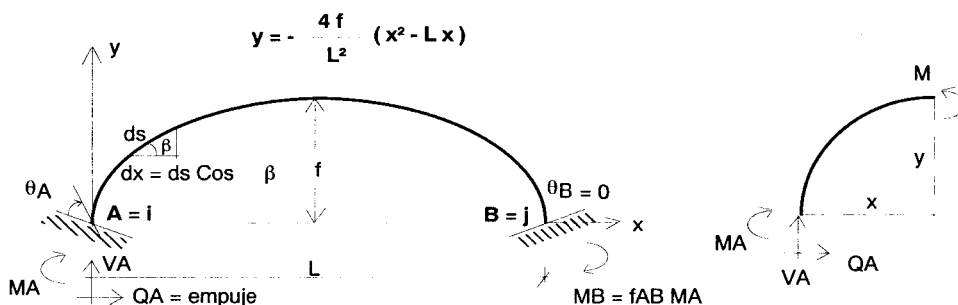


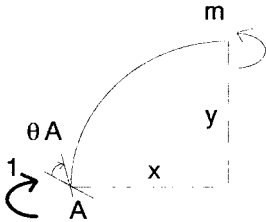
Fig. 5.54. Cálculo de K_{ij} y f_{ij} .

Para determinar la rigidez al giro ($K_{ij} = K_{AB}$) y el factor de transporte ($f_{ij} = f_{AB}$) se aplicará una rotación en el extremo A, manteniendo fijo al extremo B (Fig. 5.54). Como el sistema resulta hiperestático en tercer grado (redundantes: MA , VA y QA), se aplicará el método de la carga unitaria. Contemplando sólo las deformaciones por flexión se tiene:

$$\theta, \delta = \oint \frac{M m ds}{EI} = \int_0^L \frac{M m dx}{EI \cos \beta} = \frac{1}{EI_0} \int_0^L M m dx$$

Donde, por equilibrio: $M = MA + VA x - QA y = f(x)$... función de "x"

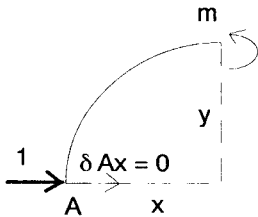
El valor de "m" depende del desplazamiento que se quiera determinar (δ o θ), por lo que imponiendo condiciones de borde en el extremo A, se logra tres ecuaciones:



CÁLCULO DE θA

$$m(x) = 1$$

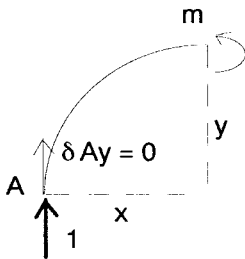
$$\theta A = \frac{1}{EI_0} \int_0^L [MA + VA x - QA y] (1) dx \dots [1]$$



CÁLCULO DE $\delta Ax = 0$

$$m(x) = -y \dots \text{función de "x"}$$

$$0 = \frac{1}{EI_0} \int_0^L [MA + VA x - QA y] (-y) dx \dots [2]$$

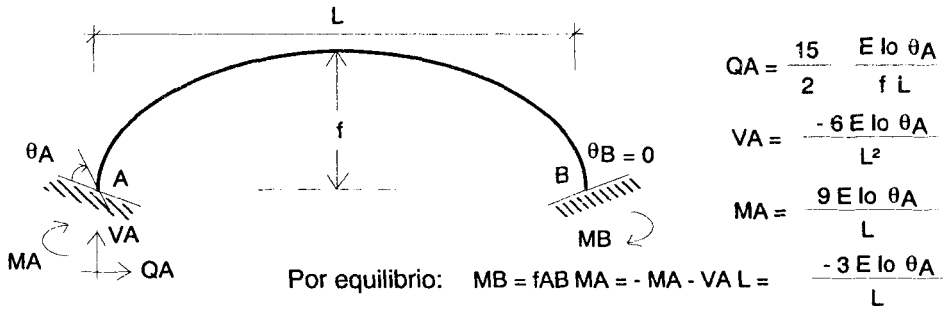


CÁLCULO DE $\delta Ay = 0$

$$m(x) = x$$

$$0 = \frac{1}{EI_0} \int_0^L [MA + VA x - QA y] (x) dx \dots [3]$$

Realizando las integrales respectivas (en función de "x") y solucionando las tres ecuaciones, se obtiene las tres redundantes hiperestáticas (QA , VA y MA):

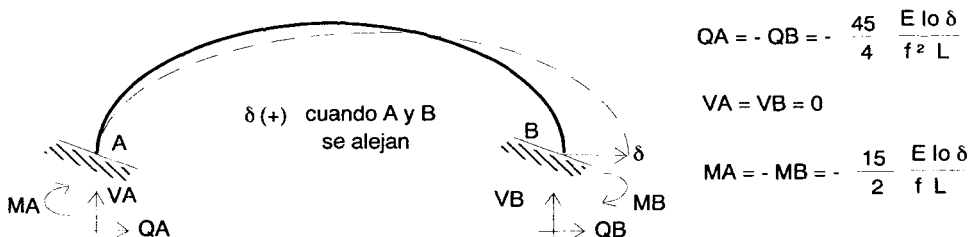
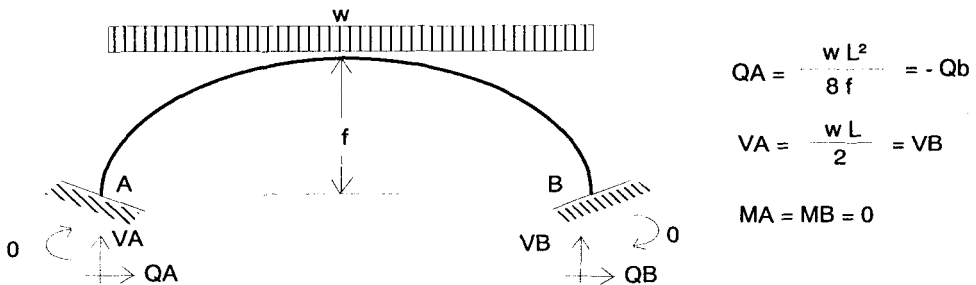


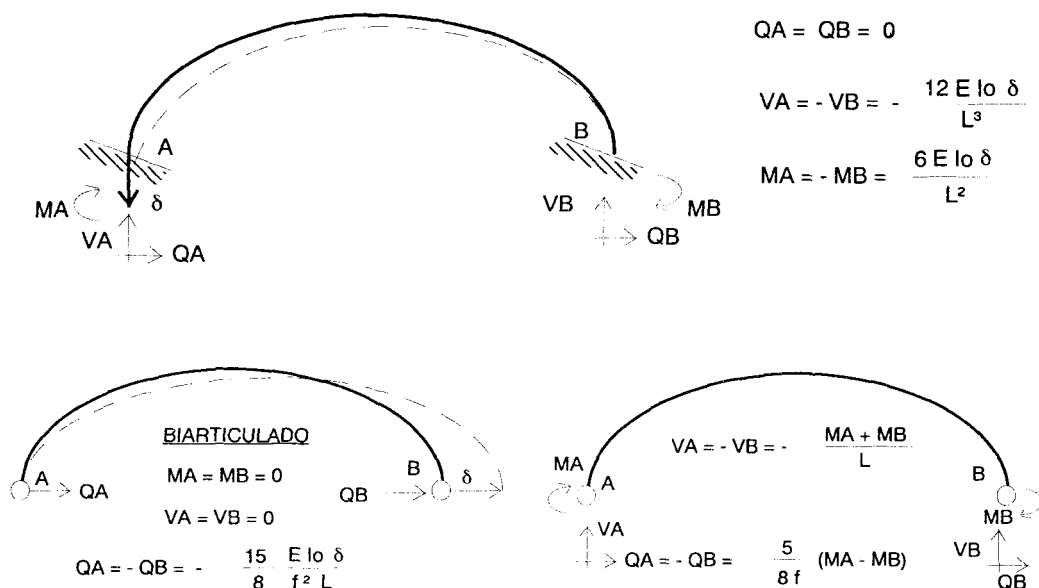
Finalmente, contemplando la simetría, se tendrá:

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{MA}{\theta_A} = \frac{9 E I \theta_A}{L}$$

$$f_{AB} = f_{BA} = \frac{MB}{MA} = -\frac{1}{3}$$

Para determinar los momentos de empotramiento (u_{ij}), también se aplica el método de la carga unitaria. A continuación se muestra algunas acciones de fijación extraídas de la Ref. 2.





5.5.2. Ejemplo de Aplicación

Empleando el método de Cross Indirecto, resolver el pórtico mostrado en la Fig. 5.55. Nótese que existe un tirante de acero (rigidez al giro nula) que trata de atenuar el aplastamiento del arco; asimismo, a pesar de que hay simetría en forma y carga, existe desplazamiento lateral, cosa que no ocurriría si la viga fuese horizontal.

Datos:

Columna y Arco: $0.3 \times 0.6 \text{ m}$
 $E (\text{concreto}) = E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$
 $EI = 2 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.6^3 / 12 = 10800 \text{ ton-m}^2$

Tirante: $As = 10 \text{ cm}^2$
 $E (\text{acero}) = Es = 2100 \text{ ton/cm}^2$
 $As Es = 21000 \text{ ton}$

Cálculos:

Rigideces al giro (ton-m):
 $K'_{21} = 3EI/h = 3 \times 10800 / 3 = 10800$
 $K_{23} = 9EI/L = 9 \times 10800 / 10 = 9720$
 $K (\text{tirante}) = 0$

Tracción en el tirante:

$T = Es As (2 d_1) / L = 21000 \times 2 d_1 / 10 = 4200 d_1 \dots$ (T en ton para "d1" en m)

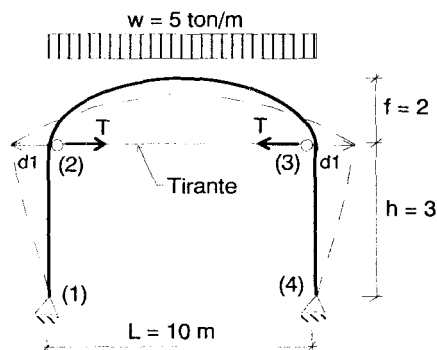
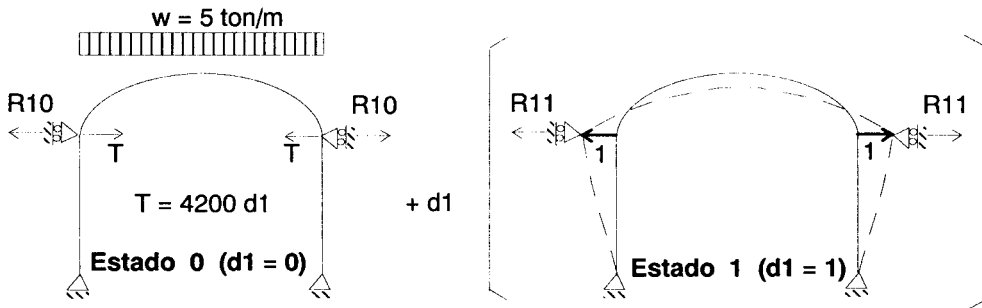
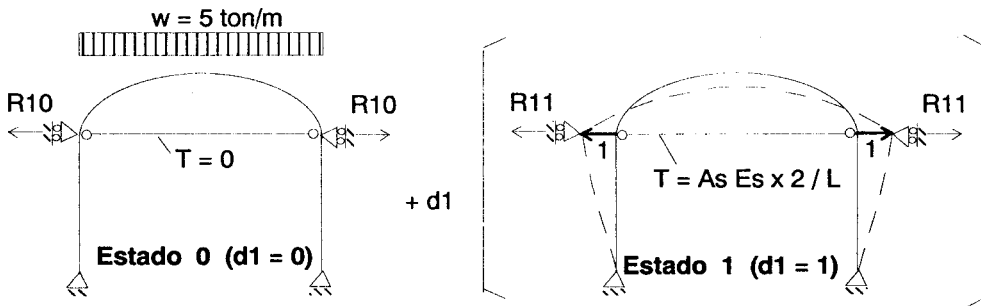


Fig. 5.55

Existen dos procedimientos para trabajar: 1) Reemplazar al tirante por una fuerza externa de magnitud desconocida: $T = 4200 d1$; y, 2) No cortar el tirante:



PROCEDIMIENTO 1. CORTANDO AL TIRANTE



PROCEDIMIENTO 2. SIN CORTAR EL TIRANTE

Para solucionar este ejemplo, se seguirá el primer procedimiento (cortando al tirante).

ESTADO 0

En este estado no existen momentos de empotramiento ($u_{ij} = 0$), por lo que:

Mijo = 0 y $V_{21} = 0$

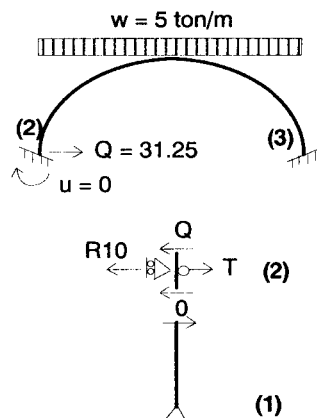
$$Q = w L^2 / 8 f = 5 \times 10^2 / (8 \times 2)$$

$$Q = 31.25 \text{ ton}$$

Por equilibrio del nudo 2:

$$R10 = T - Q - 0$$

$$R10 = 4200 d1 - 31.25$$



ESTADO 1

$$u_{21} = -3 E I d / h^2 = -3 \times 10800 \times (-1) / 3^2$$

$$u_{21} = 3600 \text{ ton-m}$$

$$u_{23} = -15 E I d / (2 f L)$$

$$u_{23} = -15 \times 10800 \times 2 / (2 \times 2 \times 10)$$

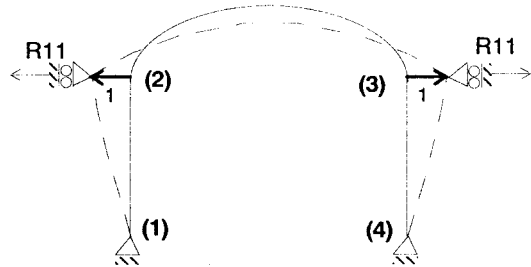
$$u_{23} = -8100 \text{ ton-m}$$

Por simetría:

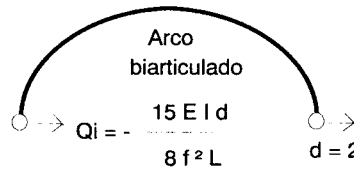
$$\theta_2 = -\theta_3; \text{ luego: } T_{23} = -f_{23} D_{23}$$

$$\text{Como } f_{23} = -1/3, \text{ entonces: } T_{23} = -(-1/3) D_{23} = 1/3 D_{23}$$

Aplicando Cross en media estructura:



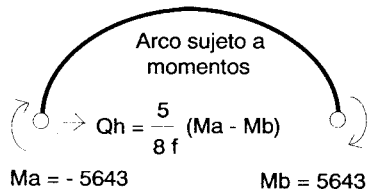
Nudo	2	
Barra	2-1	2-3
α_{ij}	0.526	0.474
u_{ij}	3600	-8100
D	2367	2133
T	0	711
D	-374	-337
T	0	-112
D	59	53
T	0	18
D	-9	-8
Mij1	5643	-5643



Efecto isostático:

$$Q_i = - \frac{15 \times 10800 \times 2}{8 \times 2^2 \times 10}$$

$$Q_i = -1012$$

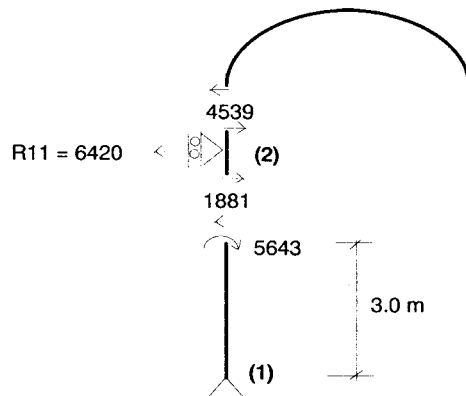


Efecto hiperestático:

$$Q_h = \frac{5}{8 \times 2} (-5643 - 5643)$$

$$Q_h = -3527$$

$$Q_{\text{total}} = Q_i + Q_h = -4539$$



Cálculo de R11:

Nótese que en la columna 2-1 no existe efecto isostático, porque en una barra rígida bi-articulada sujeta a desplazamiento lateral no se desarrollan esfuerzos,

Por equilibrio en la coordenada 1: $R_{10} + R_{11} d_1 = 0$

$$\text{Luego: } (T - 31.25) + 6420 d_1 = (4200 d_1 - 31.25) + 6420 d_1 = 0$$

De la cual: $d_1 = 0.0029 \text{ m}$ //

De no existir tirante ($T = 0$), se obtendría: $d_1 = 0.0049 \text{ m}$ (70% mayor que 0.0029 m)

Momento flector: $M_{ij} = M_{ijo} + d_1 M_{ij1}$

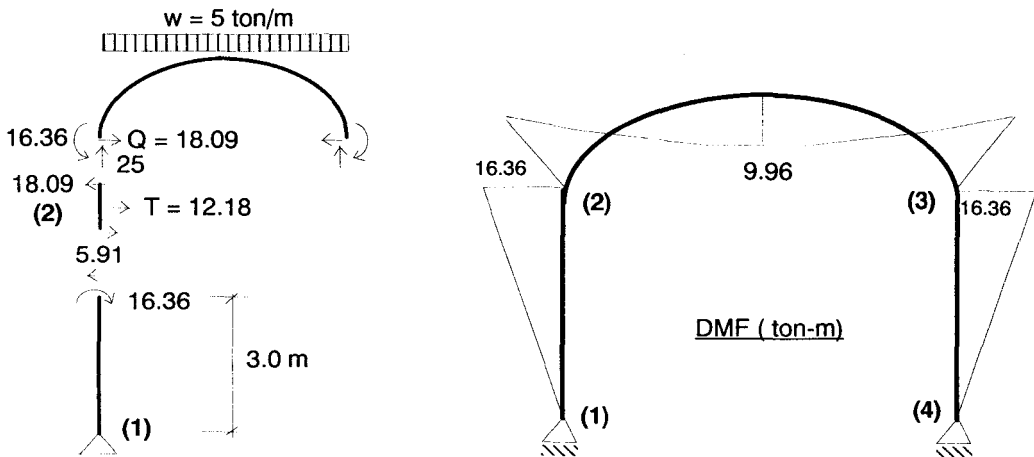
$$M_{23} = 0 + 0.0029 \times (-5643) = -16.36 \text{ ton-m}$$

$$M_{21} = 0 + 0.0029 \times 5643 = 16.36 \text{ ton-m}$$

$$\text{Empuje en el arco: } Q = Q_0 + d_1 Q_1 = 31.25 + 0.0029 \times (-4539) = 18.09 \text{ ton}$$

$$\text{Tensión en el cable: } T = 4200 d_1 = 4200 \times 0.0029 = 12.18 \text{ ton}$$

Finalmente, las fuerzas de sección y el diagrama de momento flector serán:



5.5.3. Pórticos con Vigas Quebradas

El concepto descrito para los pórticos con vigas parabólicas, también puede ser aplicado para resolver pórticos con vigas quebradas en forma de triángulo isósceles (Fig. 5.56).

En este caso, K_{ij} , f_{ij} y u_{ij} , se proporcionan en la Ref. 2, o también pueden determinarse de la siguiente manera.

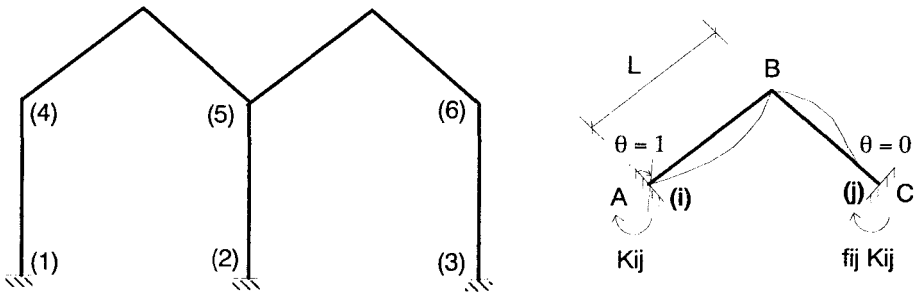


Fig. 5.56. Cálculo de K_{ij} y f_{ij} Para el Caso "Vigas Quebradas".

Suponiendo que las barras AB y BC tienen el mismo momento de inercia (I), entonces $K_{BA} = K_{BC} = 4EI/L$, con lo cual $\alpha_{BA} = \alpha_{BC} = 0.5$. Los momentos de empotramiento, generados por $\theta_i = 1$, son:

$$u_{AB} = 4EI/L \quad u_{BA} = 2EI/L \quad u_{BC} = 0 \quad u_{CB} = 0$$

Aplicando Cross, trabajando con $EI/L = 1$, se tiene:

Nudo	A	B		C
Barra	A-B	B-A	B-C	C-B
α_{ij}	0.0	0.5	0.5	0.0
u_{ij}	4	2	0	0
D	0	-1	-1	0
T	-0.5	0	0	-0.5
M _{ij}	3.5	1	-1	-0.5

Se concluye que:

$$K_{ij} = M_{AB} = 3.5EI/L$$

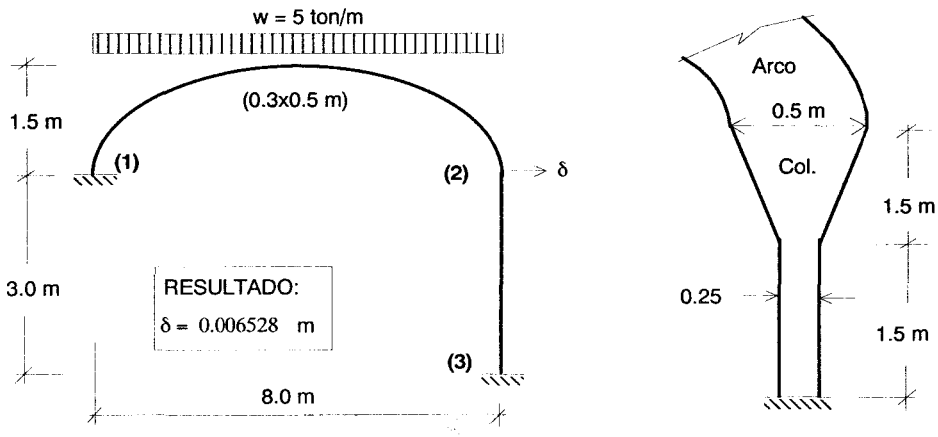
Puesto que $MCB = f_{ij} K_{ij} = f_{ij} M_{AB}$, entonces: $f_{ij} = M_{CB}/M_{AB} = -1/7$

Por simetría en forma:

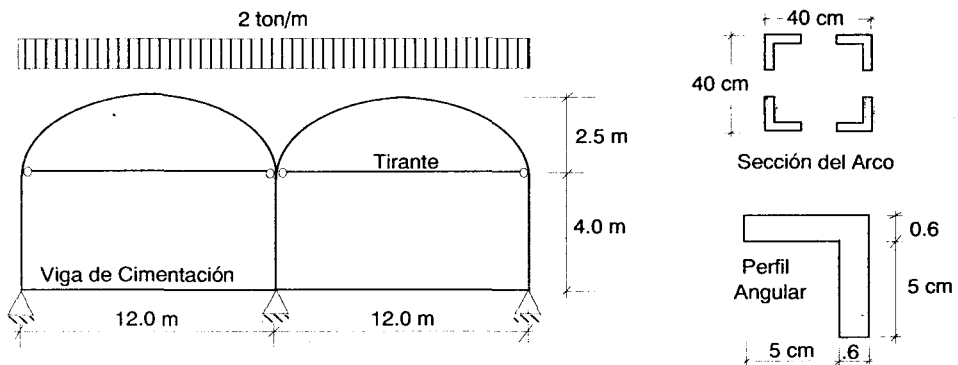
$$K_{ij} = K_{ji} \text{ y } f_{ij} = f_{ji}$$

5.5.4. Problemas Propuestos

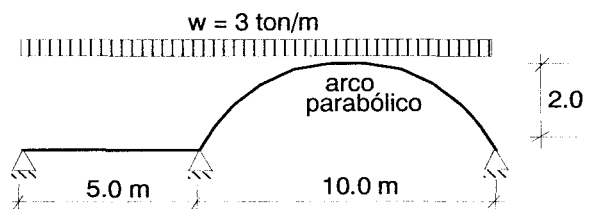
- 1.- Determine el desplazamiento δ para la estructura mostrada. Suponga que el arco parabólico y la columna (de sección variable) son de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$), y que ambos elementos tienen un espesor de 0.30 m.



- 2.- Calcular la máxima fuerza axial de Tracción y Compresión en cada una de las bridas del Arco Metálico mostrado. Suponer: E_c (concreto) = $2'000,000 \text{ ton/m}^2$, E_s (acero) = $21'000,000 \text{ ton/m}^2$; Tirantes de Acero ($A_s = 10 \text{ cm}^2$), Columnas de Concreto Armado ($30 \times 60 \text{ cm}$), Vigas de Cimentación de Concreto Armado ($30 \times 80 \text{ cm}$).



- 3.- Dibujar el DMF para la estructura mostrada ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$); la sección transversal de todos los elementos es $0.3 \times 0.5 \text{ m}$.



5.6. Apoyos Elásticos

En la práctica estructural puede presentarse una serie de casos, en los cuales los apoyos de la estructura se simulan mediante conexiones elásticas. Uno de esos casos fue estudiado en el Capítulo 3, cuándo se utilizó el modelo simplificado del ACI (Fig. 5.57) para analizar las vigas sujetas a carga vertical, reemplazando las columnas descargadas, con $\delta = 0$ y con un extremo fijo, por resortes helicoidales cuyas constantes son iguales a las rigideces al giro de las columnas ($K_c = 4 E I_c / h$).

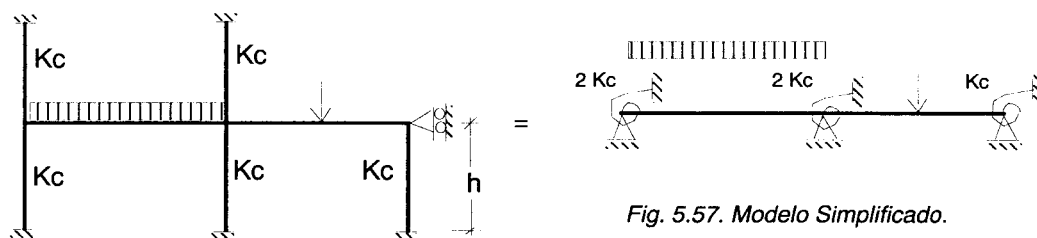


Fig. 5.57. Modelo Simplificado.

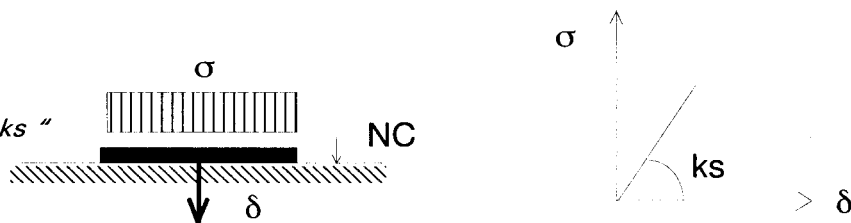
En este capítulo se estudiará tres casos adicionales: la interacción suelo-estructura, las parrillas simples y los resortes helicoidales incompatibles en giro con las barras.

5.6.1. Interacción Suelo-Estructura

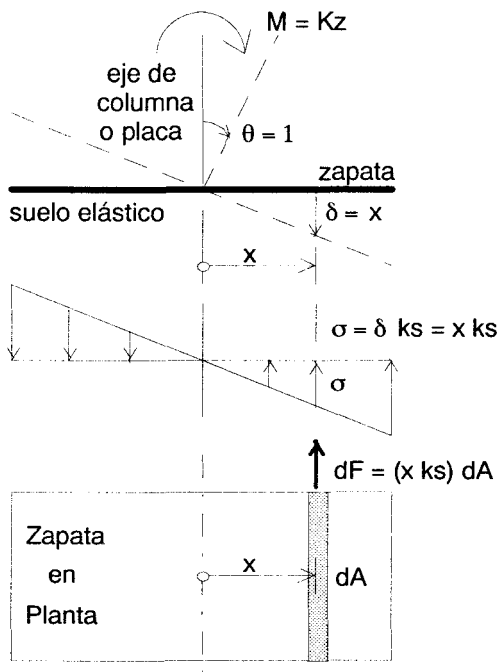
Se supondrá que la zapata (de concreto armado) es rígida en comparación con el suelo, el cual a su vez se adoptará como un material elástico con coeficiente de subrasante (o módulo de Balasto) igual a "ks". El valor "ks" se obtiene al ensayar el suelo a compresión, empleando un plato estándar (Ref.15) y se define como la presión (σ) necesaria de aplicar para producir un desplazamiento (a la altura del nivel de cimentación NC) unitario: $ks = \sigma / \delta$ (Fig. 5.58), por ejemplo, para el cascajo limeño este valor es alrededor de $10 \text{ kg} / \text{cm}^2 \times \text{cm}$.

Fig. 5.58

Cálculo de "ks"



La rigidez que ofrece el suelo al tratar de impedir la rotación (θ) de la zapata, se calcula como el momento (M) que proviene del eje de la columna, placa o muro de albañilería dividido entre esa rotación, obteniéndose $K_z = M/\theta$. Dicha restricción se representa mediante un resorte helicoidal cuya constante es $K_z = ks I_z$, donde I_z es el momento de inercia de la zapata. A continuación se deduce el valor K_z , trabajando con una rotación unitaria, para esta deducción se ha supuesto que el suelo siempre trabaja a compresión, por el efecto combinado del momento y de la carga axial que baja por la columna.



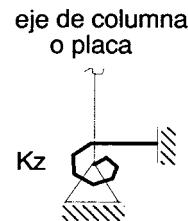
Por Equilibrio:

$$Kz = \int x dF$$

$$Kz = ks \int x^2 dA = ks Iz$$

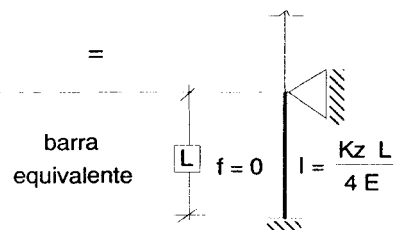
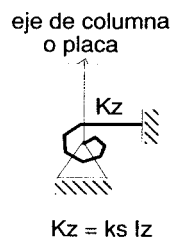
Por lo cual:

$$\boxed{Kz = ks Iz}$$

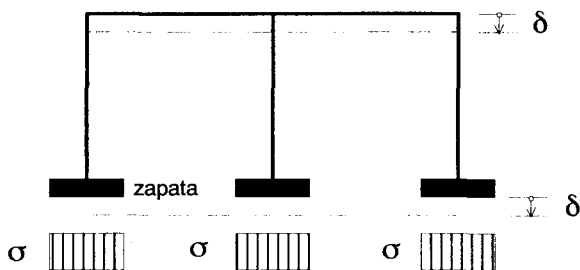


Observaciones:

- 1.- La fórmula para calcular Kz es válida siempre y cuando el suelo trabaje a compresión, como resultado de la acción compuesta Carga Axial - Momento Flector; en caso contrario, Iz debe calcularse empleando sólo la zona comprimida.
- 2.- En suelos muy duros $Kz \gg K_{columna}$ ($4 E Ic / h$), con lo cual, la base de la columna estará empotrada; en cambio, en suelos muy blandos $Kz \ll K_{columna}$, por lo cual, la base estará articulada.
- 3.- Hay programas de cómputo que no admiten resortes helicoidales, en cuyo caso, el resorte debe reemplazarse por una barra equivalente de igual rigidez al giro (Kz). Las características de esa barra equivalente se logran proporcionándole una longitud determinada (L) y eliminando su deformación por corte (factor de forma $f = 0$), con lo cual, puede calcularse el momento de inercia de la barra equivalente como $I = Kz L / 4 E$.

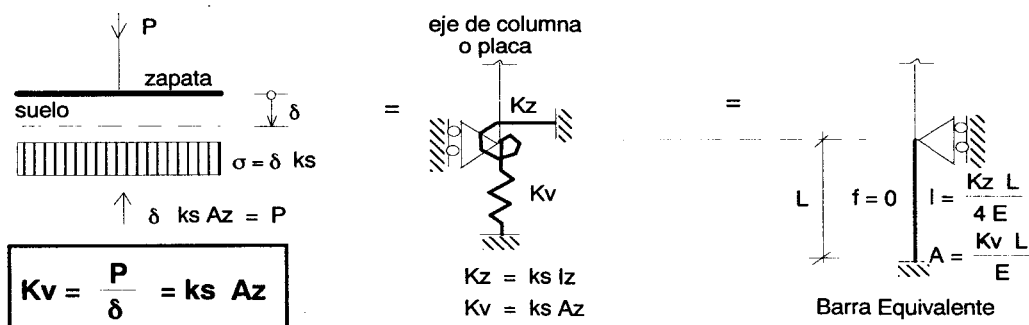


- 4.- El suelo también se deforma verticalmente, pero, por lo general, las zapatas se dimensionan para el mismo esfuerzo de trabajo del suelo (σ), con lo cual, si " σ " fuese constante en todas las zapatas, entonces ellas se desplazarían verticalmente la misma cantidad



($\delta = \sigma / k_s$), en cuyo caso, no existiría asentamiento relativo de la superestructura (desplazamiento relativo de las vigas nulo) y no se originarían esfuerzos. Cabe mencionar que en la ciudad de México se han presentado casos donde la superestructura se ha asentado uniformemente más de un metro, sin presentarse fisuras.

De existir problemas por asentamiento diferencial, el efecto del suelo puede reemplazarse por un resorte vertical, cuya constante es $K_v = k_s A_z$, donde A_z es el área en planta de la zapata, resorte que a su vez puede ser reemplazado por una barra equivalente que presente una rigidez axial ($E A / L$) igual a K_v , y una rigidez al giro ($4 E I / L$) igual a K_z , tal como se muestra a continuación.



- 5.- En la Ref. 13 se presenta las fórmulas de Richart-Hall y Woods para obtener las constantes de resortes que representen las restricciones al desplazamiento vertical (K_v), horizontal (K_h) y rotacional (K_z) que ofrece el suelo al libre desplazamiento de la zapata. Estas son fórmulas experimentales, que contemplan el efecto dinámico del sismo, donde G es el módulo de corte del suelo, ν es su módulo de Poisson (del orden de $1/3$) y las constantes β_i se obtienen de gráficos como el mostrado en la Fig. 5.59. Las fórmulas son:

$$K_h = 2 G (1 + \nu) \beta_x \sqrt{B L}$$

$$K_z = G \beta_\phi B L^2 / (1 - \nu)$$

$$K_v = G \beta_t \sqrt{B L} / (1 - \nu)$$

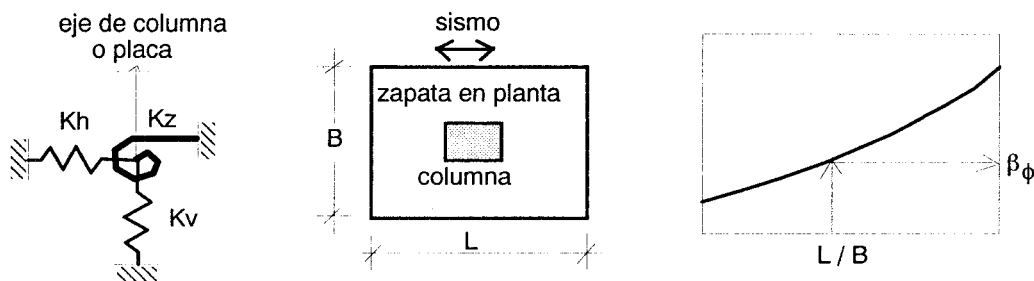
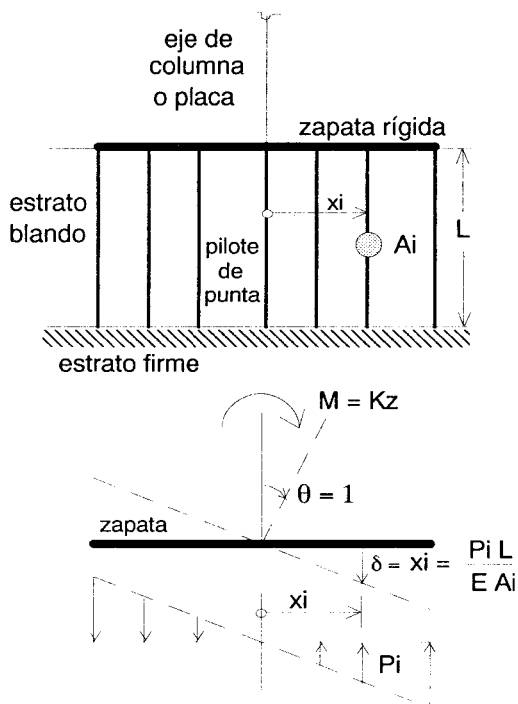


Fig. 5.59. Gráfico de la Ref. 13 para Obtener las Constantes β .

- 6.- Cuando el suelo es de muy baja calidad se recurre a los pilotes de punta, hincados sobre un estrato firme, pero, si el estrato blando es muy profundo se utilizan pilotes que trabajan por fricción del suelo. Los pilotes de punta trabajan principalmente a carga axial, restringiendo la rotación de la zapata, efecto que se modela empleando un resorte helicoidal cuya constante es $K_z = \Sigma (E A_i x_i^2 / L)$, donde A_i es el área axial del pilote. A continuación se deduce la fórmula que permite calcular K_z .

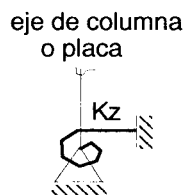


Por Equilibrio:

$$K_z = \Sigma x_i P_i$$

Por lo cual:

$$K_z = \Sigma \frac{E A_i x_i^2}{L}$$



Nota: La fórmula es válida cuando todos los pilotes de punta trabajan a compresión como resultado de la acción combinada Carga Axial - Momento Flector.

5.6.2. Parrillas Simples. Ejemplo

Otro tipo de conexión elástica se presenta cuando una viga apoya sobre otra viga, por ejemplo, en la Fig. 5.60 la viga del eje A apoya sobre la viga del eje 1.

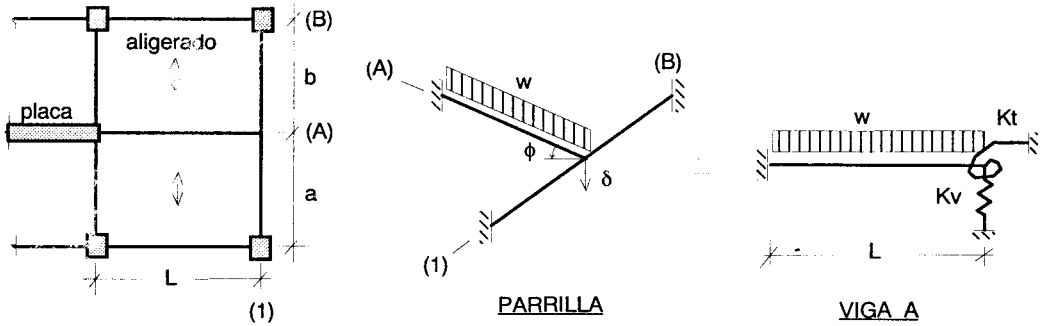


Fig. 5.60. Parrilla Simple.

Para un análisis computacional puede emplearse el programa "PARRILLA" (descrito en el acápite 8.5.2), cuyo manual de uso es PARRILLA.MAN, mientras que para el análisis aproximado de la viga del eje A, correspondiente a la Fig. 5.60, puede suponerse que ella está empotrada en la placa; asimismo, puede asumirse que la viga del eje 1 está empotrada en sus extremos, debido a que en el extremo B, la viga del eje 1 se ve restringida de torsionarse por la rigidez a flexión que proporcionan tanto la columna B-1 como la viga del eje B, es decir, puede suponerse que el giro torsional que tiene la viga del eje 1 en el extremo B, repercute muy poco sobre los esfuerzos de la viga del eje A.

Sin embargo, la viga del eje 1 trata de restringir al desplazamiento vertical (δ) y al giro (ϕ) en la zona de encuentro A-1, lo que se representa a través de un resorte vertical con constante K_v y otro helicoidal con constante K_t , respectivamente. A continuación se muestra como se determina las constantes K_v y K_t analizando a la viga del eje 1.

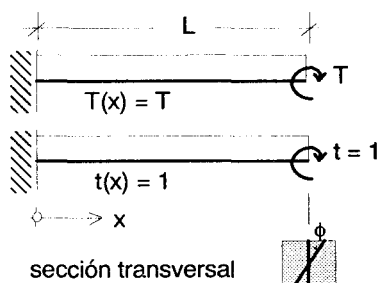
Cálculo de K_v (rigidez vertical)

Esta constante se determina como la carga concentrada P (proveniente de la viga del eje A) capaz de producir un desplazamiento δ unitario en su punto de aplicación. Como se observa, K_v depende de las propiedades elásticas y geométricas de la viga del eje 1.

$$K_v = \frac{P}{\delta} = \frac{3 E I (a + b)^3}{a^3 b^3}$$

Cálculo de K_t (rigidez torsional)

Primero se analizará una viga de un sólo tramo, sujeta a un momento torsor T , mediante el método de la carga unidad. La rigidez torsional se calcula como el momento torsor capaz de originar una rotación torsional unitaria, en el punto donde está aplicado T , obteniéndose $K_t = J G / L$.



$$\phi = \int_0^L \frac{T(x) t(x)}{J G} dx$$

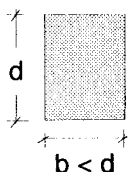
Por lo que:

$$K_t = \frac{T}{\phi} = \frac{J G}{L}$$

En la expresión obtenida para K_t , J es la constante de torsión correspondiente a la sección transversal; este valor coincide con el momento polar de inercia sólo cuando la sección es circular.



$$J = \frac{\pi R^4}{2}$$



$$J = \beta d b^3$$

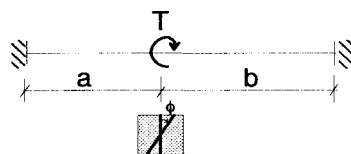
$$\beta = \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{d} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{b}{d} \right)^4 \right]$$

Por otro lado, como la viga del eje 1 consta de 2 tramos, la rigidez torsional total que ejerce sobre la viga del eje A se obtiene sumando las rigideces que aportan ambos tramos:

$$K_t = J G / a + J G / b.$$

Para 2 tramos:

VIGA 1



Generalmente, la rigidez torsional de una viga ($J G / L$) es inferior a su rigidez por flexión ($4 E I / L$), asimismo,

si se presentaran fisuras por torsión, la rigidez torsional K_t degrada considerablemente, esta observación permite simplificar los pórticos espaciales, modelándolos como si ellos fuesen pórticos planos, despreciando la rigidez torsional que ofrecen las vigas transversales al pórtico en estudio; aunque, cabe indicar que en esta simplificación se admite que existe incompatibilidad de desplazamiento vertical en el punto de concurrencia (columna) de los dos pórticos ortogonales.

$$K_t = \frac{T}{\phi} = \frac{J G}{a} + \frac{J G}{b} = \frac{J G (a + b)}{a b}$$

Como observación se verá la diferencia que existe entre la rigidez de flexión (K_f) y la rigidez torsional (K_t) para el caso una viga de concreto armado ($E/G = 2.3$), cuya sección es rectangular con un ancho "b" igual a la mitad del peralte "d":

$$\beta = 1/3 - 0.21 (1/2) (1 - (1/2)^4 / 12) = 0.229 \quad J = \beta d b^3 = 0.0286 d^4$$

Rigidez Torsional: $K_t = J G / L = 0.0286 d^4 (E / 2.3) / L$
 $K_t = 0.0124 E d^4 / L$

Rigidez de Flexión: $K_f = 4 E I / L = 4 E (0.5 d \times d^3 / 12) / L$
 $K_f = 0.1667 E d^4 / L$

Con lo cual: $K_f / K_t = 13.5$

En el caso de estructuras cuya estabilidad está comprometida por la torsión (como el voladizo de la Fig. 5.61), no puede despreciarse la rigidez torsional y la viga tiene que ser especialmente diseñada para soportar la torsión.

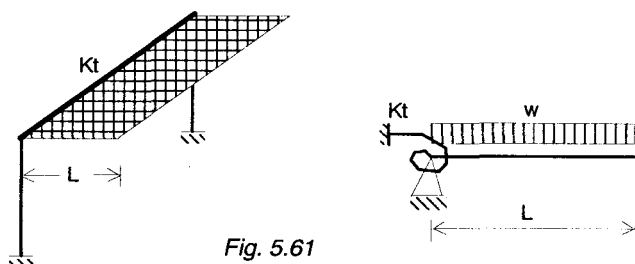
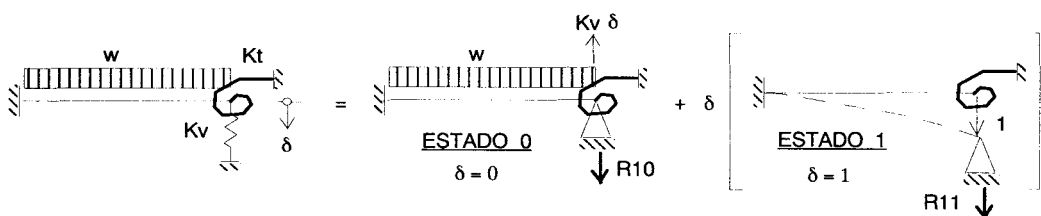
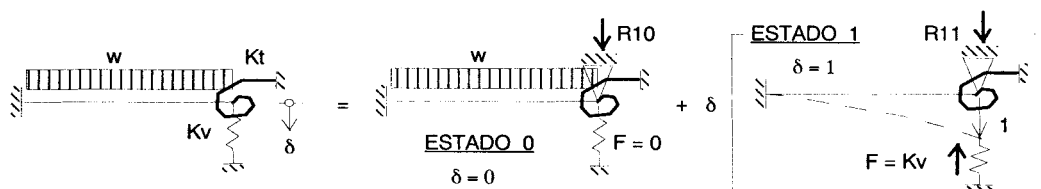


Fig. 5.61

Retornando al análisis de la viga del eje A (Fig. 5.60), se tendría que aplicar el método de Cross Indirecto para resolverla manualmente. Para lo cual existen dos procedimientos: 1) cortando al resorte vertical, reemplazando su efecto por una fuerza desconocida de magnitud $K_v \delta$; y, 2) sin cortar al resorte vertical. En ambos casos, el resorte helicoidal permanece en los estados de la superposición, tal como se muestra a continuación.



PROCEDIMIENTO 1: CORTANDO EL RESORTE VERTICAL



PROCEDIMIENTO 2: SIN CORTAR AL RESORTE VERTICAL

Cabe mencionar que:

- Para ambos procedimientos, no es posible reducir el grado de libertad rotacional del extremo derecho, porque allí existe momento flector cuya magnitud es desconocida.
- En el Primer Procedimiento, R_{10} está en función de δ ; mientras que en el Segundo Procedimiento, R_{11} es función de K_v .
- Para ambos procedimientos: $R_{10} + \delta R_{11} = 0 \Rightarrow \delta = -R_{10} / R_{11}$. Finalmente, $M_{ij} = M_{ijo} + \delta M_{ij1}$

EJEMPLO: Resolver la parrilla mostrada en la Fig. 5.62. Se supondrá que las barras 3-2 y 2-4 tienen un valor de JG igual a $0.7 EI$, en realidad, el valor JG debió calcularse con las fórmulas mostradas anteriormente. Las barras de esta parrilla son vigas de cimentación y el nudo 2 corresponde a una zapata que no tiene asentamiento.

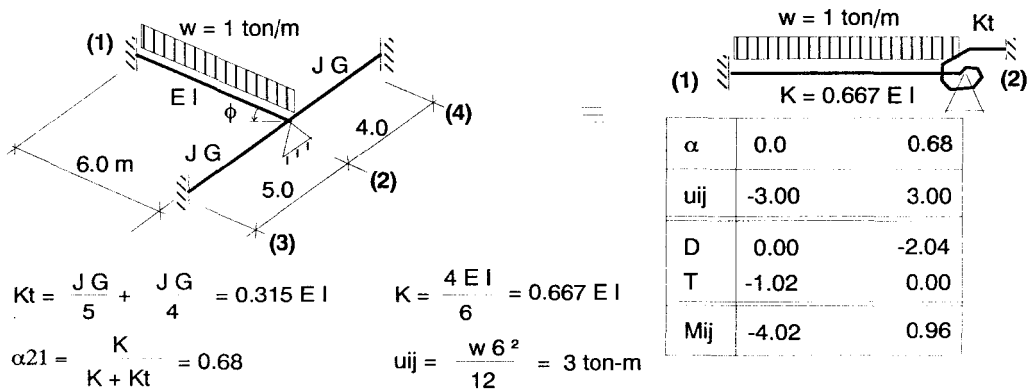


Fig. 5.62. Solución de una Parrilla Mediante el Método de Cross.

El momento $M_{21} = 0.96 \text{ ton-m}$, se transmite como momento torsor sobre la viga 3-2-4; este momento torsor se reparte sobre los tramos 2-3 y 2-4 en proporción a la rigidez torsional de cada tramo (JG / L). Ver la Fig. 5.63.

Por otro lado, con fines comparativos, se ha resuelto la viga 1-2 asumiendo que la rigidez torsional K_t es nula, obteniéndose: $M_{21} = 0$ y $M_{12} = -wL^2/8 = -1 \times 6^2/8 = 4.5 \text{ t-m}$, sin embargo, como la viga transversal ejerce restricción al giro ϕ , deberá adicionarse en 2-1 un momento equivalente a un semiempotramiento: $M_{21} = wL^2/24 = 1.5 \text{ ton-m}$. Como se observa en la Fig. 5.63, este procedimiento simplificado proporciona resultados ligeramente mas conservadores que los obtenidos contemplando la rigidez torsional K_t .

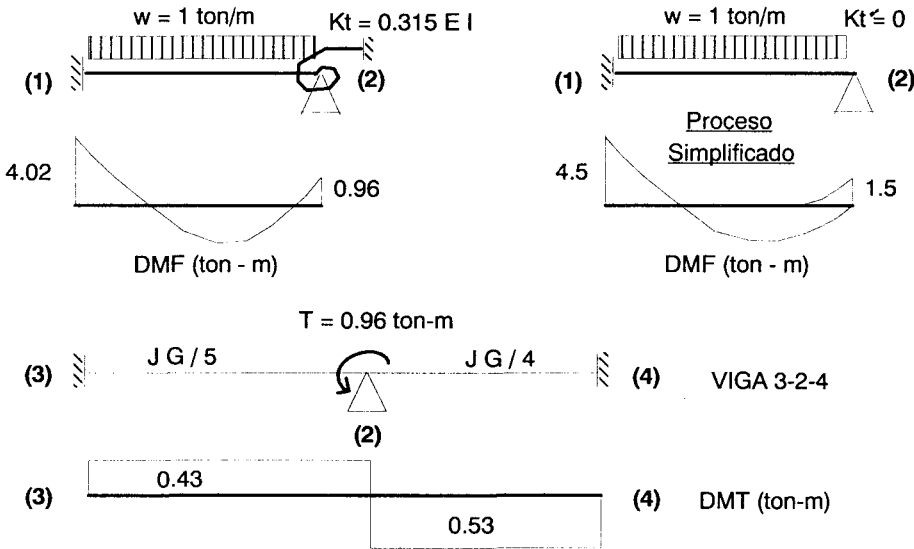


Fig. 5.63. Diagramas de Esfuerzos Correspondientes a la Parrilla de la Fig. 5.62.

Cabe mencionar que si todas las barras correspondientes a la parrilla de la Fig. 5.62 hubiesen estado sujetas a carga vertical, entonces el problema puede desdoblarse en la superposición de dos estados de carga (ver la Fig. 5.64): 1) Carga aplicada sobre la viga 1-2, este estado se resuelve tal como se mostró en el ejemplo anterior; y, 2) Carga aplicada sobre la viga 3-2-4, con la viga 1-2 descargada, en este estado, la viga 3-2-4 trabaja a flexión (solucionable mediante Cross), mientras que la viga 1-2 trabaja a torsión.

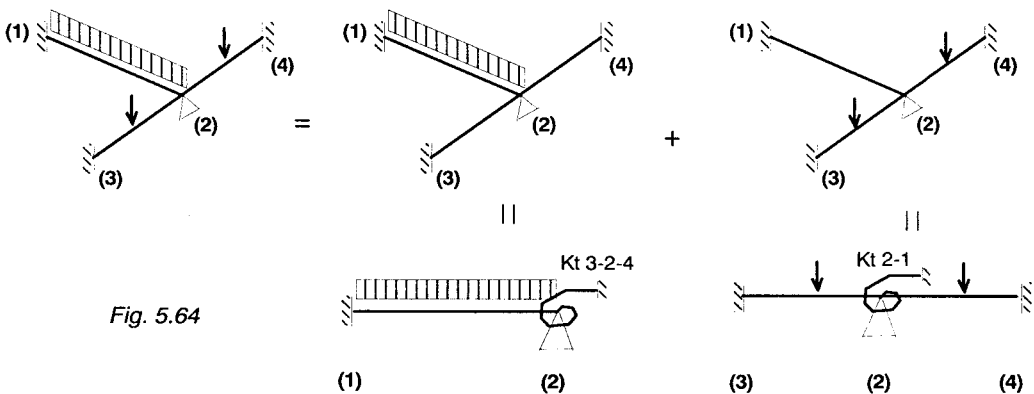


Fig. 5.64

5.6.3. Resortes Helicoidales Incompatibles en Giro con las Barras

Los resortes helicoidales vistos hasta el momento, corresponden a aquellos donde el giro del resorte es igual al de las barras que concurren al nudo común (nudo rígido). Existen otras situaciones donde el giro del resorte es diferente al de las barras y en el nudo en análisis, sólo se cumple la ecuación de equilibrio de momentos. Por ejemplo, en las construcciones metálicas a veces se recurre a conectar la viga con la columna mediante un elemento metálico flexible (Fig. 5.65), dejando de ser rígido el nudo.

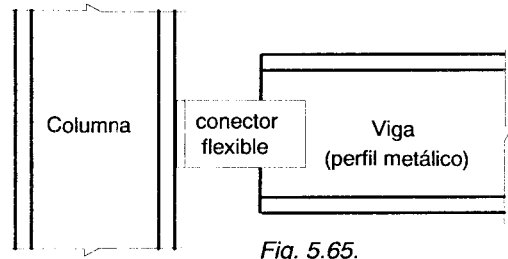


Fig. 5.65.

Otro caso se produce cuando ante la acción de los terremotos, en los pórticos de concreto armado se forman rótulas plásticas en los extremos de las vigas (Fig. 5.66).

En este caso, a un costado de la rótula plástica, la viga se comporta elásticamente, en tanto que en la misma rótula la rigidez al giro es mucho menor. De esta manera, este hecho debe contemplarse cuando se analiza computacionalmente en el rango inelástico a la estructura.

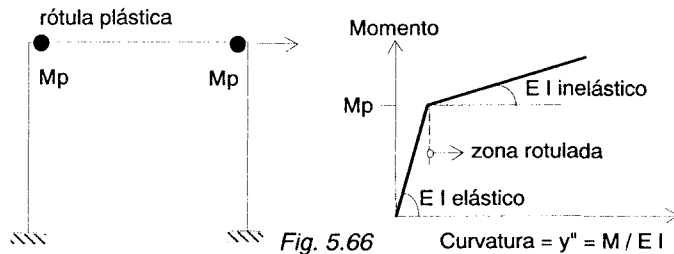


Fig. 5.66

Para los dos casos mostrados (Figs. 5.65 y 5.66), el modelo matemático correspondiente a la viga consta de resortes helicoidales ubicados en sus extremos (Fig. 5.67), cuyas constantes son K_a y K_b ; pero, como la mayoría de los programas no contemplan este modelo, será necesario reemplazarlo por una barra equivalente con nudos rígidos en sus extremos, para lo cual, habrá que variar su rigidez al giro (K_{ab} , K_{ba}), su factor de transporte (f_{ab} , f_{ba}) y los momentos de fijación (u_{ab} , u_{ba}). A continuación, se trata de calcular las características de esa barra equivalente.

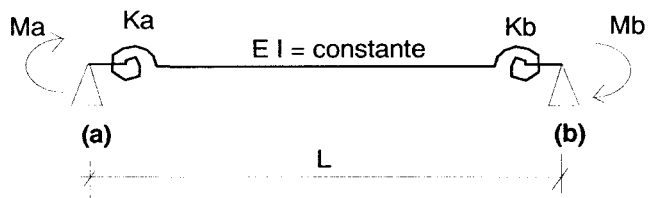
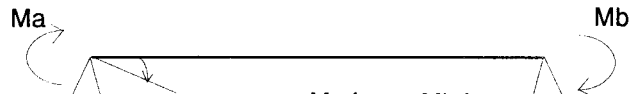


Fig. 5.67

Para una viga simplemente apoyada, la rotación en el extremo "a" se calcula como:

En tanto que la rotación del resorte se determina como:



$$\theta_a (\text{barra}) = \frac{M_a L}{3 E I} - \frac{M_b L}{6 E I} \quad (b)$$

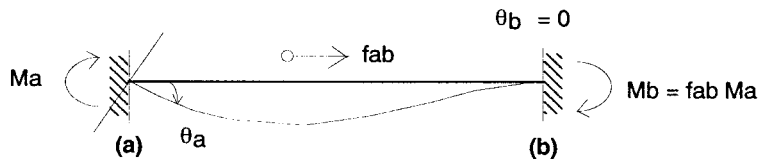
$$\theta (\text{resorte}) = M / K$$

Con lo cual, la rotación total en uno de los extremos será: $\theta = \theta (\text{resorte}) + \theta (\text{barra})$.

De esta manera, en (a): $\theta_a = M_a / K_a + M_a L / 3 E I - M_b L / 6 E I$ [1]

Similarmente, en (b): $\theta_b = M_b / K_b - M_a L / 6 E I + M_b L / 3 E I$ [2]

Para determinar la rigidez al giro (K_{ab}) y el factor de transporte (f_{ab}) en la barra equivalente (con nudos rígidos), será cuestión de imponer condiciones de borde a las ecuaciones [1] y [2], lo que conduce a:



En (2) para $\theta_b = 0$

$$f_{ab} = \frac{M_b}{M_a} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3 E I}{L K_b} \right)}$$

Luego en (1):

$$K_{ab} = \frac{M_a}{\theta_a} = \frac{4 E I}{L} \left[\frac{\left(1 + \frac{3 E I}{L K_b} \right)}{1 + \frac{4 E I}{L} \left(\frac{1}{K_a} + \frac{3 E I}{L K_a K_b} + \frac{1}{K_b} \right)} \right]$$

Notas:

- Para calcular f_{ba} y K_{ba} , se utilizan las mismas expresiones, pero deberá intercambiarse los subíndices "b" por "a".
- Cuando $K_a = K_b = 0$ (biela biarticulada), entonces: $K_{ab} = 0 = K_{ba}$
- Cuando $K_a = K_b \rightarrow \infty$ (nudo rígido), entonces: $K_{ab} = 4 E I / L = K_{ba}$ y $f_{ab} = \frac{1}{2} = f_{ba}$
- Cuando $K_a \rightarrow \infty$ y $K_b = 0$ (barra empotrada en "a" y articulada en "b"), entonces: $K_{ab} = 3 E I / L$, $f_{ab} = 0$, $K_{ba} = 0$.

5.6.4. Problemas Propuestos

1.- Calcule los momentos de empotramiento para la viga mostrada. Suponer:

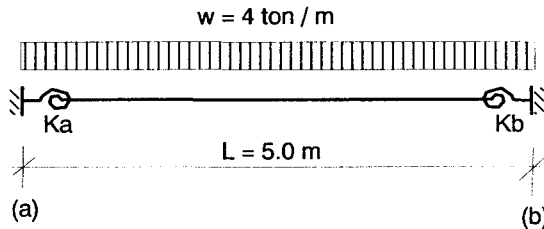
Constantes de resortes helicoidales: $K_a = K_b = 4000 \text{ ton} \cdot \text{m}$

Viga de concreto armado: $0.3 \times 0.5 \text{ m}$, $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

RESULTADO:

$$u_{ab} = -5.13 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

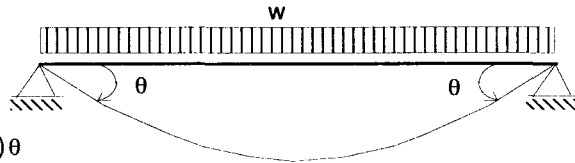
$$u_{ba} = 5.13 \text{ ton} \cdot \text{m}$$



INFORMACIÓN:

$$\theta = \frac{w L^3}{24 E I}$$

$$u_{ab} = -K_{ab} (1 - f_{ab}) \theta$$



2.- Calcule la segunda columna de la matriz de rigidez lateral ($R_{i2}, \delta_2 = 1$) para el muro en voladizo de albañilería confinada mostrado. La zapata, de ancho = 1 m y longitud = 3 m, apoya sobre un suelo flexible con coeficiente de subrasante igual a $10,000 \text{ ton} / \text{m}^2 \times \text{m}$.

Suponer:

Columnas de confinamiento:

$$E_c = 2'000,000 \text{ ton} / \text{m}^2$$

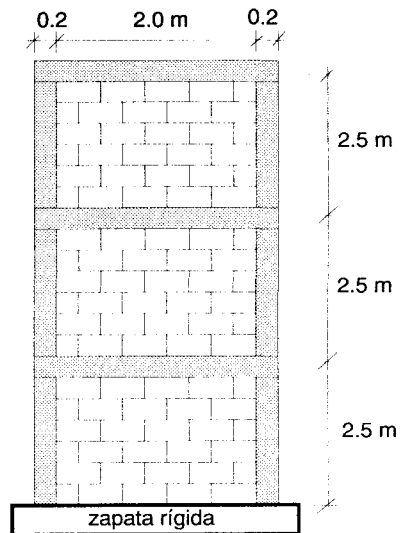
$$\text{espesor} = 0.15 \text{ m}$$

Muro de albañilería:

$$E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$$

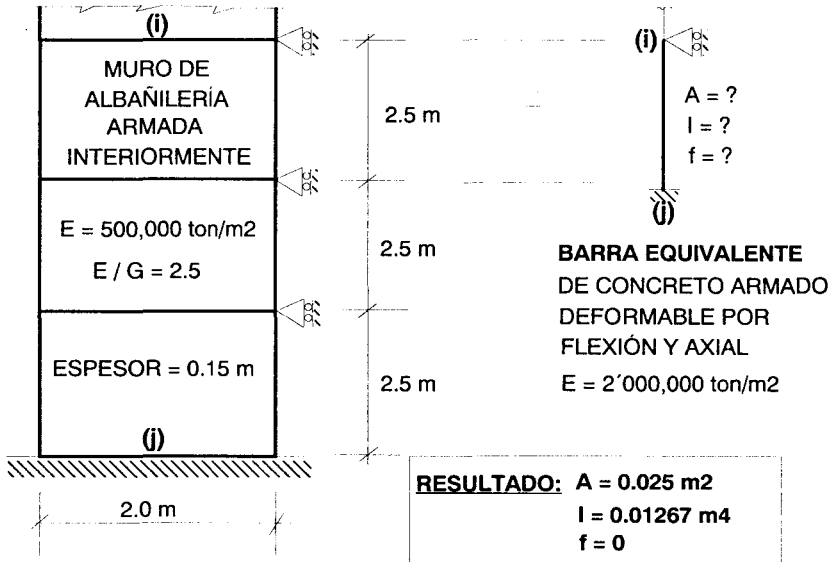
$$E_a / G_a = 2.5$$

$$\text{espesor} = 0.15 \text{ m}$$

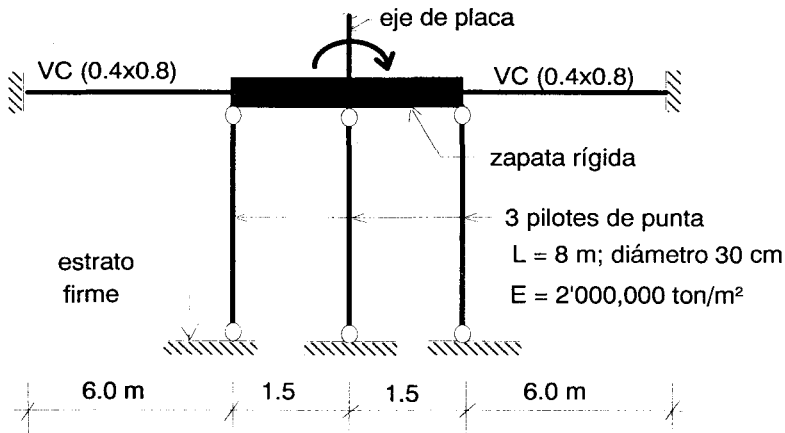


RESULTADO (ton/m): $R_{12} = -26054$ $R_{22} = 36199$ $R_{32} = -15332$

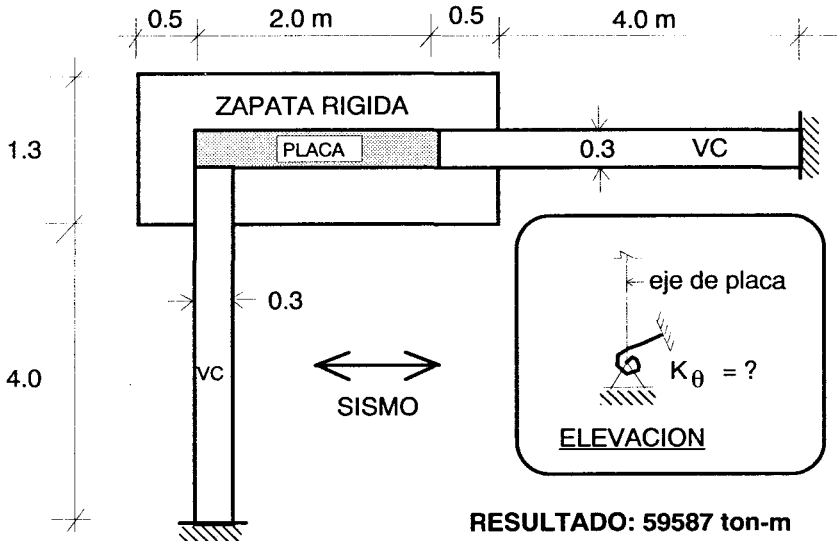
- 3.- Determine las características de la barra equivalente (área, momento de inercia y factor de forma de la sección transversal) que permita reemplazar al muro de tres sótanos mostrado.



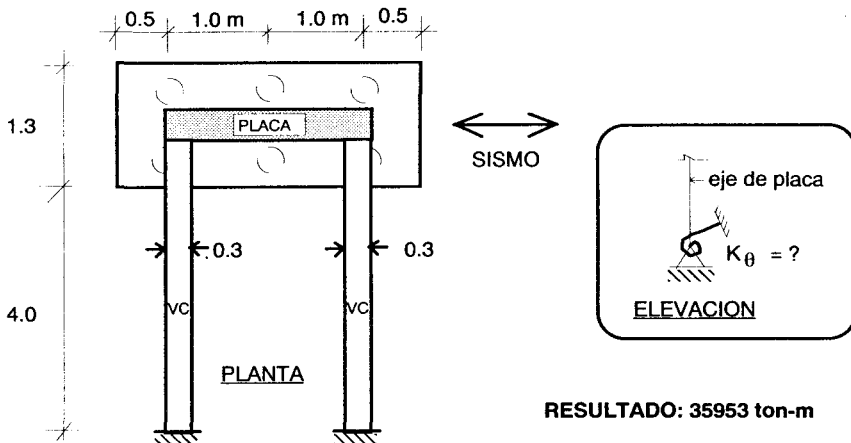
- 4.- Dibuje el DMF en una de las vigas de cimentación (VC) y calcule la carga axial en cada pilote, generados por un momento de 200 ton-m actuante en la base de la placa.



- 5.- Determine la rigidez al giro (K_θ) en la base de la placa cuya vista en planta se muestra. Suponga que la zapata es rígida y apoya sobre un suelo flexible con coeficiente de subrasante $10,000 \text{ ton/m}^3$; las vigas de cimentación (VC: $30 \times 60 \text{ cm}$) son de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$) y están biempotradas.



- 6.- Determine la rigidez al giro (K_θ) en la base de la placa cuya vista en planta se muestra. Suponga que la zapata es rígida y apoya sobre 6 pilotes de punta ($\phi = 0.2 \text{ m}$, $L = 8 \text{ m}$) hechos de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$); las vigas de cimentación (VC: $0.3 \times 0.6 \text{ m}$) son de concreto armado y están biempotradas.



5.7. Efectos de Temperatura

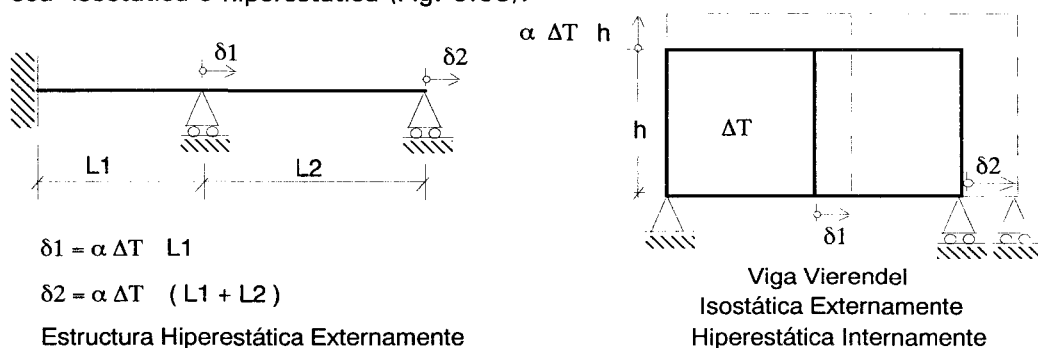
Los casos a estudiar en este acápite son:

- 1.- Cambio Uniforme de Temperatura; y,
- 2.- Cambio Diferencial (o Gradiente) de Temperatura

5.7.1. Cambio Uniforme de Temperatura

El cambio uniforme de temperatura se produce cuando el ambiente interno y externo de la estructura están sujetos al mismo incremento o decremento de temperatura (ΔT).

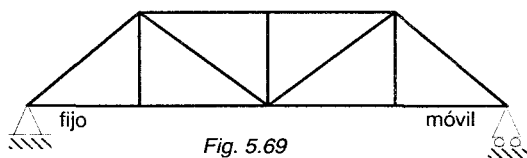
Para este caso, mientras que los apoyos no impidan la libre deformación de las barras (acortamiento o elongación), no se producirán esfuerzos sobre la estructura, así ésta sea isostática o hiperestática (Fig. 5.68).



Donde α es el coeficiente de dilatación térmica: α (acero) = $12 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}$
 α (concreto) = $5.5 \times 10^{-6} / ^\circ \text{F}$

Fig. 5.68. Estructuras Sujetas a un Incremento Uniforme de Temperatura.

Por esa razón, en los tijerales metálicos que cubren grandes luces (Fig 5.69), uno de los apoyos debe ser fijo, mientras que el otro debe ser móvil; de lo contrario, surgirán esfuerzos internos en las barras y la armadura tratará de empujar o jalar a los elementos de apoyo (columnas o muros).



El problema se presenta cuando los apoyos restringen el desplazamiento de las barras. Este problema puede resolverse manualmente aplicando el método de Cross Indirecto, tal como se muestra en la Fig. 5.70.

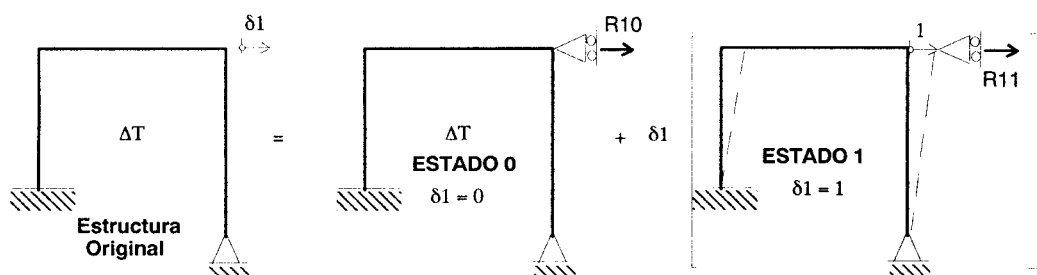


Fig. 5.70. Aplicación de Cross Indirecto para Solucionar una Estructura Sujeta a un Cambio Uniforme de Temperatura.

Problemas similares al el Estado 1 se han resuelto anteriormente, por lo que sólo se ilustrará como se resuelve el Estado 0.

Desplazamientos relativos:

$$\delta_{21} = -\alpha \Delta T L$$

$$\delta_{34} = 0$$

$$\delta_{23} = -\alpha \Delta T (h_2 - h_1)$$

Con lo cual, es posible calcular los momentos de empotramiento:

$$u_{21} = u_{12} = -6 E I_{12} \delta_{21} / h_1^2$$

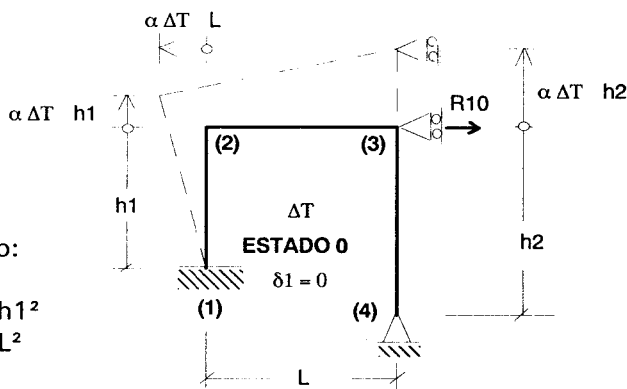
$$u_{23} = u_{32} = -6 E I_{23} \delta_{23} / L^2$$

Luego se realiza un Cross convencional (grados de libertad rotacionales), determinándose los momentos M_{ijo} , para posteriormente, por equilibrio, hallar R_{10} .

Debiéndose cumplir que: $R_{10} + \delta_1 R_{11} = 0$

Se obtiene: $\delta_1 = -R_{10} / R_{11}$

Finalmente: $M_{ij} = M_{ijo} + \delta_1 M_{ij1}$



5.7.2. Cambio Diferencial (o Gradiente) de Temperatura

El cambio diferencial de temperatura se produce cuando el ambiente externo de la estructura está sujeto a diferente temperatura que el ambiente interno, tal como el puente mostrado en la Fig. 5.71.

Una manera de atenuar el problema es colocando aislantes térmicos, por ejemplo, en los muros de una vivienda con calefacción interior, ubicada en una zona fría.

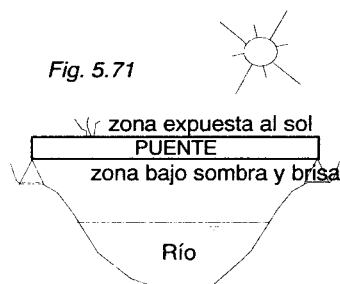
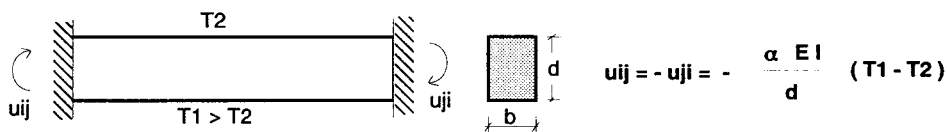
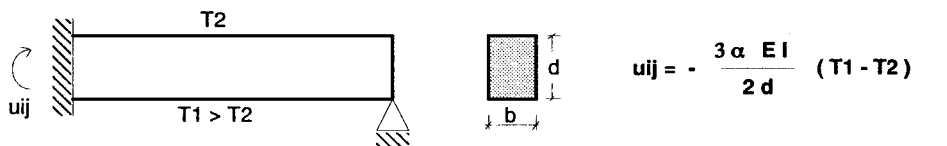


Fig. 5.71

De presentarse este problema, debe desdoblársele en la superposición de dos estados:

- a.- Cambio Diferencial de Temperatura. Donde los momentos de empotramiento se calculan aplicando las siguientes fórmulas (correspondientes a una viga de sección rectangular):



$$u_{ij} = -u_{ji} = - \frac{\alpha E I}{d} (T_1 - T_2)$$


$$u_{ij} = - \frac{3 \alpha E I}{2 d} (T_1 - T_2)$$

Estos momentos intervienen en el Estado 0 del Cross Indirecto.

- b.- Cambio Uniforme de Temperatura en el Eje de la Estructura. El cambio uniforme de temperatura en el eje de la estructura está dado por: $T = (T_1 + T_2)/2 - T_o$. Donde T_o corresponde a la temperatura promedio ambiental.

Este cambio uniforme de temperatura origina desplazamientos relativos entre los extremos de las barras, tal como se mostró en el acápite 5.7.1, que dan lugar a momentos de empotramiento que deben sumarse con los producidos por el cambio diferencial de temperatura, para posteriormente, resolver el Estado 0 del Cross Indirecto.

Cabe mencionar que por efectos de temperatura en ningún caso varían ni las rigideces al giro ni los factores de transporte, sólo se ven afectados los momentos de empotramiento.

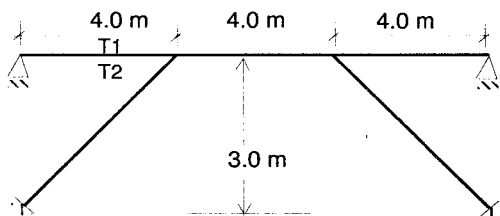
5.7.3. Problema Propuesto

La viga del puente mostrado está sujeta a un incremento diferencial de temperatura igual 20°C ($T_1 = 40^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$). Aplicando el método de Cross, dibuje su DMF. Suponer:

Vigas y Columnas de $0.5 \times 0.5 \text{ m}$

$\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

Temperatura promedio ambiental = $T_o = 30^\circ\text{C}$



6

ANÁLISIS SÍSMICO APROXIMADO DE EDIFICIOS

Este capítulo trata sobre el estudio de cuatro métodos que permiten resolver en forma aproximada a los pórticos de edificios sujetos a carga lateral (sismo o viento).

Estos métodos son: Portal,
Voladizo,
Muto, y
Ozawa

Los métodos del Portal, Voladizo y de Muto se utilizan principalmente para resolver pórticos compuestos por vigas y columnas ortogonales, mientras que el método de Ozawa se emplea para solucionar pórticos mixtos conformados por placas, vigas y columnas (Fig. 6.1), e incluso para el análisis sísmico traslacional de edificios.

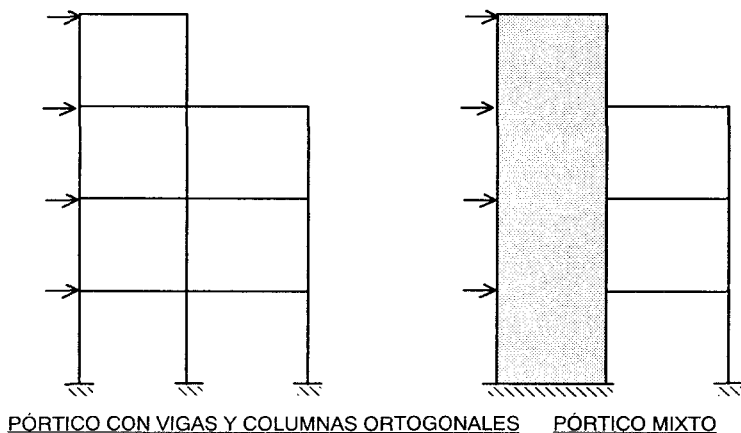


Fig. 6.1. Elevación de Dos Pórticos Planos.

Los métodos del Portal y Voladizo tan solo proporcionan como resultados los esfuerzos, y ambos deben ser utilizados estrictamente con fines de predimensionamiento o de verificación de esfuerzos. Sin embargo, conviene destacar que el método del Portal fue empleado para el diseño del edificio Empire State (uno de los más altos del mundo, ubicado en Nueva York), que si bien no tenía problemas sísmicos, ha podido soportar fuertes vientos; por supuesto que esto se hizo en una época donde se carecía de las herramientas computacionales existentes en la actualidad.

El método del Portal proporciona mejores resultados que el método del Voladizo cuando el pórtico es achatado, y en ambos métodos debe estimarse primeramente la posición del punto de inflexión (PI) en las columnas, tal como se muestra en la Fig. 6.2.

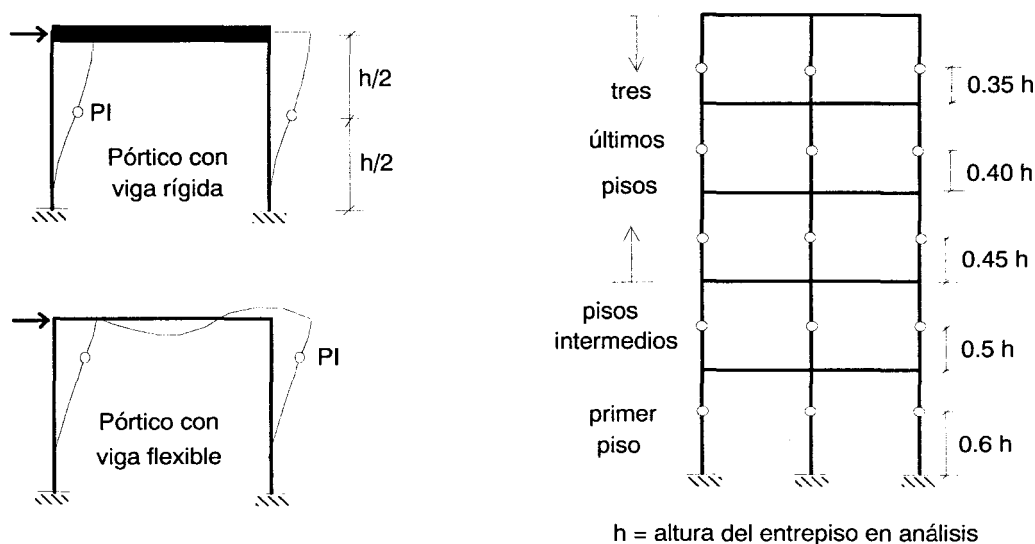


Fig. 6.2. Ubicación de los Puntos de Inflexión en los Métodos del Portal y Voladizo.

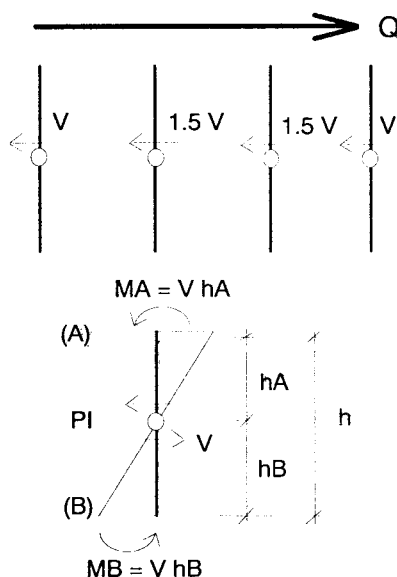
En cambio, el método de Muto contempla en cierta forma la deformación por flexión de las barras, lográndose mejores resultados que los proporcionados por los métodos del Portal o Voladizo, pudiéndose incluso obtener los desplazamientos laterales; por lo cual, sus resultados pueden ser empleados para el diseño de los edificios de mediana altura, donde los efectos de la deformación axial son despreciables.

En el método de Ozawa se hace uso de fórmulas muy sencillas de programar en calculadoras de bolsillo y puede aplicarse no solo al caso de los edificios de concreto armado, sino también de albañilería. Este método no contempla las deformaciones axiales de las barras (sólo flexión y corte), por lo que sus resultados (esfuerzos y desplazamientos) deben emplearse sólo para el diseño de edificaciones de mediana altura (máximo 10 pisos).

6.1. Método del Portal

Luego de haberse ubicado los puntos de inflexión en las columnas (Fig. 6.2), y conociéndose por equilibrio de fuerzas laterales la fuerza cortante que existe en cada entrepiso (Q) correspondiente al pórtico en análisis, los pasos que se siguen ordenadamente en el método del Portal son:

- 1.- Asumir que las columnas internas absorben 1.5 veces el cortante que toman las columnas externas; luego, por equilibrio de fuerzas horizontales, se calcula el cortante en cada columna.
- 2.- Calcular los momentos flectores en las columnas (M_A y M_B) y graficar su DMF.
- 3.- Determinar los momentos en las vigas, repartiendo el momento desequilibrado en los nudos proporcionalmente a las rigideces de las vigas ($1/L$) y graficar su DMF.
- 4.- Evaluar el cortante en las vigas por equilibrio.
- 5.- Calcular la fuerza axial en las columnas.



6.1.1. Ejemplo de Aplicación

Empleando el método del Portal, se resolverá el pórtico mostrado en la Fig. 6.3. En este ejemplo, se desconoce las características geométricas de las secciones transversales de las vigas y columnas.

En este caso, para cada entrepiso se tiene: $Q = V + 1.5V + V = 3.5V \rightarrow V = Q/3.5$; donde: $Q_1 = 5 + 10 = 15 \text{ ton}$ y $Q_2 = 10 \text{ ton}$.

Luego de graficarse el DMF de las columnas, los momentos desequilibrados en los nudos centrales se han repartido sobre las vigas en proporción a la inversa de su longitud ($1/5$ y $1/6$), mientras que los momentos en los nudos externos de las vigas se han obtenido por equilibrio en forma directa.

En la Fig. 6.3A se muestra el DMF (en ton-m), las fuerzas cortantes (ton) en vigas y columnas, y la fuerza axial de tracción en la columna extrema izquierda, la misma que se obtiene acumulando (de arriba hacia abajo) las fuerzas cortantes existentes en las vigas del tramo izquierdo.

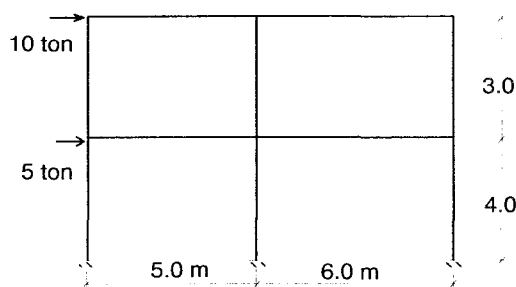


Fig. 6.3

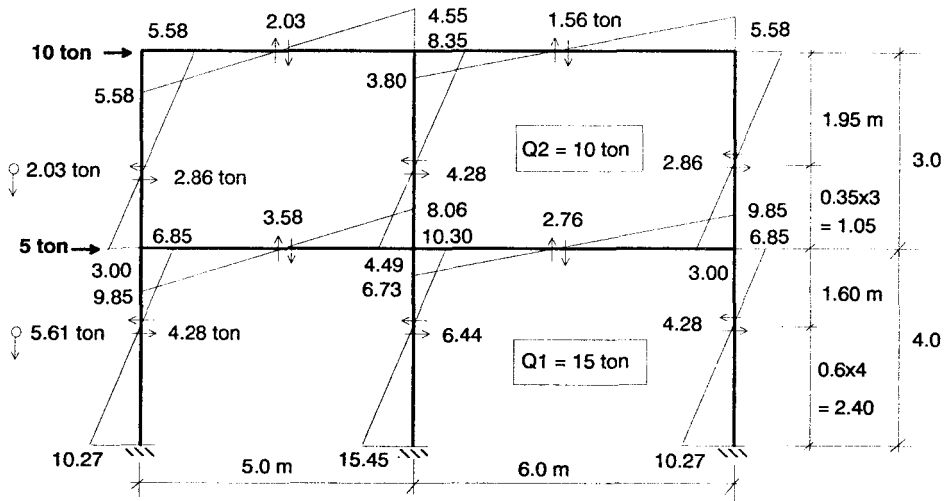


Fig.
6.3A.

6.2. Método del Voladizo

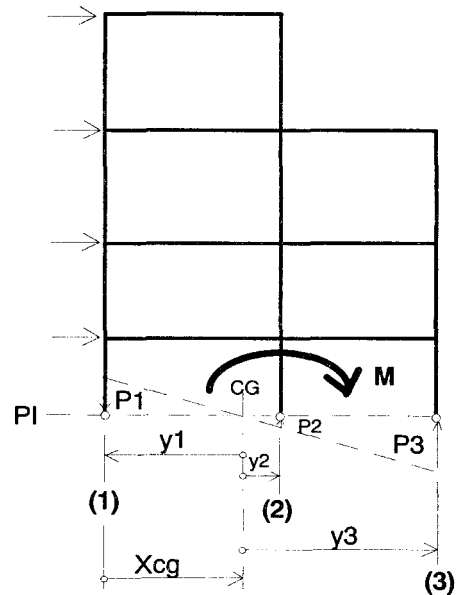
En este método se supone que el pórtico se comporta como una gran viga en voladizo, cuyas fibras son los ejes de columnas. Los pasos que se siguen ordenadamente son:

- 1.- Determinar el centroide (CG) de las áreas (A_i) de las columnas que conforman cada entrepiso. Con fines de predimensionamiento puede asumirse: $A_i = \text{constante}$, con lo cual se obtiene:

$$X_{cg} = \frac{\sum (A_i X_i)}{\sum A_i} = \frac{\sum (X_i)}{N}$$

Donde "N" es el número de columnas que conforman al entrepiso en análisis.

- 2.- Calcular el momento de inercia (despreciando la inercia propia) del grupo de columnas respecto al CG. Por Steiner: $I = \sum A_i y_i^2$; donde $y_i = X_i - X_{cg}$ = distancia entre el eje de columna "i" y CG.

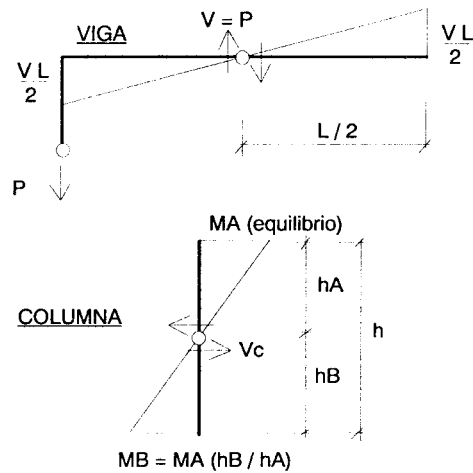


- 3.- Evaluar el momento volcante (M) producido por las cargas laterales. Este momento se calcula a la altura del PI de cada entrepiso (Fig. 6.2), para que de esta manera "M" sea equilibrado sólo por las fuerzas axiales " P_i " que se desarrollan en las columnas, de este modo, no intervienen los momentos hiperestáticos de las columnas.

- 4.- Calcular las fuerzas axiales acumuladas en cada columna. Por Resistencia de Materiales: $\sigma_i = M y_i / I = P_i / A_i$, con lo cual: $P_i = M A_i y_i / \sum A_i y_i^2$. Si se asume $A_i = \text{constante}$, entonces se obtiene:

$$P_i = M y_i / \sum y_i^2$$

- 5.- Por equilibrio hallar la fuerza cortante en las vigas (V); luego, asumiendo que el PI de las vigas cae al centro de su longitud, se determina los momentos en las vigas: $M_v = V L/2$ y se dibuja su DMF.



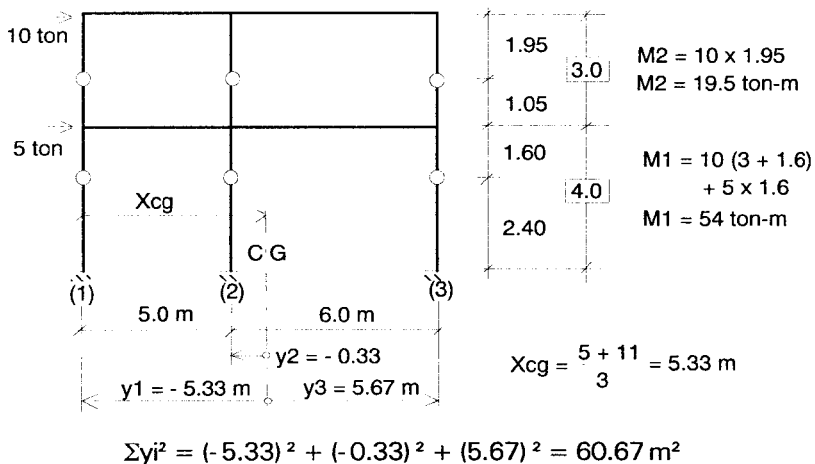
- 6.- Calcular los momentos en las columnas respetando la posición del PI asumida inicialmente. Este cálculo se efectúa de arriba hacia abajo. El momento M_A se determina por equilibrio de momentos en el nudo superior, mientras que el momento en el extremo inferior se evalúa aplicando la expresión $M_B = M_A (h_B / h_A)$.

- 7.- Finalmente, se calcula la fuerza cortante en cada columna: $V_c = (M_A + M_B) / h$.

El proceso descrito es inverso al del Portal. Así, mientras que en el método del Portal el primer paso es hallar la fuerza cortante en las columnas, en el método del Voladizo éste es el último paso. Sin embargo, el método del Voladizo permite calcular las fuerzas axiales en las columnas en la etapa inicial, lo que es necesario para predimensionarlas.

6.2.1. Ejemplo de Aplicación

Resolver el pórtico mostrado en la Fig. 6.3 mediante el método del Voladizo.

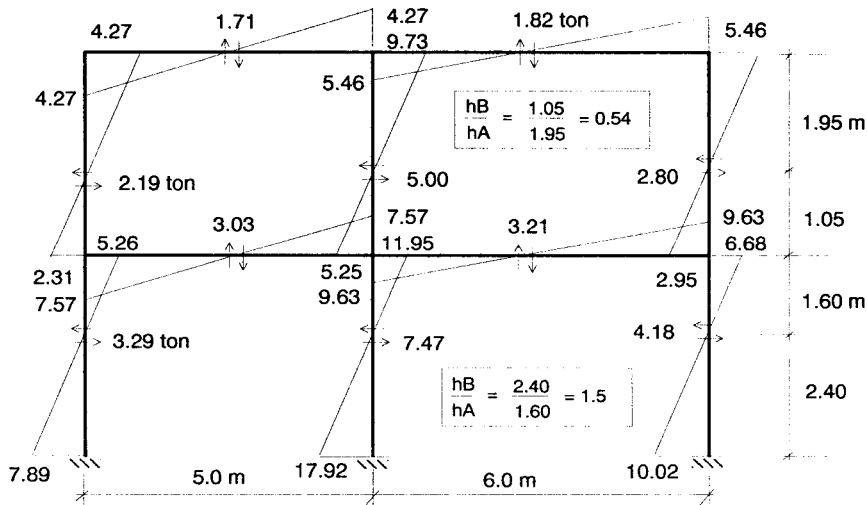
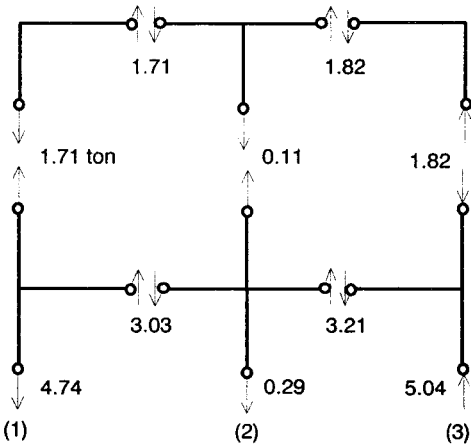


Luego: $P_i = M_{yi} / 60.67$

Cargas Axiales Acumuladas P_i
(ton, + en compresión)

Entrepiso Eje de Col.	1 $M1=54$	2 $M2=19.5$
1 ($y1=-5.33$)	-4.74	-1.71
2 ($y2=-0.33$)	-0.29	-0.11
3 ($y3= 5.67$)	5.04	1.82
Σ	0.00	0.00

Nótese que en cada entrepiso por equilibrio de fuerzas verticales: $\Sigma P_i = 0$



Cabe indicar que este pórtico fue resuelto mediante el método de Muto y también con el programa EDIFICIO (matricial), para lo cual se trabajó con vigas de 0.3x0.5 m y columnas de 0.3x0.4 m. La mayor diferencia de momentos se produjo en la base inferior de la columna central del primer piso, a continuación, entre paréntesis se muestra la diferencia porcentual respecto al análisis matricial de los momentos obtenidos en ese nudo.

M (Portal) = 15.45 ton-m (27%)
 M (Muto) = 12.52 ton-m (3%)

M (Voladizo) = 17.92 ton-m (48%)
 M (EDIFICIO) = 12.13 ton-m

De esta manera, puede decirse que el método del Portal proporciona mejores resultados que el del Voladizo cuando el pórtico es achatado.

6.3. Método de Muto

El método de Muto se utiliza para resolver en forma aproximada a los pórticos de edificios compuestos por vigas y columnas ortogonales, sujetos a carga lateral producidas por el viento o los sismos. El método contempla en cierta forma la deformación por flexión de las barras, con lo cual, los resultados que se obtienen son mucho más precisos que los calculados mediante el método del Portal o del Voladizo, e incluso pueden utilizarse para el diseño de estructuras de mediana altura, donde los efectos de la deformación axial son despreciables.

6.3.1. Rigidez Lateral

Supongamos la siguiente columna biempotrada, sujeta a un desplazamiento lateral

Por equilibrio: $V = 12 E I / h^3$

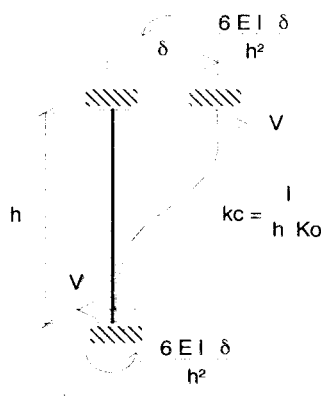
Siendo: $k_c = I / h K_o$

Se obtiene: $V = (12 E K_o / h^2) k_c$

Multiplicando por: $a = 1$

Resulta: $V = (12 E K_o / h^2) (a k_c)$

Se define a la Rigidez Lateral Absoluta (K o D_a) como aquella fuerza cortante (V) capaz de originar un desplazamiento lateral unitario, relativo entre los extremos de la columna, bajo esta definición se obtiene:



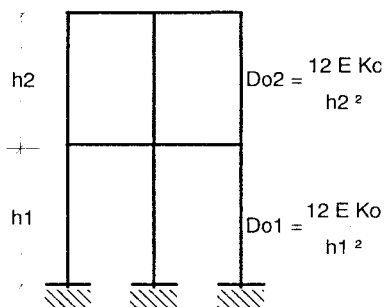
Rigidez Lateral Absoluta = $K = D_a = V/d = (12 E K_o / h^2) a k_c = D_o (a k_c) = D_o D$

Donde D_o es la denominada Rigidez Lateral Estándar (con unidades de fuerza entre longitud, usualmente ton / cm) calculada como:

Rigidez Lateral Estándar = $D_o = 12 E K_o / h^2$

La Rigidez Lateral Estándar depende de la altura de cada columna, pero, como usualmente las columnas que conforman un entrepiso tienen la misma altura, entonces esas columnas tendrán el mismo valor D_o . Por otro lado, se define a la Rigidez Lateral Relativa (adimensional) al valor:

Rigidez Lateral Relativa = $D = K/D_o = a k_c$



El coeficiente "a" contempla el grado de empotramiento que tiene la columna en sus extremos; para el caso que la columna esté biempotrada (vigas muy rígidas) el valor de "a" es 1. En cambio, si la columna está biarticulada "a" es cero (no tiene rigidez lateral, o no opone resistencia al desplazamiento lateral); por otro lado, si la columna está articulada en su base (por ejemplo, zapata sobre un suelo muy blando) y empotrada en su extremo superior (vigas rígidas), se demostrará que "a" es $\frac{1}{4}$

Por equilibrio: $V = 3 E I \delta / h^2 = 12 E K_o k_c \delta / (4 h^2)$

Siendo: $D_o = 12 E K_o / h^2$

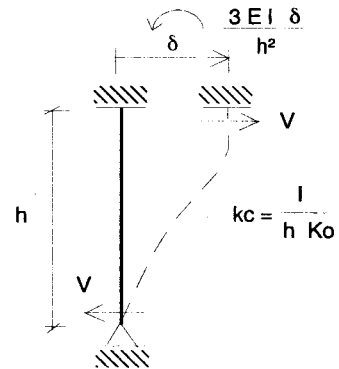
Resulta: $V = D_o (\frac{1}{4} k_c) \delta$

Con lo cual: $K = V / \delta = D_o (\frac{1}{4} k_c)$

Como: $K = D_o (a k_c)$

Se concluye que: $a = \frac{1}{4}$

Cabe indicar que pese a que la columna esté articulada en su base, en el método de Muto siempre se trabaja con un coeficiente de rigidez a la flexión $k_c = I / (h K_o)$.



El valor "a" está comprendido entre 0 y 1 ($0 \leq a \leq 1$), y la máxima rigidez lateral (K) se obtiene cuando

la columna está biempotrada; si esa columna se articulase en su base (por ejemplo, por la formación de una rótula plástica) K se reduce en 75%,

y si luego se articulase en su extremo superior, K se degrada en 100%, convirtiéndose el sistema en un mecanismo inestable (Fig. 6.4).

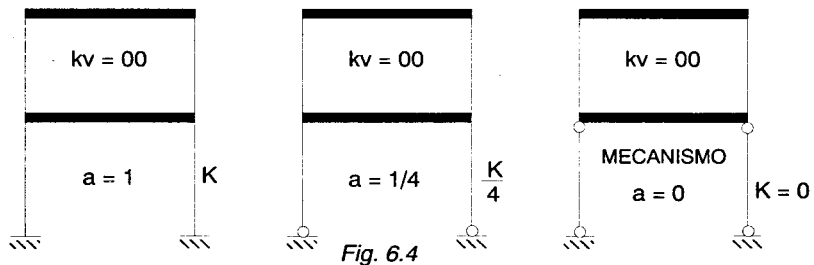


Fig. 6.4

Tal como se ha definido la rigidez lateral, se tendría que ella resulta dependiente del sistema de carga lateral actuante; sin embargo, Muto concluye que en

los pórticos compuestos por vigas y columnas, la distribución y magnitud de las cargas laterales no afecta

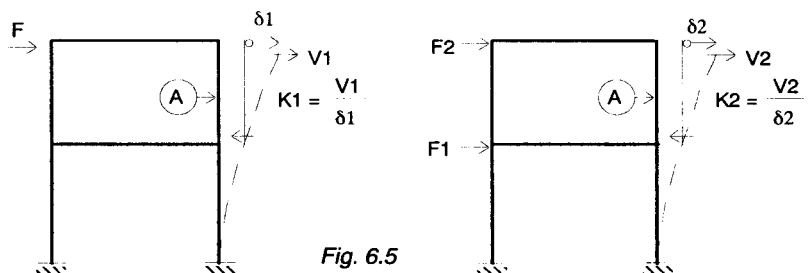
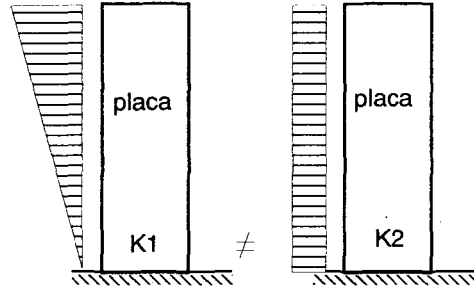


Fig. 6.5

el valor de K . Por ejemplo, si se calculase mediante Cross el desplazamiento y la fuerza cortante en la columna "A" del pórtico mostrado en la Fig. 6.5, para dos estados de carga, resulta $K_1 \approx K_2 \approx K$.

Es decir, las variables que intervienen en mayor grado en el cálculo de K son las propiedades elásticas y geométricas de la columna, así como el grado de empotramiento que tiene en sus extremos. Esto no es cierto para el caso de Placas, cuya rigidez lateral depende fuertemente de la distribución que adoptan las cargas laterales.



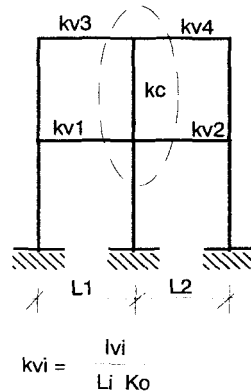
CÁLCULO DEL COEFICIENTE "a"

A través de una serie de comparaciones contra resultados obtenidos mediante métodos matriciales, Muto recomienda emplear las siguientes fórmulas para calcular "a":

1.- Columnas que Pertenecen a Entrepisos Superiores al Primero

Observaciones:

- Si $k \rightarrow \infty \Rightarrow a = 1$
- El método es válido sólo cuando $k \geq 0.2$, de lo contrario, la fórmula resulta imprecisa. El valor k es menor que 0.2 cuando las vigas son muy flexibles en relación con la columna (vigas chatas), o cuando la columna trata de transformarse en una placa.



$$a = \frac{k}{2 + k}$$

$$k = \frac{\sum kv}{2 kc}$$

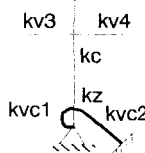
$$\sum kv = kv1 + kv2 + kv3 + kv4$$

2.- Subcasos para las Columnas del Primer Piso

- Base Semiempotrada

Aparte de existir vigas de cimentación (VC), la rigidez aportada por los pilotes o el suelo de cimentación (K_θ) se contempla mediante la expresión:

$$kz = K_\theta / (4 E Ko)$$



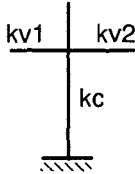
$$a = \frac{k}{2 + k}$$

$$k = \frac{\sum kv}{2 kc}$$

$$\sum kv = kvc1 + kvc2 + kv3 + kv4 + kz$$

Cuando la base de la columna esté semiempotrada, el valor que se obtenga de "a", deberá ser inferior al caso en que la base esté empotrada (subcaso "b").

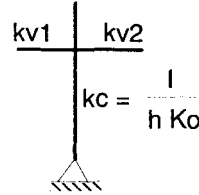
b.- Base Empotrada



$$a = \frac{0.5 + k}{2 + k}$$

$$k = \frac{kv1 + kv2}{kc}$$

c.- Base Articulada



$$a = \frac{0.5 k}{1 + 2 k}$$

$$k = \frac{kv1 + kv2}{kc}$$

6.3.2. Cálculo de Desplazamientos y Cortantes. Columnas en Paralelo

La condición para que un conjunto de columnas estén dispuestas en paralelo es que su desplazamiento relativo (δ) sea único. Esto ocurre en los edificios compuestos por losas de piso axialmente rígidas (aligerados o losas macizas), denominadas "diafragmas rígidos", donde, al existir monolitismo entre las vigas y la losa (ya que el concreto de ambos elementos se vacía en simultáneo), las vigas también serán rígidas axialmente.

Estudiando un entrepiso cualquiera del pórtico mostrado en la Fig. 6.6, y llamando Q al cortante de entrepiso (valor conocido por equilibrio de fuerzas laterales), se tratará de reducir el conjunto de columnas a un sólo eje vertical, cuya rigidez de entrepiso sea la suma de las rigideces laterales de las columnas que conforman ese entrepiso.

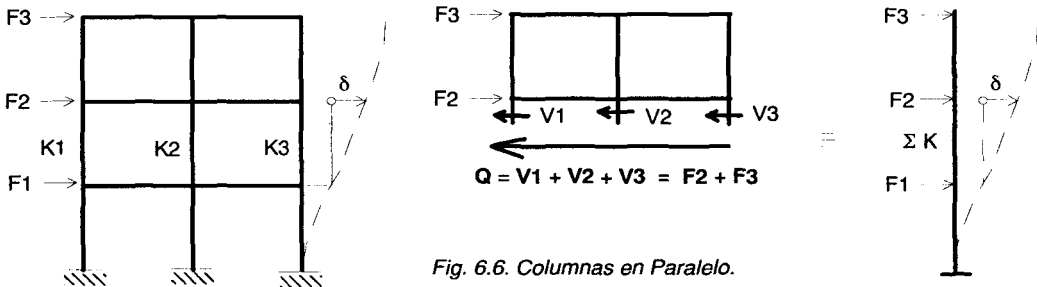


Fig. 6.6. Columnas en Paralelo.

Como $V_i = K_i \delta$, entonces: $Q = V_1 + V_2 + V_3 = K_1 \delta + K_2 \delta + K_3 \delta = \delta \Sigma K_i$, de la cual puede obtenerse:

$$\delta = Q / \Sigma K_i$$

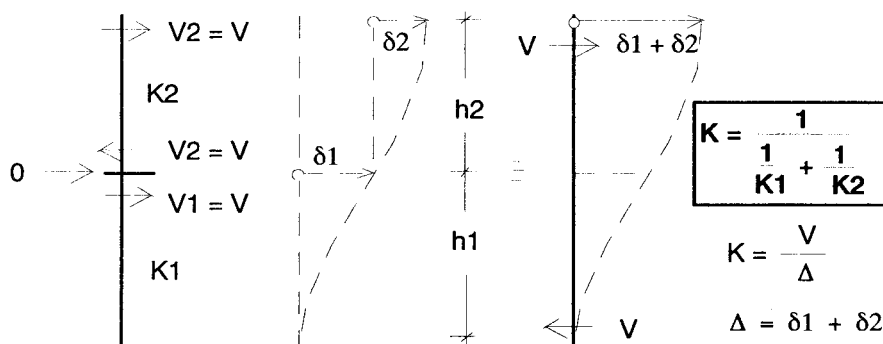
Luego, la fuerza cortante en cada columna se calcula como:

$$V_i = K_i \delta = Q (K_i / \Sigma K_i)$$

Es decir, cada columna absorbe fuerza cortante en proporción a su rigidez lateral. Por otro lado, puede observarse que el desplazamiento del entrepiso (δ) pueden obtenerse si se modela al pórtico como un sólo eje vertical, cuya rigidez de entrepiso sea ΣK_i .

6.3.3. Pórticos con Mezzanine y Vigas de Entrepiso. Columnas en Serie

La condición para que dos o más columnas (ubicadas una sobre la otra) estén dispuestas en serie es que la fuerza cortante en ellas sea única, lo que implica que la fuerza actuante a la altura del nivel que separa a las columnas es nula. Este sistema puede reducirse a una sólo columna equivalente de doble altura de la siguiente manera:



En el primer piso: $V_1 = V = K_1 \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = V / K_1$

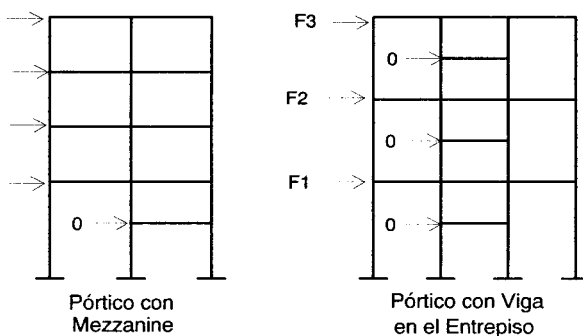
En el segundo piso: $V_2 = V = K_2 \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = V / K_2$

Luego: $\Delta = \delta_1 + \delta_2 = V / K_1 + V / K_2 = V (1 / K_1 + 1 / K_2)$

De la cual: $K = V / \Delta = 1 / [1 / K_1 + 1 / K_2]$

En general para columnas en serie se tiene: $K = 1 / \Sigma (1 / K_i)$

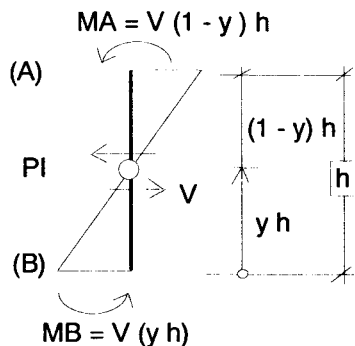
Este caso de columnas en serie puede presentarse en pórticos con mezzanine, donde a la altura del mezzanine la masa es pequeña, así como la aceleración sísmica, con lo cual, la fuerza de inercia en ese nivel es prácticamente despreciable con relación a las que existen en los niveles superiores. También puede presentarse en pórticos con viga intermedia en el entrepiso, que sirve como apoyo del descanso de alguna escalera, al ser su masa pequeña, la fuerza de inercia será prácticamente nula en ese nivel.



6.3.4. Determinación de Esfuerzos

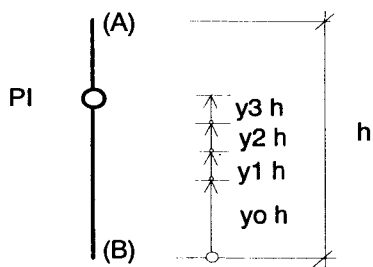
Conocido el cortante que absorbe una columna (V), Muto proporciona unas Tablas (ver el Anexo 2) que permiten ubicar la posición del punto de inflexión (PI). Luego, siguiendo un proceso similar al explicado para el método del Portal, se determinan los esfuerzos:

- Graficar el DMF en las columnas.
- Calcular los momentos en las vigas, repartiendo el momento desequilibrado en los nudos en proporción a las rigideces de las vigas (k_v), y graficar su DMF.
- Determinar la fuerza cortante en las vigas por equilibrio.
- Evaluar la fuerza axial en las columnas.



Ubicación del Punto de Inflexión (PI) en las Columnas

Este punto se localiza a una altura medida a partir de la base de la columna igual a " $y h$ ", el valor " y " se determina como $y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$; donde " y_0 " es a la altura estándar del PI, " y_1 " es una corrección por variación de rigideces de las vigas, mientras que " y_2 " e " y_3 " corresponden a correcciones por diferencias de alturas entre los pisos consecutivos. Como usualmente los pisos son típicos, sólo se calcula " y_0 ".

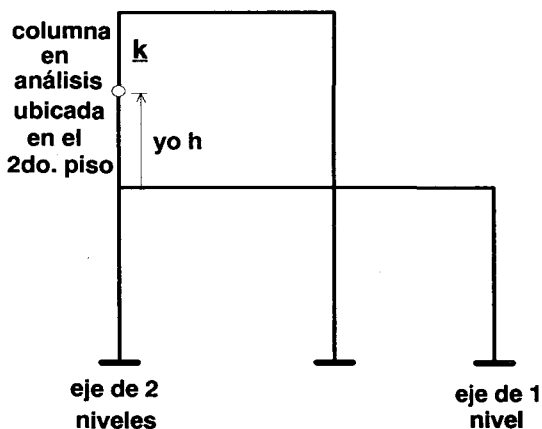


a.- Altura Estándar del PI ($y_0 h$). Tabla 1A

Muto elaboró la Tabla 1A, suponiendo que las alturas de los entrepisos eran iguales, así como que las rigideces de las vigas no variaban y que la distribución de las fuerzas laterales era triangular.

El cálculo de " y_0 " se efectúa en cada eje vertical de columnas.

Para ingresar a la Tabla 1A, es necesario saber cuántos niveles tiene el eje de la columna en análisis, en que entrepiso está ubicada y el valor de k .



b.- Corrección "y1", Tabla 2

Esta corrección se realiza sólo cuando las vigas que llegan al extremo superior (A) de la columna tienen distinta rigidez a flexión que las inferiores (B). Para calcular "y1" es necesario determinar el parámetro α_1 y k , para luego ingresar a la Tabla 2, anotándose que:

- Si $\alpha_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 0$ (es lo usual).
- Para el primer piso "y1 = 0", salvo que la base esté semiempotrada.
- Si $\alpha_1 > 1$, se ingresa a la Tabla 2 con la inversa de α_1 y se cambia de signo al valor "y1"; es decir, el PI se corre hacia abajo.

kv1	kv2
(A)	k
$\alpha_1 = \frac{kv_1 + kv_2}{kv_3 + kv_4}$	
kv3	kv4
(B)	

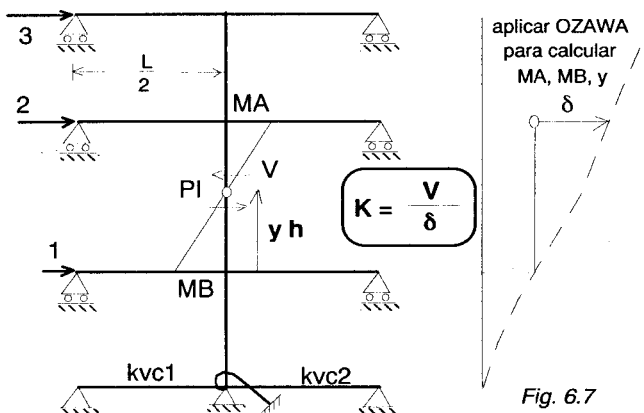
c.- Correcciones "y2", "y3", Tabla 3

Estas correcciones se efectúan cuando la columna superior o inferior a la que está en estudio, tienen distintas alturas; para esto, es necesario calcular los parámetros α_2 , α_3 y k . Observaciones:

- Si $\alpha_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$
- Si $\alpha_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 0$
- Para columnas del primer piso $\Rightarrow y_3 = 0$
- Para columnas del último piso $\Rightarrow y_2 = 0$

	hs	$\alpha_2 = \frac{hs}{h}$
columna en análisis	k h	
	hi	$\alpha_3 = \frac{hi}{h}$

Nota: Si se dispone de una calculadora programable, lo más adecuado es evaluar la rigidez lateral K y la posición del punto de inflexión (PI) en la columna, resolviendo el modelo mostrado en la Fig. 6.7 mediante el método de Ozawa; donde las alturas y rigideces de las columnas pueden cambiar, así como las rigideces de las vigas; también, la base puede ser flexible (con resorte helicoidal). En este modelo se supone que el PI de las vigas está ubicado al centro de su longitud, y se ha adoptado una distribución triangular de cargas laterales cuyas magnitudes son conocidas.



6.3.5. Ejemplos de Aplicación

EJEMPLO 1. Resolver el pórtico mostrado en la Fig. 6.8. Suponer:

$$E = 210 \text{ ton/cm}^2$$

Vigas: 30 x 60 cm

Columnas: 30 x 45 cm

$$K_0 = 760 \text{ cm}^3$$

COEFICIENTE DE RIGIDEZ
A FLEXIÓN (k)

$$k = I / (L K_0)$$

Columna con base rotulada:

$$k_c = 30 \times 45^3 / (12 \times 200 \times 760) = 1.5$$

Vigas:

$$k_v = 30 \times 60^3 / (12 \times 600 \times 760) = 1.18$$

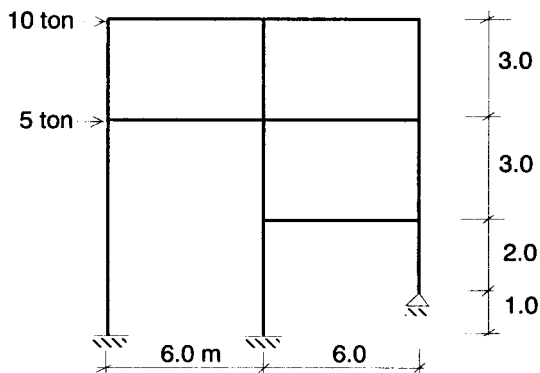
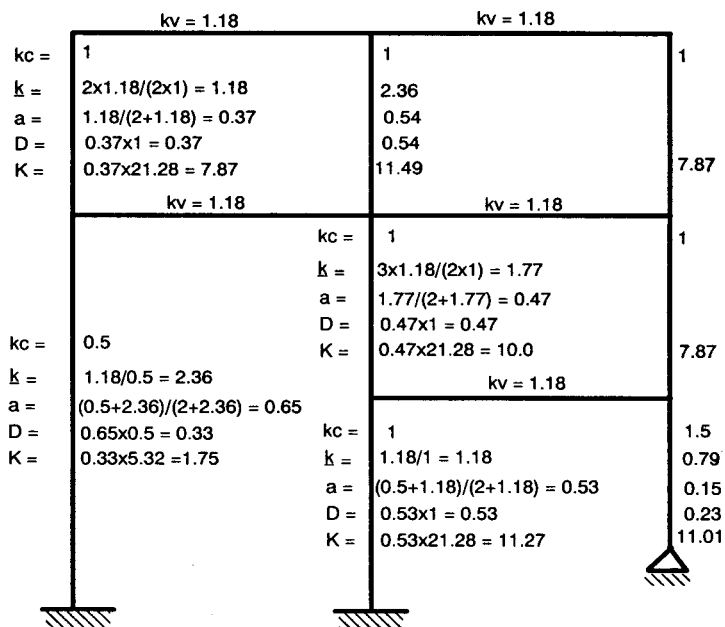


Fig. 6.8

RIGIDEZ LATERAL
ABSOLUTA (K):

$$D = a k_c$$

$$K = D D_0 \text{ (ton/cm)}$$



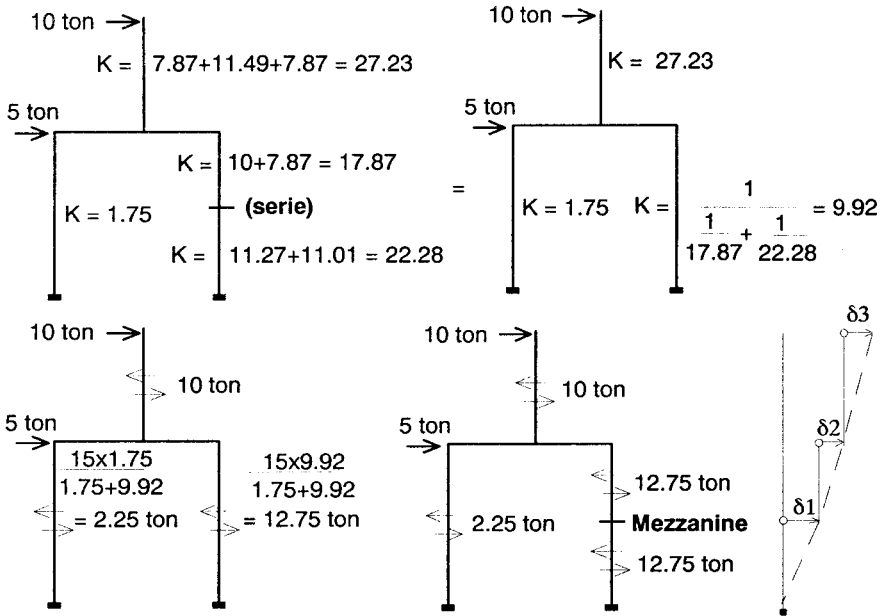
$$D_0 = 12 E K_0 / h^2$$

$$\text{Para } h = 300 \text{ cm} \rightarrow D_0 = 12 \times 210 \times 760 / 300^2 = 21.28 \text{ ton/cm}$$

$$\text{Para } h = 600 \text{ cm} \rightarrow D_0 = 12 \times 210 \times 760 / 600^2 = 5.32 \text{ ton/cm}$$

$$\text{Para } h = 200 \text{ cm} \rightarrow D_0 = 12 \times 210 \times 760 / 200^2 = 47.88 \text{ ton/cm}$$

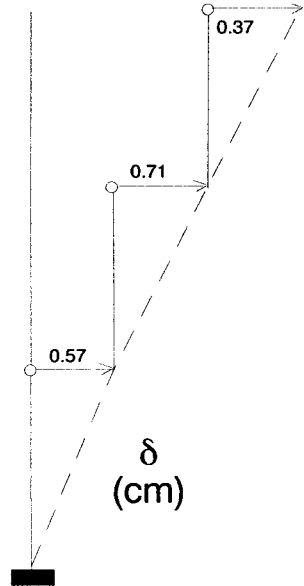
CÁLCULO DE δ . Trabajando con los conceptos de columnas en paralelo y en serie:



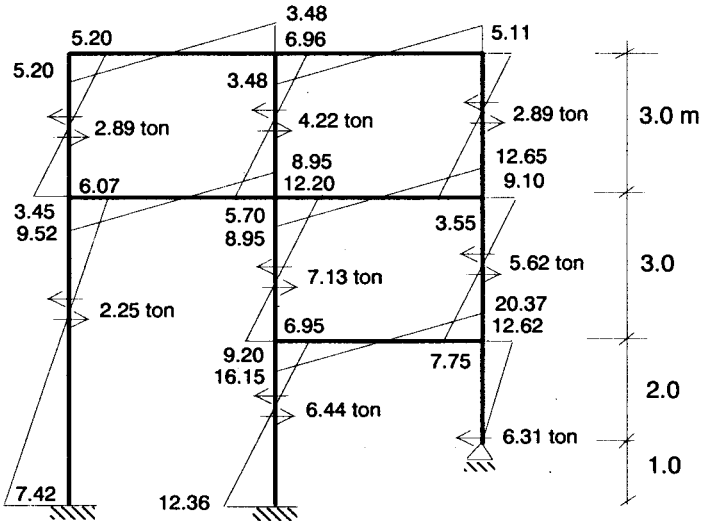
$\delta_1 = 12.75 / 22.28 = 0.57$ cm; $\delta_2 = 12.75 / 17.87 = 0.71$ cm; $\delta_3 = 10 / 27.23 = 0.37$ cm

CÁLCULO DE "y", " $V_i = K_i \delta_i = Q K_i / K_i$ "

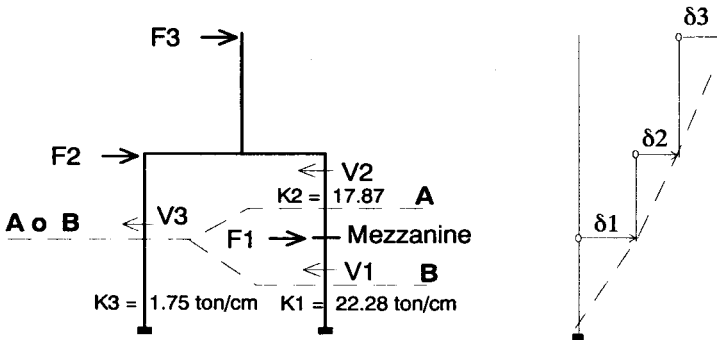
$k = 1.18$	$k = 2.36$	$k = 1.18$
$y_0 = 0.45$	$y_0 = 0.45$	$y_0 = 0.41$
$\alpha_3 = 6/3 \rightarrow y_3 = -0.05$	$y = 0.45$	$y = 0.41$
$y = 0.45 - 0.05 = 0.4$	$K = 11.49$	$K = 7.87$
$K = 7.87$	$V = 4.22$ ton	$V = 2.89$
$V = 2.89$ ton		
$k = 2.36$	$k = 1.77$	$k = 1.18$
$y_0 = 0.55$	$y_0 = 0.49$	$y_0 = 0.46$
$\alpha_1 = 2 \rightarrow y_1 = -0.06$	$y = 0.49 - 0.06 = 0.43$	$\alpha_3 = 2/3$
$\alpha_2 = 3/6 \rightarrow y_2 = 0$	$K = 10.0$	$y_3 = 0$
$y = 0.55 + 0 = 0.55$	$V = 7.13$ ton	$y = 0.46$
		$K = 7.87$
$K = 1.75$	$k = 1.18$	$V = 5.62$
$V = 2.25$ ton	$y_0 = 0.64$	
	$y = 0.64$	$y = 0$
	$K = 11.27$	$K = 11.01$
	$V = 6.44$ ton	$V = 6.31$



DMF (ton-m):



De haber existido una fuerza (F_1) aplicada a la altura del Mezzanine del ejemplo anterior, tendría que procederse aplicando las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de desplazamientos para calcular δ_1 y δ_2 , tal como se ilustra a continuación.



Corte A-A: $F_2 + F_3 = V_2 + V_3 = K_2 \delta_2 + K_3 (\delta_1 + \delta_2) \dots (1)$

Corte B-B: $F_1 + F_2 + F_3 = V_1 + V_3 = K_1 \delta_1 + K_3 (\delta_1 + \delta_2) \dots (2)$

De (1) y (2) se despeja δ_1 y δ_2 ; luego, la fuerza cortante que absorbe cada columna se calcula aplicando: $V_i = K_i \delta_i$.

Cabe mencionar que este problema resultó un tanto complicado de analizar, debido a que la intención fue estudiar una serie de casos particulares como fueron: una estructura con mezzanine, base articulada y columnas de diferentes alturas; sin embargo, para los casos convencionales resulta muy simple aplicar el método de Muto, tal como se verá en el segundo ejemplo.

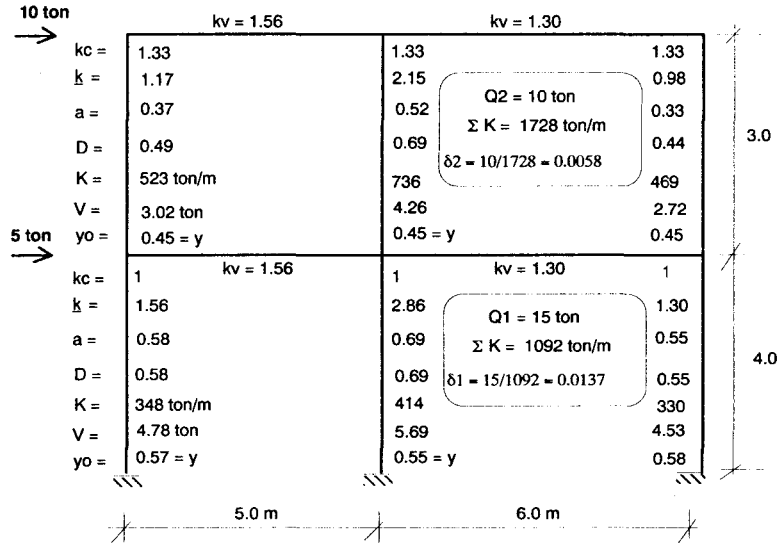
EJEMPLO 2. Aplicando el método de Muto, analizar al pórtico resuelto mediante los métodos del Portal y Voladizo (Fig. 6.3).

Asumir:

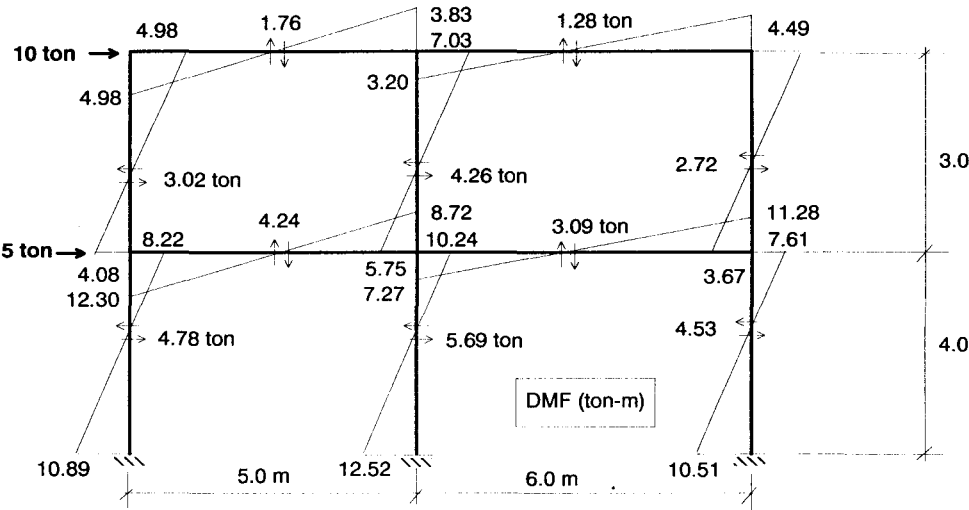
Vigas: 0.3 x 0.5 m
Cols.: 0.3 x 0.4 m

$K_o = 0.0004 \text{ m}^3$
 $E = 2'000,000 \text{ tn/m}^2$

$D_o = 12 E K_o / h^2$
para $h = 3 \text{ m}$:
 $D_o = 1067 \text{ ton/m}$
para $h = 4 \text{ m}$:
 $D_o = 600 \text{ ton/m}$



En este caso no existen correcciones y_1, y_2, y_3 ; es decir: $y = y_o$. Ver la Nota al pie de la página.



Nota: Cuando no existe un cambio significativo entre las alturas de los pisos consecutivos (menos de 30%) y cuando el valor $k \geq 1$, puede observarse en la Tabla 3 del Anexo 2 que $y_2 = y_3 = 0$

6.3.6. Problema Propuesto

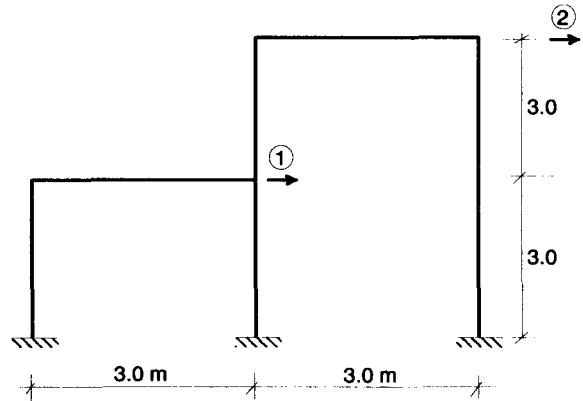
Mediante el método de Muto, calcule la rigidez lateral absoluta de cada columna (K); luego, con esos valores, formule la matriz de rigidez lateral $[R]$ y la matriz de flexibilidad lateral $[f]$ correspondientes al pórtico mostrado.

Suponer:

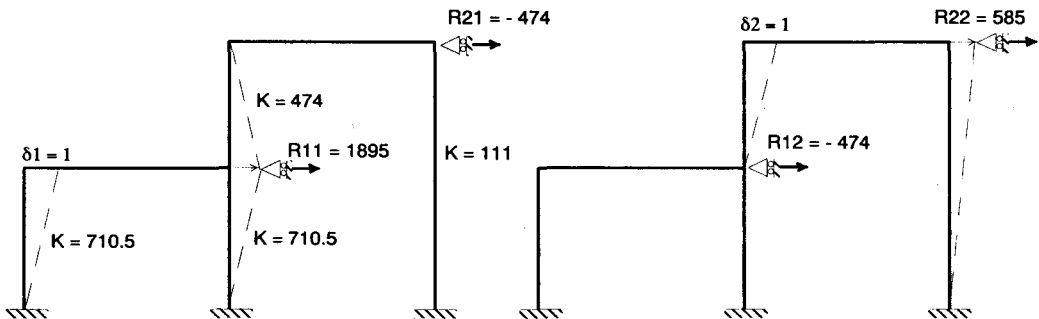
Vigas y Columnas: $0.30 \times 0.40 \text{ m}$

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

$K_o = 533 \text{ cm}^3$



RESULTADO (R_{ij} y K_i en ton/m):



$$[R] = \begin{bmatrix} 1895 & -474 \\ -474 & 585 \end{bmatrix} \text{ ton / m}$$

6.4. Análisis Sísmico Traslacional de Edificios Aporticados

Las fuerzas sísmicas (F) son fuerzas de inercia producidas por el hecho de que los niveles tienen masas (M), que se ven sujetas a aceleraciones (a) ante la acción de un sismo (Fig. 6.9).

Cuando el edificio presenta simetría en forma, toda la losa y, por lo tanto, cada diferencial de masa (dm) existente en el nivel respectivo, está sujeta a la misma aceleración, debido a que se supone que la losa se traslada una única cantidad, ya que ella se comporta como una plancha axialmente rígida ("Diafragma Rígido") que trata de compatibilizar o uniformizar el desplazamiento lateral de los pórticos orientados en la dirección del movimiento. Por lo tanto, la resultante (F) de las diferenciales de las fuerzas de inercia (dF) se encontrará alojada en el centro de masas (CM) del nivel en análisis, el cual, razonablemente puede decirse que coincide con el centroide del área en planta, a no ser que exista concentraciones de masas ubicadas en ciertas zonas de la losa.

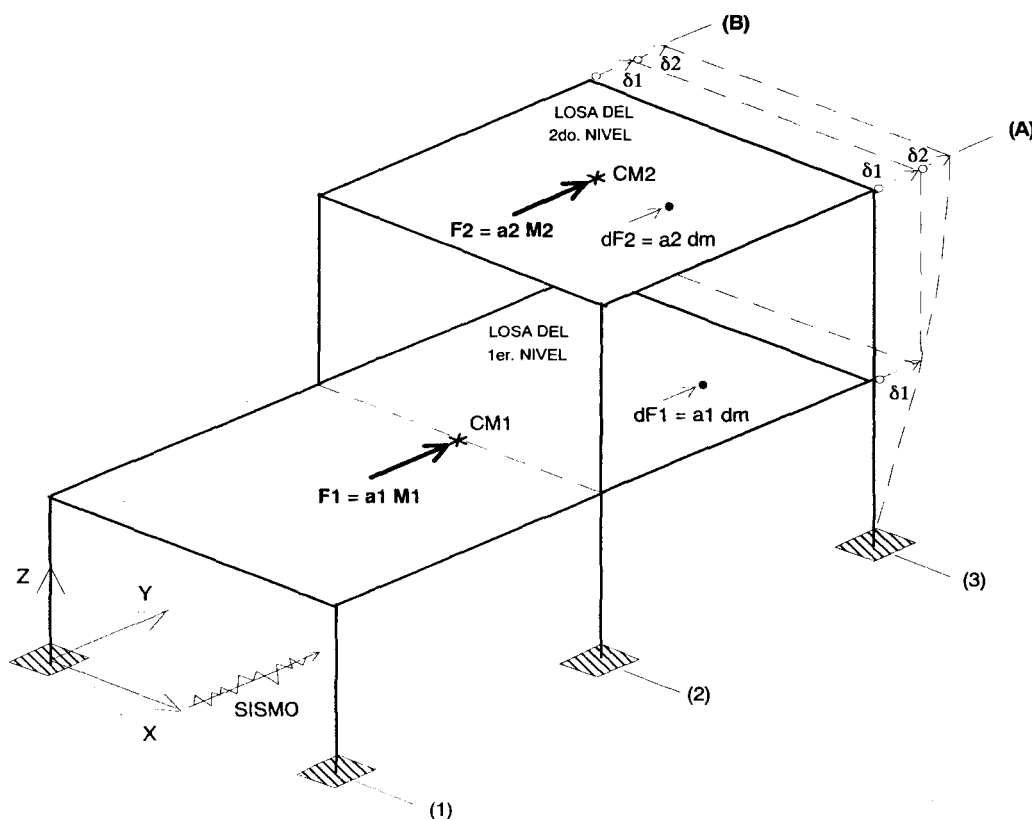


Fig. 6.9. Traslación en la Dirección Y-Y de un Edificio Aporticado Sujeto a un Sismo.

Para los edificios convencionales, las fuerzas de inercia (F) son proporcionadas por el Reglamento, como si fuesen fuerzas estáticas actuando en cada dirección independientemente. Pero, estas fuerzas actúan sobre todo el edificio, por lo que viene el problema de discretizarlas en cada pórtico; esto es, saber cuánta fuerza absorbe cada eje.

La hipótesis fundamental para resolver el problema mencionado en el párrafo anterior, consiste en aceptar que la losa del techo se comporta como un "Diafragma Rígido", lo que resulta válido sólo cuando la losa es maciza o aligerada. En cambio, cuando el techo es metálico o de madera, se supone que cada pórtico se comporta independientemente, y las fuerzas laterales se calculan considerando las masas existentes en el área de influencia del pórtico en análisis.

Matricialmente, la discretización de las fuerzas sísmicas traslacionales se efectúa en base a conocer la matriz de rigidez lateral de cada pórtico " i ": $[R_i]$. Por ejemplo, para el edificio mostrado en la Fig. 6.9, llamando $\{F_i\}$ al vector de fuerzas absorbido por el pórtico " i " y $\{d\}$ al vector de desplazamientos laterales absolutos (totales del nivel), se tendrá para la dirección Y-Y lo siguiente:

Por equilibrio: $\{F\} = \{F_A\} + \{F_B\}$

Al ser: $\{F_i\} = [R_i] \{d\}$

Se tendrá: $\{F\} = [R_A] \{d\} + [R_B] \{d\} = ([R_A] + [R_B]) \{d\} = [R] \{d\}$

Donde: $[R] = [R_A] + [R_B] =$ matriz de rigidez lateral del edificio según Y-Y

Con lo cual: $\{d\} = [R]^{-1} \{F\}$

Luego: $\{F_A\} = [R_A] \{d\}$ y $\{F_B\} = [R_B] \{d\}$

El proceso descrito es empleado por el programa "EDIFICIO", cuando se utiliza la opción de analizar traslacionalmente al edificio (con un grado de libertad en cada diafragma).

Para el **Análisis Manual**, se supone que las rigideces laterales de entrepiso (K) han sido calculadas previamente (por ejemplo, aplicando el método de Muto), y se trabaja con los desplazamientos relativos de entrepiso (δ), colocando a los pórticos orientados en la dirección en análisis

uno a continuación del otro, sin importar el orden en que estén dispuestos. Estos pórticos se conectan a través de bielas rígidas para garantizar que todos ellos se desplacen lateralmente la misma cantidad en cada nivel. Por ejemplo, para el edificio mostrado en la Fig. 6.9, se tendrá en la dirección Y-Y el modelo indicado en la Fig. 6.10.

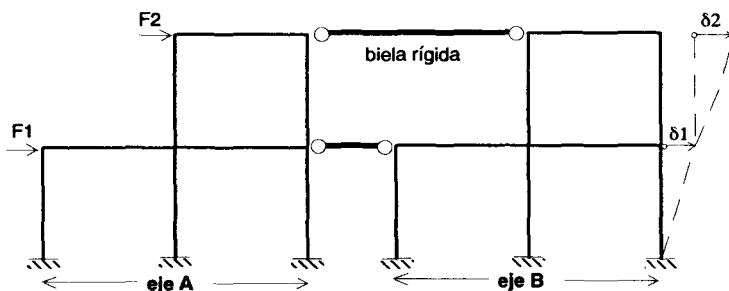


Fig. 6.10

Las columnas que conforman al entrepiso de cada pórtico están dispuestas en paralelo, al igual que ambos pórticos, ya que sus desplazamientos relativos son los mismos, por lo que el sistema se reduce al esquema mostrado en la Fig. 6.10A. De esta manera, es posible determinar los desplazamientos de entrepiso (δ) y el cortante (Q) que absorbe cada pórtico como se indica a continuación:

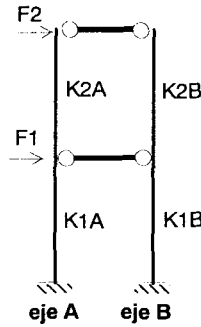
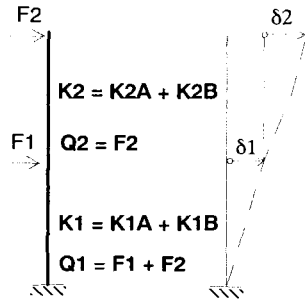


Fig. 6.10A



$$\delta_2 = Q_2 / K_2$$

$$\delta_1 = Q_1 / K_1$$

Eje A: $Q_{2A} = K_{2A} \delta_2$ $Q_{1A} = K_{1A} \delta_1$

Eje B: $Q_{2B} = K_{2B} \delta_2$ $Q_{1B} = K_{1B} \delta_1$

Finalmente, las fuerzas laterales (F) actuantes en los niveles de cada pórtico pueden ser calculadas, tal como se muestra en la Fig. 6.11, y los esfuerzos en las barras se determinan aplicando los métodos de Muto o Cross.

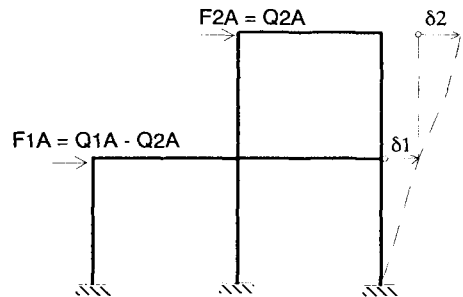


Fig. 6.11. Fuerzas en el eje A.

6.5. Interacción Pórtico-Placa

En el **Análisis Sísmico Traslacional Manual**, las dificultades se presentan cuando existen placas (Fig. 6.12) cuyas rigideces de entrepiso (K_{wi}) dependen de la distribución que adoptan las fuerzas laterales, cosa que no ocurre cuando se trabaja matricialmente, en vista que la matriz de flexibilidad lateral de la placa se calcula aplicando cargas unitarias en cada nivel (distribución única de fuerzas para cada estado de carga). En cambio, como ya se ha mencionado, la rigidez lateral de una columna resulta ser prácticamente independiente de la distribución que adoptan las cargas laterales.

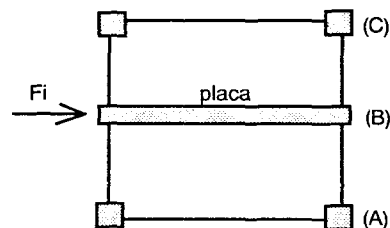


Fig. 6.12. Planta de un Edificio con Placa

Por lo que mientras no se conozca la rigidez lateral de la placa (K_{wi}), no se podrá determinar la fuerza cortante que ella absorbe y viceversa, mientras no se conozca la fuerza

cortante que absorbe la placa, no se podrá calcular su rigidez lateral, creándose de esta manera un problema iterativo.

Por ejemplo, para el edificio mostrado en la Fig. 6.12, las rigideces laterales de las columnas correspondientes a los pórticos A y C, pueden calcularse aplicando el método de Muto y como están dispuestas en paralelo, se suman para condensarlas en un sólo eje de columnas, obteniéndose los valores K_{ci} . Pero, la rigidez lateral de la placa del eje B (K_{wi}) es aún desconocida y en un primer paso del proceso iterativo K_{wi} debe ser calculada analizando la placa como si fuese una barra en voladizo (deformable por corte y flexión), sujeta a una distribución de cargas estimada.

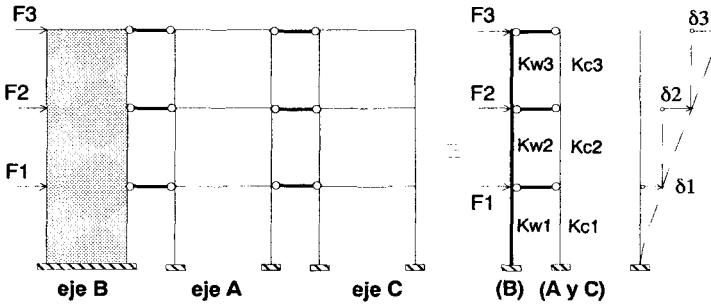


Fig. 6.13. Modelo para el Análisis Manual Traslacional del Edificio de la Fig. 6.12.

Si se supusiera que la placa trabaja aisladamente (Fig. 6.14), se tendría una deformada como la correspondiente a una viga en voladizo, donde en los pisos inferiores predomina la deformación por corte (pequeña), mientras que en los pisos superiores prevalece la deformación por flexión (elevada).

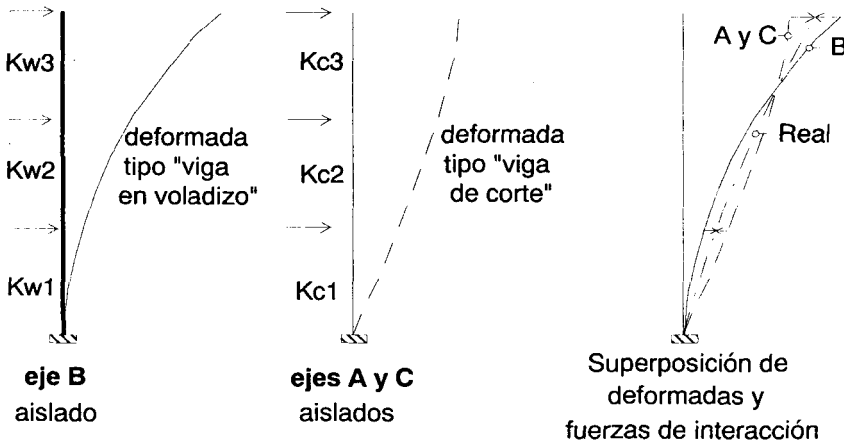


Fig. 6.14. Ejes Aislados.

En cambio, si el conjunto de columnas (ejes A y C) trabajase aisladamente, existiría poco desplazamiento relativo en los pisos superiores, mientras que estos desplazamientos serían altos en los pisos inferiores (Fig. 6.14); a este tipo de estructura se le denomina “**Viga de Corte**”, debido a que su deformada depende fundamentalmente de la magnitud de la fuerza cortante. Esto se produce porque los valores de las rigideces laterales K_{ci} no varían mucho entre los pisos consecutivos ($K_{c1} \approx K_{c2} \approx K_{c3} \approx K$), con lo cual se tendría: $V_i \approx K \delta_i$; por lo que cuánto mayor sea V , se tendrá mayor δ .

Pero, como debe existir compatibilidad de desplazamientos laterales entre la placa y el conjunto de columnas, ocurrirá que en los pisos superiores la placa no se deformará tanto y el desplazamiento del conjunto de columnas será mayor, lo que dará lugar a la generación de fuerzas de interacción (iguales pero de sentido contrario) negativas en la placa (tratan de descargarla) y positivas en el conjunto de columnas (tratan de recargarlas); mientras que en los pisos inferiores ocurre todo lo contrario (Fig. 6.14).

El problema descrito se acentúa conforme el edificio es más elevado, lo que puede dar lugar a distribuciones de fuerzas laterales fuera de lo común (Fig 6.15), pero todo esto se debe, como ya se explicó, a la interacción pórtico-placa. Por otro lado, podría pensarse que la placa es ineficiente en los pisos superiores y hasta podría tentarnos discontinuarla verticalmente, transformándola en columnas, pero esta solución es inadecuada,

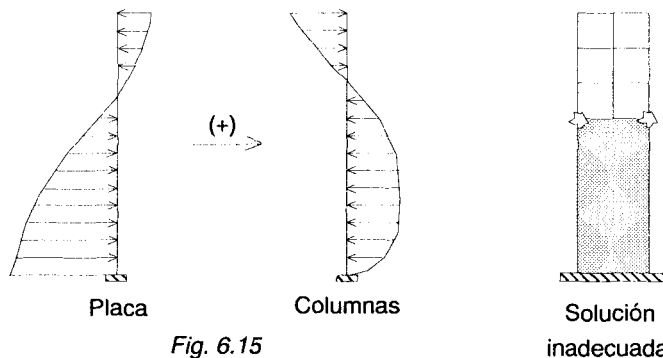


Fig. 6.15
Distribución de Fuerzas Contemplando
la Interacción Placa-Pórtico

porque se produciría concentración de esfuerzos en la zona de contacto columna-placa, por el cambio brusco de rigideces entre los pisos consecutivos; lo más adecuado es no perder la continuidad vertical de la placa, es más, las fuerzas negativas que se desarrollan en su parte superior, contrarrestarían el gran momento basal que usualmente tienen las placas.

En el proceso de **Cálculo Manual** (empleado en la década de los 60), contemplando la interacción pórtico-placa, habría que seguir el siguiente proceso iterativo:

- 1.- Darse una distribución de fuerzas laterales sobre la placa, contemplando la interacción pórtico-placa.
- 2.- Resolver la placa como si fuese una viga en voladizo (isostática) deformable por flexión y corte, luego hallar su rigidez lateral $K_{wi} = Q_{wi} / \delta_i$.
- 3.- Calcular el cortante que absorbe la placa: $Q_{wi} = Q_i K_{wi} / (K_{wi} + K_{ci})$, lo que dará lugar a otra distribución de fuerzas laterales sobre la placa. En este paso se está

compatibilizando los desplazamientos laterales entre la placa y el conjunto de columnas al asumirlas como elementos en paralelo.

4.- Regresar al paso 2, y así sucesivamente hasta que los valores de K_{wi} converjan.

Cabe mencionar que si la placa no fuese una barra en voladizo (isostática), sino más bien formase parte de un Pórtico Mixto (Fig. 6.16), el paso 2 del proceso iterativo se complica tremendamente, a pesar que el modelo se simplifique al máximo estimando la posición del punto de inflexión de las vigas que concurren a la placa y condensando la rigidez lateral de las 5 columnas en un sólo eje, tal como se muestra en la Fig. 6.17, donde se observa que la placa es un elemento hiperestático por las vigas coplanares.

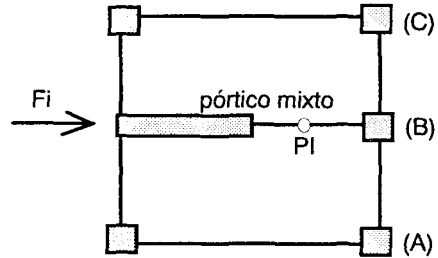


Fig. 6.16. Planta de un Edificio con Pórtico Mixto

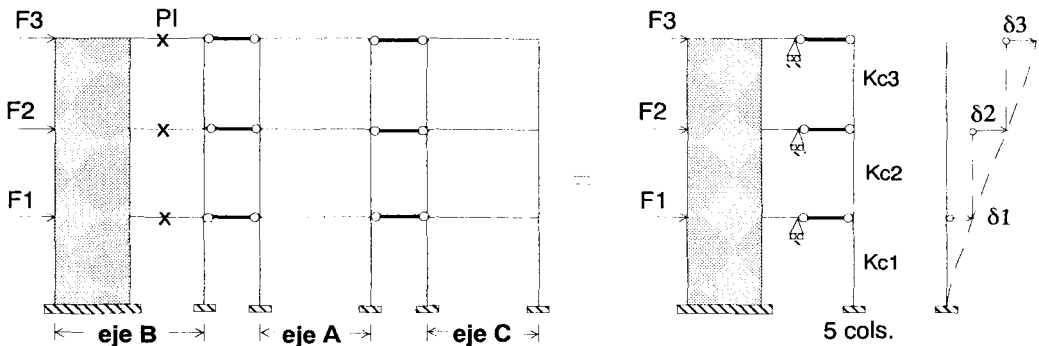


Fig. 6.17. Simplificación Máxima Para el Análisis Traslacional del Edificio de la Fig. 6.16.

Para estos casos, si se pretende realizar un **Análisis Manual**, se recomienda aplicar el método de Ozawa, expuesto en el acápite 6.6.

6.6. Método de Ozawa

El método de Ozawa es un proceso manual de cálculo que se utiliza para solucionar, en forma aproximada, pórticos mixtos sujetos a carga lateral. Bajo este procedimiento se resuelve el problema de interacción pórtico-placa sin recurrirse a procesos iterativos; también, puede ser empleado en el análisis sísmico traslacional de edificios de mediana altura (menos de 10 pisos) compuestos por una sola placa y columnas, o varias placas de igual geometría, pero, cuando el edificio contiene placas de diferentes características, será necesario emplear una técnica adicional que se explicará en el acápite 6.6.2.

El método contempla las deformaciones por flexión y por corte en la placa, pero no la deformación axial, por lo que los resultados son bastantes precisos cuando se aplica en estructuras de mediana altura. Por otro lado, se trabaja con rigideces relativas estandarizadas al material de la placa (módulo de elasticidad = E), por lo que si se tuviese, por ejemplo, vigas y columnas de concreto armado (E_c) con un muro de albañilería (E_a), será necesario aplicar el criterio de la sección transformada, multiplicando el espesor real de las vigas y columnas por la relación E_c / E_a , desde el inicio del problema.

En este libro sólo se explicará la manera como se aplica el método, así como las hipótesis generales que permitieron la deducción de las fórmulas respectivas.

6.6.1. Nomenclatura y Fórmulas que Emplea el Método

En la Fig. 6.18, se ilustra la nomenclatura utilizada en el Método de Ozawa, ésta es:

n = número asignado a un nivel o a un entrepiso (las variables relativas al entrepiso siguen la numeración del entrepiso).

θ = ángulo de rotación por flexión en el eje de la placa (radianes), positivo cuando está dirigido en el sentido horario.

ϕ = $2 E K_o \theta$ (giro proporcional al real).

K_o = rigidez estándar, usualmente 0.001 m^3 .

D_{on} = $12 E K_o / h_n^2$ = rigidez lateral estándar de la placa en el piso "n"

k_w = $I_w / (h K_o)$ = coeficiente de rigidez a flexión de la placa en el piso "n".

D_c = rigidez lateral relativa de una columna.

ΣD_c = suma de las rigideces laterales de las columnas que conforman al entrepiso en la dirección en análisis ($D_{c1} + \dots + D_{c7}$).

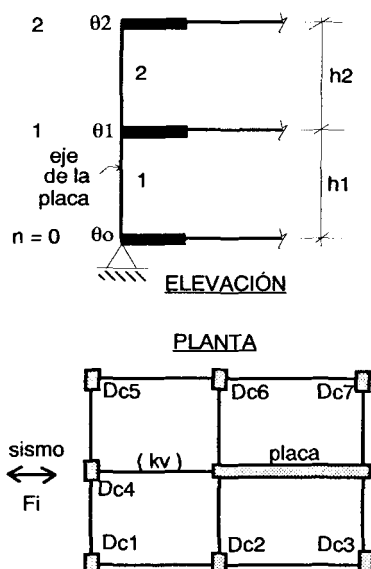


Fig. 6.18

A_w, I_w, f = área axial, momento de inercia y factor de forma de la sección de la placa.

Q = cortante total del entrepiso "n" (valor conocido) = $\sum F_i$

Q_w = cortante que absorbe la placa (valor desconocido) en el entrepiso "n".

Q_c = cortante que absorbe el grupo de columnas en el entrepiso "n" = $Q - Q_w$

V_c = cortante que absorbe una columna: $V_c = D_c Q_c / \sum D_c$

1.- CONSTANTES DE ENTREPISO

Para la deducción de las siguientes expresiones, se ha considerado que existe compatibilidad de desplazamiento horizontal entre la placa y el conjunto de columnas (hipótesis de diafragma rígido).

$$X_n = 1 + \frac{\sum D_{cn}}{k_{wn}} + \frac{12 E K_o f \sum D_{cn}}{G A_{wn} h_n} \quad Z_n = \frac{\sum D_{cn}}{X_n}$$

$$B_n = k_{wn} - 3 Z_n \quad A_n = k_{wn} + 3 Z_n \quad C_n = \frac{Q_n h_n}{X_n}$$

Las constantes X_n, Z_n, B_n y A_n son adimensionales, mientras que C_n tiene unidades (ton-m); ellas se tabulan ordenadamente por cada entrepiso "n" de la siguiente manera:

Piso	k_w	$\sum D_c$	X_n	Z_n	B_n	A_n	Q_n	C_n

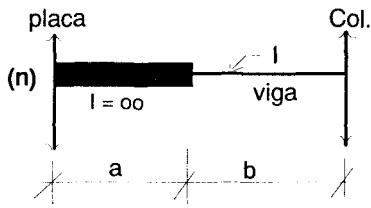
Nota: si se estuviese analizando una placa aislada, sin columnas, entonces: $D_c = 0$, $X_n = 1$, $Z_n = 0$, $B_n = A_n = k_{wn}$.

2.- COEFICIENTE DE RIGIDEZ A FLEXIÓN DE LA VIGA DE BORDE (k_v)

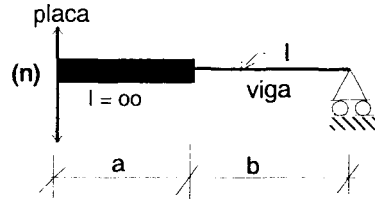
Este coeficiente (adimensional) se obtiene como la rigidez al giro absoluta (K) de la viga que llega al plano de la placa dividida entre la constante $6 E K_o$; en cambio, en el método de Muto se usa la constante $4 E K_o$.

$$E = \text{módulo de elasticidad de la placa.} \quad k_v = \frac{K}{6 E K_o}$$

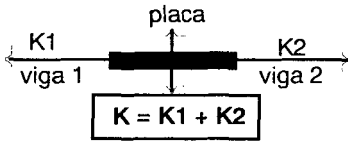
En el cálculo de K existen varios casos, los cuales se muestran a continuación.



$$K = \frac{4EI}{b} [1 + 3(a/b) + 3(a/b)^2]$$

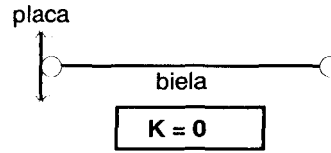


$$K = \frac{3EI}{b} [1 + (a/b)]^2$$



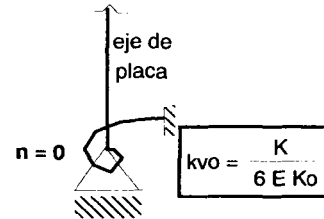
$$K = K1 + K2$$

(n)

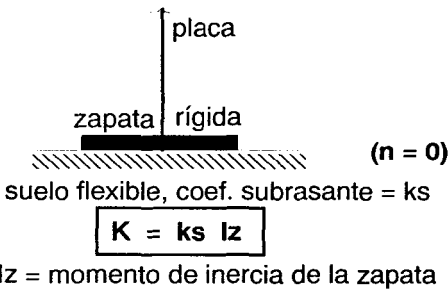


$$K = 0$$

Cuando la base de la placa (nivel $n = 0$) rota, debe calcularse la rigidez absoluta del resorte helicoidal (K) y dividirla entre $6EI K_0$. Aquí también se presentan varios casos, los que se muestran a continuación.

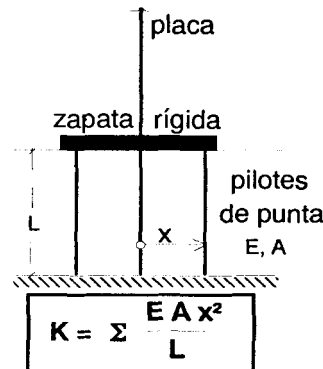


$$k_{vo} = \frac{K}{6EI K_0}$$

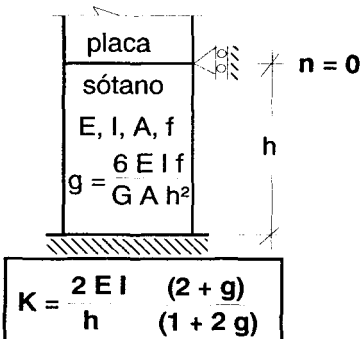


$$K = k_s I_z$$

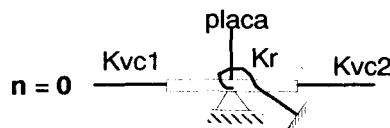
I_z = momento de inercia de la zapata



$$K = \sum \frac{EAx^2}{L}$$



$$K = \frac{2EI}{h} \frac{(2+g)}{(1+2g)}$$



$$K = K_{vc1} + K_{vc2} + K_r$$

K_{vc} = rigidez al giro de la viga de cimentación

3.- CONSTANTES POR CADA NIVEL QUE ROTE

En cada nivel del eje de la placa, donde el giro θ_n sea un grado de libertad, deberá calcularse las siguientes constantes imponiendo condiciones de borde:

$$a_n = A_n + A_{n+1} + 6 k_v n$$

$$b_n = B_n$$

$$d_n = C_n + C_{n+1}$$

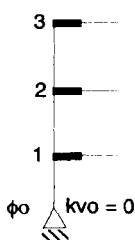
Por ejemplo, si se está en el último nivel, los términos A_{n+1} y C_{n+1} son nulos.

4.- ECUACIÓN DE LOS 3 GIROS (ECUACIÓN DE OZAWA)

Esta ecuación proviene de efectuar el equilibrio de momentos en cada nudo "n" de la placa y se plantea sólo en los niveles que roten:

$$- b_{n+1} \phi_{n+1} + a_n \phi_n - b_n \phi_{n-1} = d_n$$

El planteo de esta ecuación conduce a una formulación matricial, donde como regla práctica se llena primeramente por cada fila "n" los términos a_n , $-b_n$ y d_n ; finalmente, a sabiendas que la matriz correspondiente al primer miembro de la ecuación de Ozawa es simétrica y bandeda en forma tridiagonal, se completa esta matriz llenando los términos que aparecen debajo de la diagonal.

$$\begin{array}{c} n \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a_3 & -b_3 & & & \\
 -b_3 & a_2 & -b_2 & & \\
 & -b_2 & a_1 & -b_1 & \\
 & & -b_1 & a_0 &
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \phi_3 \\
 \phi_2 \\
 \phi_1 \\
 \phi_0
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 d_3 \\
 d_2 \\
 d_1 \\
 d_0
 \end{Bmatrix}$$


5.- SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LOS 3 GIROS

Puede aplicarse cualquier método para solucionar las ecuaciones del paso anterior; sin embargo, se recomienda eliminar los términos que aparecen debajo de la diagonal, para finalmente, por un proceso de sustitución inversa, calcular ϕ_n

$$\begin{bmatrix}
 a_3 & -b_3 & & & \\
 & X & X & & \\
 & & X & X & \\
 & & & X & X \\
 & & & & X
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \phi_3 \\
 \phi_2 \\
 \phi_1 \\
 \phi_0
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 d_4 \\
 \text{vector} \\
 d_n \\
 \text{modificado}
 \end{Bmatrix}$$

6.- CÁLCULO DE LA FUERZA CORTANTE QUE ABSORBE LA PLACA (Q_w), EL CONJUNTO DE COLUMNAS (Q_c) Y CADA COLUMNA (V_c)

$$Q_{wn} = [C_n - 3 \sum Z_n (\phi_{n-1} + \phi_n)] / h_n$$

$$Q_{cn} = Q_n - Q_{wn}$$

$$V_c = D_c Q_{cn} / \sum D_c$$

7.- CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO RELATIVO DEL ENTREPISO (n) Y DE LA RIGIDEZ LATERAL ABSOLUTA DE LA PLACA (K_{wn})

Puede aplicarse cualquiera de las dos ecuaciones mostradas, ya que existe compatibilidad de desplazamientos entre la placa y el grupo de columnas.

$$(1) \quad \delta_n = \frac{1}{h_n \sum D_{cn}} \left[3 (\phi_{n-1} + \phi_n) + \frac{Q_{wn} h_n}{k_{wn}} \right] + \frac{f h_n Q_{wn}}{G A_{wn}}$$

$$(2) \quad \delta_n = \frac{Q_{cn}}{\sum D_{cn}}$$

Luego: $K_{wn} = Q_{wn} / \delta_n$

8.- CÁLCULO DE MOMENTOS EN EL EJE DE LA PLACA, COLUMNAS Y VIGAS

Conocido V_c en cada columna, se aplica el método de Muto para obtener los momentos en las vigas y columnas. El momento flector en el extremo de la viga que concurre al eje de la placa se calcula con la expresión: $M_{vn} = 3 k_{vn} \phi_n$ (positivo en el sentido horario); de

existir varias vigas u otros elementos que concurren al nudo "n", M_{vn} se reparte en proporción a la rigidez al giro de cada uno de ellos.

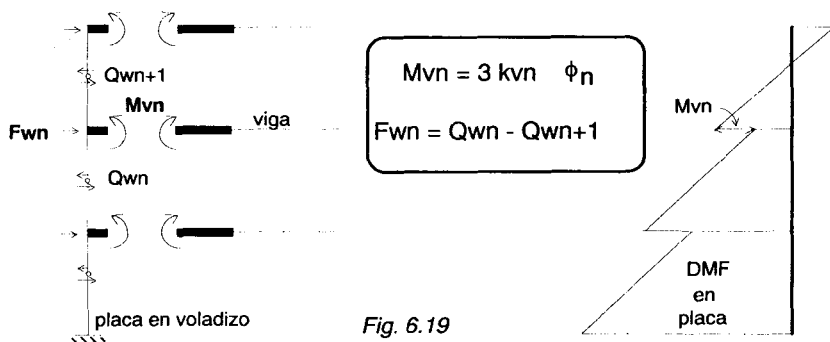


Fig. 6.19

M_{vn} actúa sobre la placa en sentido contrario, y ésta se resuelve como si fuese una barra en voladizo, isostática (Fig. 6.19), sujeta a momentos (M_{vn}) y a fuerzas laterales cuyas magnitudes son: $F_{wn} = Q_{wn} - Q_{wn+1}$.

6.6.2. Caso en que Existen Placas de Diferentes Características

En este caso, se trata de evaluar los desplazamientos laterales del edificio aplicando el método de Ozawa, para lo cual se agrupa (o condensa) al conjunto de placas en un sólo eje vertical equivalente y al grupo de columnas en otro eje. El método se aplica empleando los siguientes parámetros (ver la Fig. 6.20):

Eje de placa	k_w	=	$S \quad k_{wi} =$	$k_{w1} + k_{w2} + k_{w3}$
equivalente:	A_w	=	$\Sigma A_{wi} =$	$A_{w1} + A_{w2} + A_{w3}$
	k_v	=	$\Sigma k_{vi} \dots (*)$	
	f	=	valor promedio de los factores de forma de las secciones transversales de las distintas placas.	

(*) En Σk_{vi} intervienen sólo las vigas que concurren al plano de las diversas placas.
Por ejemplo, en la Fig. 6.20, para la dirección X-X: $\Sigma k_{vi} = k_{v1} + k_{v2} + k_{v3} + k_{v4}$

Eje de columna	ΣD_{ci}	=	$D_{c1} + D_{c2} + D_{c3} + D_{c4} + D_{c5} + D_{c6}$
equivalente:			

Una vez calculado los desplazamientos laterales de entrepiso (δ) mediante Ozawa, se trabaja con cada placa individualmente, estimando la posición del punto de inflexión (PI) de sus vigas coplanares, luego se evalúan los momentos de empotramiento en cada entrepiso inducidos por δ y se resuelve el problema por Cross, considerando que sólo los giros por flexión son los grados de libertad. Cabe remarcar que debe contemplarse las deformaciones por corte en la placa al calcular los momentos de empotramiento, las rigideces al giro y los factores de transporte.

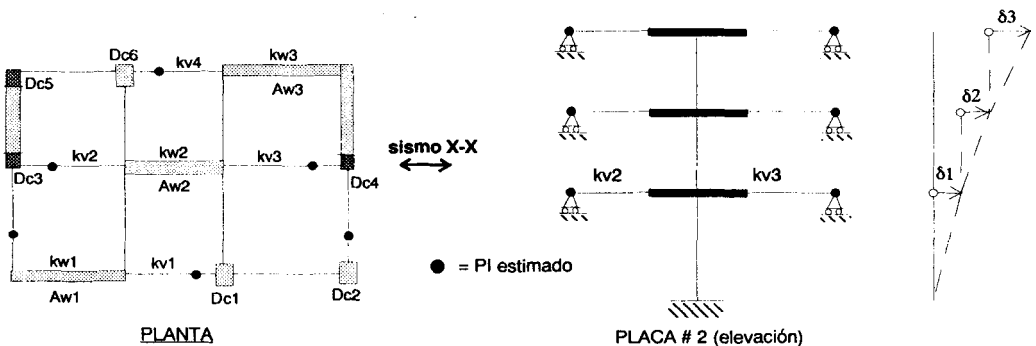


Fig. 6.20. Caso en que Existen Placas de Diferentes Características.

6.6.3. Ejemplo de Aplicación

Resolver el pórtico mixto mostrado en la Fig. 6.21. Suponer:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$E / G = 2.3$$

$$K_o = 0.001 \text{ m}^3$$

$$D_o = 12 \times 2 \times 10^6 \times 0.001 / 3^2 = 2667 \text{ ton/m}$$

$$6 E K_o = 12000 \text{ ton-m}$$

Vigas: $0.30 \times 0.60 \text{ m}$

$$I_v = 0.3 \times 0.6^3 / 12 = 0.0054 \text{ m}^4$$

$$K = 4 E I_v [1 + 3 (a/b) + 3 (a/b)^2] / b$$

$$K = 23873 \text{ ton-m}$$

$$k_{vn} = 23873 / 12000 = 1.99$$

Columnas: $0.45 \times 0.45 \text{ m}$

$$k_c = 0.45 \times 0.45^3 / (12 \times 3 \times 0.001) = 1.14$$

Placa: $0.15 \times 3.00 \text{ m}$

$$k_w = 0.15 \times 3^3 / (12 \times 3 \times 0.001) = 112.5$$

$$A_{wn} = 0.15 \times 3 = 0.45 \text{ m}^2$$

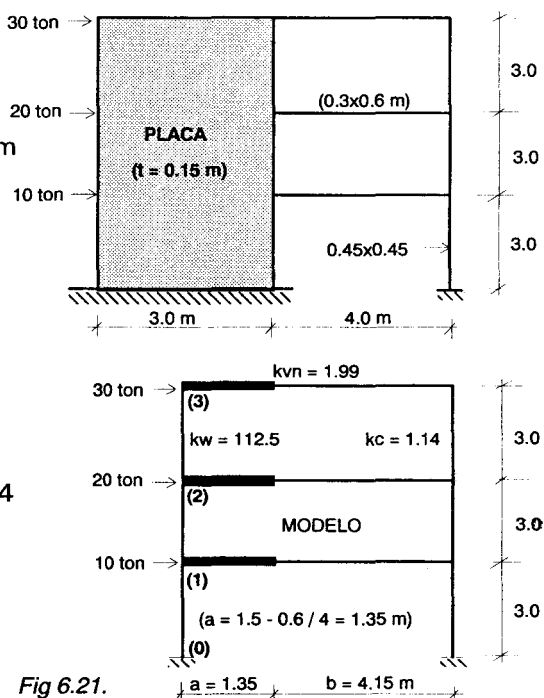
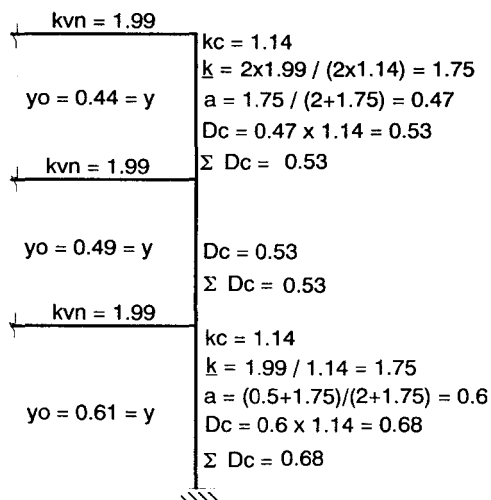


Fig 6.21.

CÁLCULO DE " ΣD_c "



Nota: realmente, D_c debió calcularse utilizando la rigidez a flexión de la viga que concurre a la columna ($k_v = I_v / b K_o$); sin embargo, ha podido observarse que la rigidez lateral de una columna vecina a la placa se incrementa, esto se debe a que el punto de inflexión en la viga se corre hacia el nudo menos rígido (hacia el lado de la columna). De este modo, siendo Ozawa un método aproximado, se recomienda (sólo para las columnas que estén a un costado de la placa) trabajar con " k_{vn} " valor que siempre resulta mayor que " k_v ". Por otro lado, como existe una sola columna en cada entrepiso, se tiene: $\Sigma D_c = D_c$

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE ENTREPISO

$$X_n = \frac{1 + \sum D_{cn} / k_{wn} + 12 E K_o f \sum D_{cn} / (G A_{wn} h_n)}{1 + \sum D_{cn} / 112.5 + 12 \times 2.3 \times 0.001 \times 1.2 \times \sum D_{cn} / (0.45 \times 3)} = 1 + 0.033 \sum D_{cn}$$

$$Z_n = \sum D_c / X_n \quad B_n = k_{wn} - 3 Z_n \quad A_n = k_{wn} + 3 Z_n \quad C_n = Q_n h_n / X_n$$

n	k _{wn}	D _{cn}	X _n	Z _n	B _n	A _n	Q _n (ton)	C _n (t-m)
3	112.5	0.53	1.018	0.52	110.9	114.1	30	88.4
2	112.5	0.53	1.018	0.52	110.9	114.1	50	147.3
1	112.5	0.68	1.023	0.66	110.5	114.5	60	176.0

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE NIVEL (en cada nivel que rote)

$$a_n = A_n + A_{n+1} + 6 k_{vn}$$

$$b_n = B_n$$

$$d_n = C_n + C_{n+1}$$

n	6 k _{vn}	a _n	b _n	d _n (t-m)
3	11.94	126.0	110.9	88.4
2	11.94	240.1	110.9	235.7
1	11.94	240.5	110.5	323.3

NOTA: A₄ = 0
C₄ = 0

ECUACIÓN DE LOS 3 GIROS (planteada en cada nivel que rote):

$$-b_{n+1} \phi_{n+1} + a_n \phi_n - b_n \phi_{n-1} = d_n$$

$$\begin{bmatrix} 126.0 & -110.9 & 0 \\ -110.9 & 240.1 & -110.9 \\ 0 & -110.9 & 240.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 88.4 \\ 235.7 \\ 323.3 \end{Bmatrix}$$

= fila 3 modificada
x 126 / 110.9 + fila 3 modif. = fila 2 modif.
x 161.9 / 110.9 + fila 2 modif. = fila 1 modif.

FILAS MODIFICADAS

$$\begin{bmatrix} 126.0 & -110.9 & 0 \\ 0 & 161.9 & -126.0 \\ 0 & 0 & 225.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 88.4 \\ 356.2 \\ 828.2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_2 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.158 \\ 5.063 \\ 3.679 \end{Bmatrix} \text{ ton-m}$$

CÁLCULO DE Q_w, Q_c, V_c, M_v, δ

$$\theta_n = \phi_n / 2 E K_o \dots (\text{rad}) \quad M_{vn} = 3 \phi_n k_{vn} \dots (\text{ton-m}) \quad Q_{wn} = [C_n - 3 Z_n (\phi_{n-1} + \phi_n)] / h_n$$

$$Q_{cn} = Q_n - Q_{wn} \dots (\text{ton}) \quad V_{cn} = Q_{cn} D_{cn} / \sum D_{cn} \quad \delta_n = Q_{cn} / (D_{on} \sum D_{cn})$$

$$\text{también: } \delta_n = [3 (\phi_{n-1} + \phi_n) + Q_{wn} h_n / k_{wn}] / (h_n D_{on}) + f h_n Q_{wn} / (G A_{wn})$$

Momentos de empotramiento en las placas:

$$u_{ij} = u_{ji} = -6 E I_p \delta_{ij} / [h^2 (1 + 2g)]$$

$$u_{ij} = u_{ji} = -119680 \delta_{ij} \dots (\text{ton-m})$$

Donde: $\delta_{01} = 0.0021\text{m}$
 $\delta_{12} = 0.0038\text{m}$
 $\delta_{23} = 0.0041\text{m}$

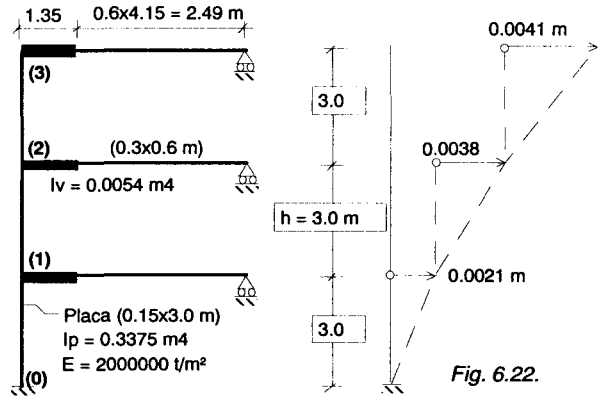


Fig. 6.22.

Aplicando Cross:

	(0)		(1)		(2)		(3)
		$f_{ij} = -0.112$	K_v	$f_{ij} = -0.112$	K_v	$f_{ij} = -0.112$	K_v
		K_p		K_p		K_p	
α_{ij}	0		0.482	0.482	0.482	0.482	0.929
u_{ij}	-251		-251	-455	-455	-491	-491
D	0		340	340	456	456	456
T	-38.1		0	-51	-38.1	-51	-51
D	0		24.6	24.6	42.9	42.9	47.4
T	-2.7		0	-4.8	-2.7	-5.3	-4.8
D	0		2.3	2.3	3.8	3.8	4.4
Mij Cross	-291.8		115.9	-143.9	6.9	-44.6	-39
Ozawa	-292		123.1	-145.1	11.4	-41.6	-30.8
EDIFICIO	-288		118.5	-142	8.4	-40.4	-27.4

Adicionalmente a los momentos flectores obtenidos mediante Cross, en la tabla anterior aparecen los resultados provenientes de resolver al pórtico mixto completo (sin cortar a la viga de borde en su punto de inflexión, Fig 6.21) aplicando el método de Ozawa y el programa matricial "EDIFICIO" (que contempla las deformaciones por flexión, corte y axial), puede observarse que no existe mayores diferencias entre los momentos flectores en el eje de la placa, con excepción de M_{32} , debido a la condición de borde.

6.6.4. Problemas Propuestos

- 1.- La figura muestra a un muro de Albañilería Armada (en voladizo) que apoya sobre un muro de sótano de Concreto Armado. Aplicando el método de Ozawa, calcule la rigidez lateral del muro de albañilería.

Suponer:

$$K_o = 0.001 \text{ m}^3$$

$$\text{Espesor de los 2 muros} = 0.15 \text{ m}$$

Concreto armado:

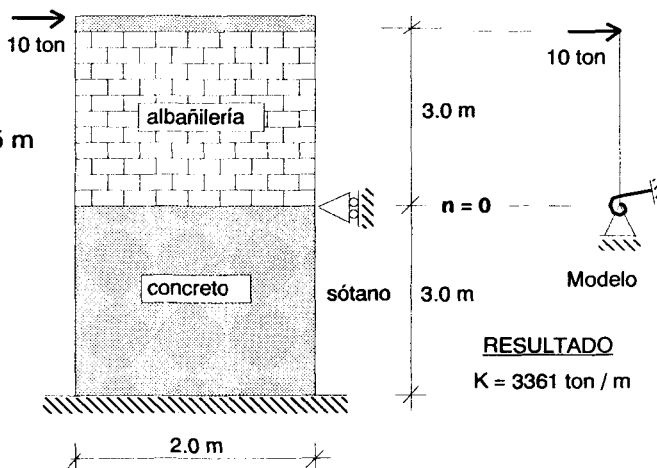
$$E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$E_c / G_c = 2.3$$

Albañilería Armada:

$$E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$$

$$E_a / G_a = 2.5$$



- 2.- En la figura se muestra la planta típica de un edificio aporticado de concreto armado, de 3 pisos, con la excepción de los ejes 1 y 4 que contienen muros de albañilería confinada. Aplicando el método de Ozawa, se hará el análisis sísmico traslacional en la dirección Y-Y. Se dibujará el DMF correspondiente al eje 1.

Datos:

Concreto Armado:

$$E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

Albañilería:

$$E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$$

$$E_a / G_a = 2.5$$

$$K_o = 0.001 \text{ m}^3$$

Columnas:

$$0.40 \times 0.40 \text{ m}$$

Vigas:

$$0.30 \times 0.40 \text{ m}$$

Espesor de muros:

$$0.15 \text{ m}$$

Altura de entrepiso:

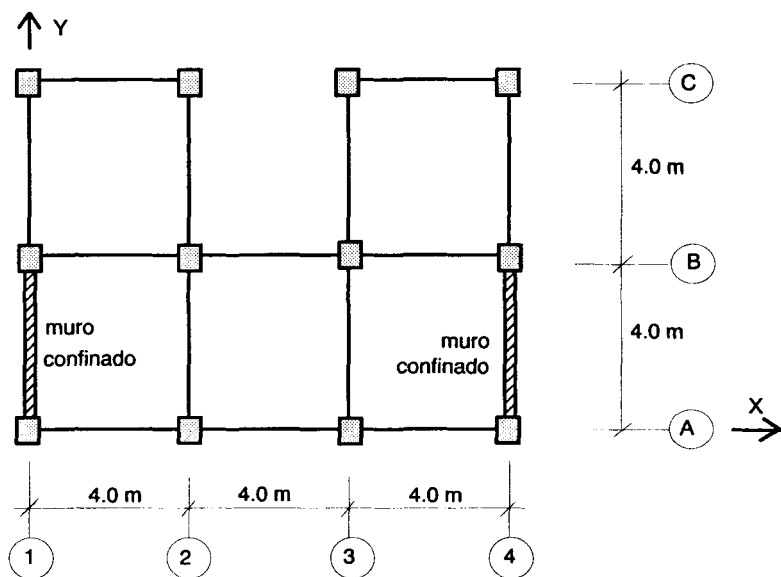
$$3.0 \text{ m}$$

Fuerzas de inercia según Y-Y: $F_3 = 10 \text{ ton}$

$$F_2 = 7.5 \text{ ton}$$

$$F_1 = 5.0 \text{ ton}$$

Sugerencia: Por simetría en la dirección Y-Y, puede trabajarse con medio edificio (ejes 1 y 2) empleando la mitad de las cargas laterales. Adicionalmente, se sugiere transformar la sección transversal de las vigas y columnas (barras que se deforman por flexión) en secciones equivalentes de albañilería.



3.- Dibuje la envolvente de momento flector para la zona flexible de la viga correspondiente al pórtico mixto mostrado. El análisis por carga vertical se hará aplicando el método de Cross, asumiendo que la placa es indeformable. El análisis sísmico se realizará mediante el método de Ozawa. Suponer:

$$K_o = 1000 \text{ cm}^3$$

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

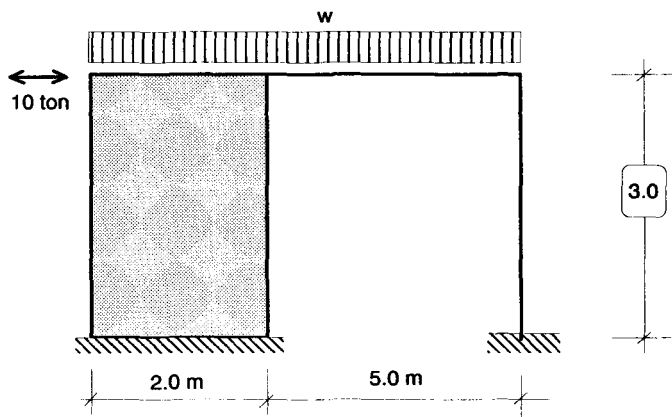
$$E / G = 2.3$$

Viga: 30 x 60 cm

Columna: 30 x 60 cm

Placa: 12 x 200 cm

$$w = 4 \text{ ton/m}$$



6.7. Corrección por Torsión en un Entrepiso de un Edificio

Cuando los elementos estructurales de un edificio no están dispuestos simétricamente en planta, o cuando los centros de masas (CM) de los distintos niveles no están contenidos en el mismo eje vertical (Fig. 6.23), existirá rotación de la losa del techo, torsionándose el edificio cuando actúe un sismo.

Es más, en la Norma Sismo-resistente E-030 se especifica que incluso en edificios simétricos cabe la posibilidad de que se presente torsión de carácter accidental, porque los defectos constructivos (cangrejeras, por ejemplo) y las variaciones en la posición de la sobrecarga, pueden causar una modificación de la rigidez lateral teórica o un corrimiento del centro de masas, respectivamente. Estos problemas se contemplan utilizando una excentricidad accidental $E_a = 0.1 B$, donde "B" es la dimensión de la planta medida en la dirección transversal a la que está en análisis.

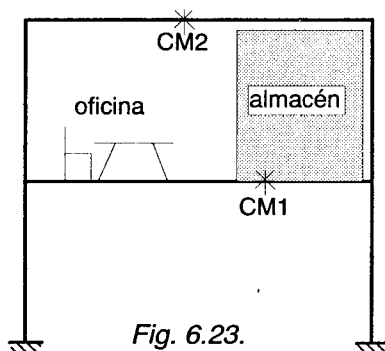


Fig. 6.23.

Manualmente, la corrección por torsión se realiza analizando cada entrepiso y cada dirección en forma independiente, como si el 100% del sismo actuase en la dirección X-X y 0% en Y-Y y viceversa. Según la Norma E-030, los cortantes que se obtengan por torsión (q) en cada eje del edificio deberán sumarse con los cortantes producidos por la traslación, nunca deberán restarse; asimismo, deberá efectuarse el "control de giros en planta", de manera que el desplazamiento relativo máximo entre dos pisos consecutivos (medido en cualquier punto de la planta) producidos por torsión no exceda al obtenido por traslación en más del 75%, esto puede interpretarse como que los cortantes inducidos por la torsión deben ser como máximo el 75% de los producidos por traslación.

6.7.1. Centro de Rigidez Lateral (CR)

El centro de rigidez lateral (CR), o centro de giro, se define como aquel punto del entrepiso sujeto sólo a traslación, alrededor del cual rotan y se trasladan el resto de puntos. Este punto corresponde al centro estático de las rigideces laterales de los diversos ejes estructurales que componen al entrepiso en estudio.

En realidad, no debe trabajarse directamente con las rigideces debido a que éstas son cantidades escalares, por lo que para calcular CR (Fig. 6.24), debe imprimirse un desplazamiento unitario al entrepiso en cada dirección (independientemente), generándose una fuerza cortante en cada pórtico "i" (orientado en la dirección en análisis) igual a la magnitud de su rigidez lateral (K_i). Luego, igualando el momento de la fuerza cortante resultante respecto al origen del sistema de referencia (O) a la suma de los momentos causados por sus componentes, se determina la posición de CR (X_{CR} , Y_{CR}).

De las expresiones que se obtienen para hallar "CR" (Fig. 6.24), puede observarse que el centro de rigidez lateral trata de correrse hacia la zona más rígida del edificio.

Denominado "i" al entrepiso en análisis, se tiene:

$$X_{cqi} = \frac{\sum_{j=i}^N F_{yj} X_{cmj}}{Q_{yi}}$$

Similarmemente:

$$Y_{cqi} = \frac{\sum_{j=i}^N F_{xj} Y_{cmj}}{Q_{xi}}$$

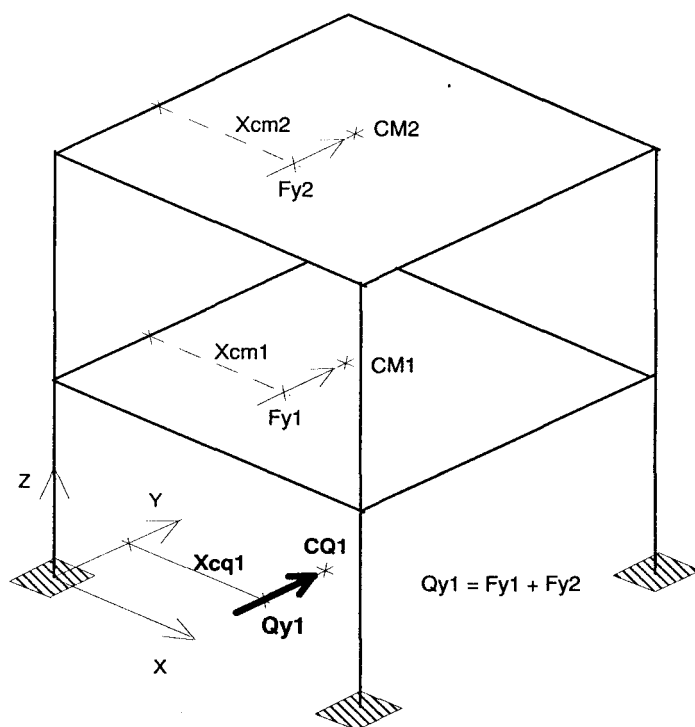


Fig. 6.26. Determinación del Centro de Carga "CQ"

En las expresiones mostradas en la Fig. 6.26 para hallar "CQ", puede observarse que cuando "CM" está contenido en el mismo plano vertical (por ejemplo, paralelo a Y-Z, con $X_{cm1} = X_{cm2} = X_{cm}$), entonces, el centro de cargas coincide en todos los pisos con el centro de masas ($X_{cq} = X_{cm}$); pero, de existir reducciones entre las plantas consecutivas del edificio, CQ no coincidirá con CM.

La Torsión se presenta cuando el centro de cargas (CQ) no coincide con el centro de rigidez lateral (CR), en este caso, la losa del techo rota como un sólido rígido (si es que es un diafragma rígido) alrededor de CR, generando desplazamientos y, por lo tanto, fuerzas cortantes "qi" en todos los ejes que componen al edificio (X, Y).

Cabe remarcar que a pesar de que el análisis sísmico se esté efectuando sólo en una de las direcciones, por torsión trabajan todos los ejes del edificio, a diferencia del análisis sísmico traslacional que produce cortantes sólo en los ejes orientados en la dirección en análisis; esto se puede apreciar en las figuras 6.27 y 6.28, donde los ejes han sido esquematizados a través de resortes cuyas constantes son iguales a las rigideces laterales de los pórticos correspondientes.

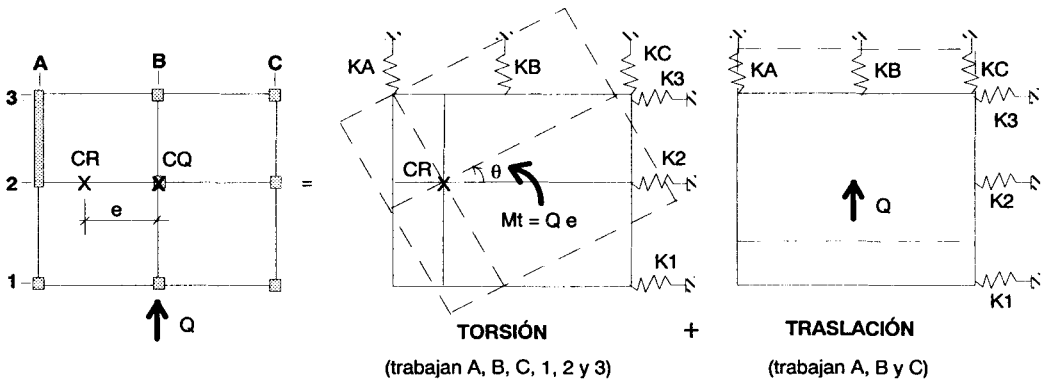


Fig. 6.27. Efectos de la Torsión y Traslación en la Planta de un Edificio.

Analizando un eje cualquiera "i" en el estado torsional (Fig. 6.28) y llamando R_i a la distancia que existe entre ese eje y CR, se tendrá:

$$M_t = \sum q_i R_i = \theta \sum K_i R_i^2 = \theta R_T$$

Luego, el giro relativo nivel a nivel será: $\theta = M_t / \sum K_i R_i^2 = M_t / R_T$

Por lo que, el cortante inducido por la torsión será: $q_i = K_i R_i M_t / R_T$

La rigidez torsional (R_T , Fig. 6.28A) se define como el momento torsor que produce una rotación unitaria en la planta del edificio; lógicamente, conviene que R_T sea máxima a fin de que disminuyan θ y q_i .

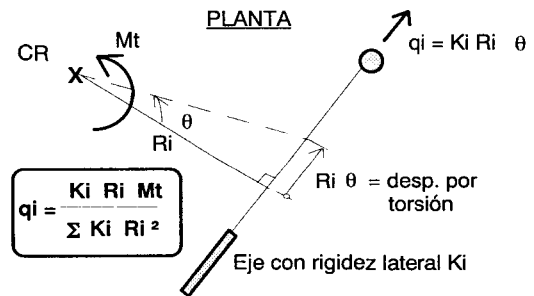
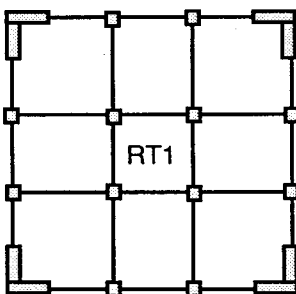


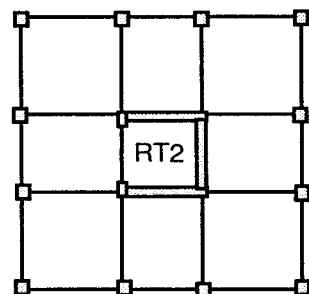
Fig. 6.28. Cálculo de " q_i "



$$R_T = \frac{M_t}{\theta} = \sum K_i R_i^2$$

$$R_{T1} > R_{T2}$$

Fig. 6.28A



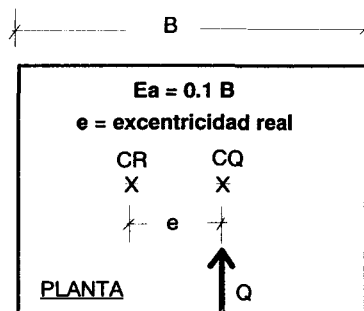
6.7.3. Momento Torsor Reglamentario (M_t)

De acuerdo a la Norma E-030, el momento torsor debe contemplar a la excentricidad accidental (E_a). De esta manera: $M_t = Q e'$

donde:

$$e'1 = |e| + E_a \quad [1]$$

$$e'2 = |e| - E_a \quad [2]$$



La primera fórmula representa una amplificación de la excentricidad real (e) y debe utilizarse siempre; en cambio, la segunda fórmula representa una posible inversión en el sentido del momento torsor y se le emplea sólo cuando la excentricidad real es pequeña ($|e| \leq E_a$). En ambos casos, deberá cumplirse las siguientes especificaciones reglamentarias:

- 1.- En cualquier eje, el cortante por torsión (q) deberá ser menor que el 75% del cortante por traslación; de lo contrario, el edificio estará mal estructurado.
- 2.- El cortante por torsión (q) deberá sumarse (recarga) con el debido a traslación, nunca deberá restarse (descarga). Ver la Fig. 6.29.

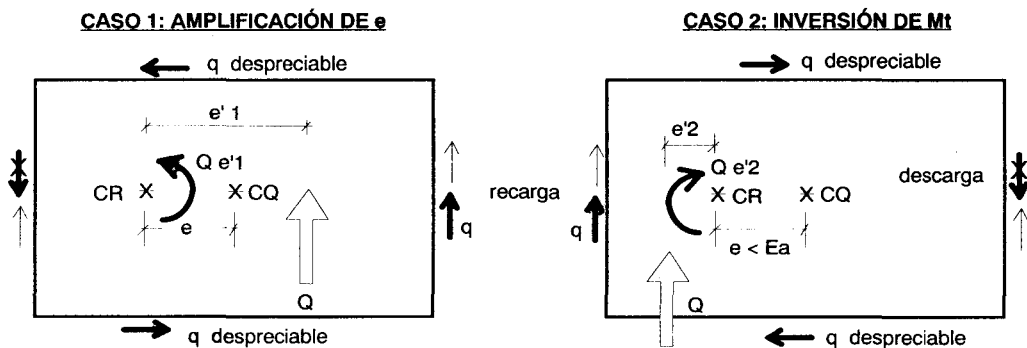


Fig. 6.29.

NOTACIÓN

- Cortante por Torsión (q)
 ---→ Cortante por Traslación

Generalmente, el cortante que por torsión se produce en los ejes transversales a la dirección en análisis, resulta despreciable en comparación con el obtenido al analizar la otra dirección. Adicionalmente, si el sismo ocurriese en sentido contrario (-Y, Fig. 6.30), son los mismos ejes los que se recargan o descargan y tan sólo ocurrirá una inversión en el sentido de los esfuerzos manteniéndose sus magnitudes.

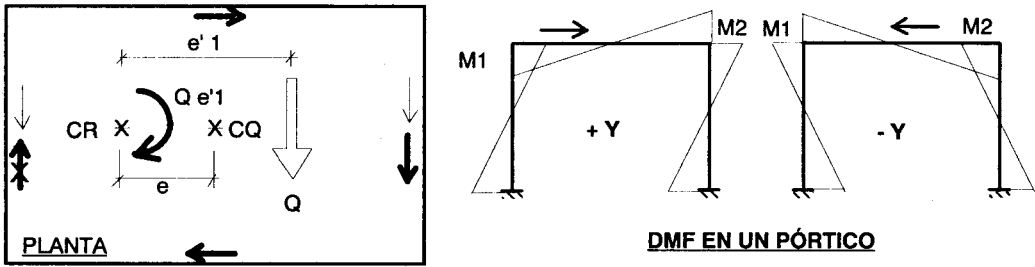


Fig. 6.30. Sismo en la Dirección -Y.

6.7.4. Ejemplo de Aplicación

Suponiendo que todos los elementos estructurales verticales están "biempotrados", calcular el cortante por traslación y torsión en cada eje del edificio de cuatro pisos de concreto armado cuya planta típica se muestra en la Fig. 6.31. Se analizará sólo el primer entrepiso.

Se hace notar que este procedimiento (suponiendo barras biempotradas) puede emplearse sólo con fines de predimensionamiento o de verificación de la estructuración por torsión; pero, para un análisis definitivo, debe emplearse las rigideces laterales provenientes del análisis traslacional, hecho mediante el método de Muto, Ozawa, Cross, etc.

Se asumirá (sólo para el ejemplo) que las fuerzas de inercia en X-X y en Y-Y son iguales ($F_{xi} = F_{yi} = F_i$), por lo cual, el cortante basal será el mismo en las dos direcciones ($Q_{1x} = Q_{1y} = Q_1 = \sum F_i$); para situaciones reales, deberá calcularse F_{xi} y F_{yi} .

Suponer:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

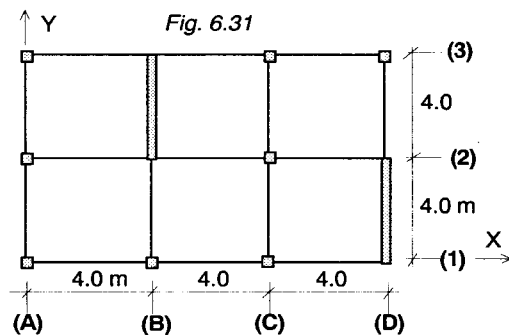
$$E / G = 2.3$$

$$h = 3 \text{ m} = \text{altura de entrepiso}$$

$$\text{Columnas: } 0.45 \times 0.45 \text{ m}$$

$$\text{Placas: } 0.2 \times 4.0 \text{ m}$$

$$\text{Placa efectiva: } 2.0 \times 0.2 \text{ m (*)}$$



$$\text{Fuerzas de Inercia } F_i \text{ (ton): } F_4 = 20, F_3 = 15, F_2 = 10, F_1 = 5 \rightarrow Q_1 = 50 \text{ ton}$$

(*) Cuando el sismo actúa en la dirección X-X, existe un ancho tributario de la placa que trabaja como si fuese una columna adicional en los ejes 1, 2 y 3. En este caso, al haberse supuesto que todos los elementos verticales están biempotrados, se tomará como ancho tributario la mitad de la longitud de la placa (2 m).

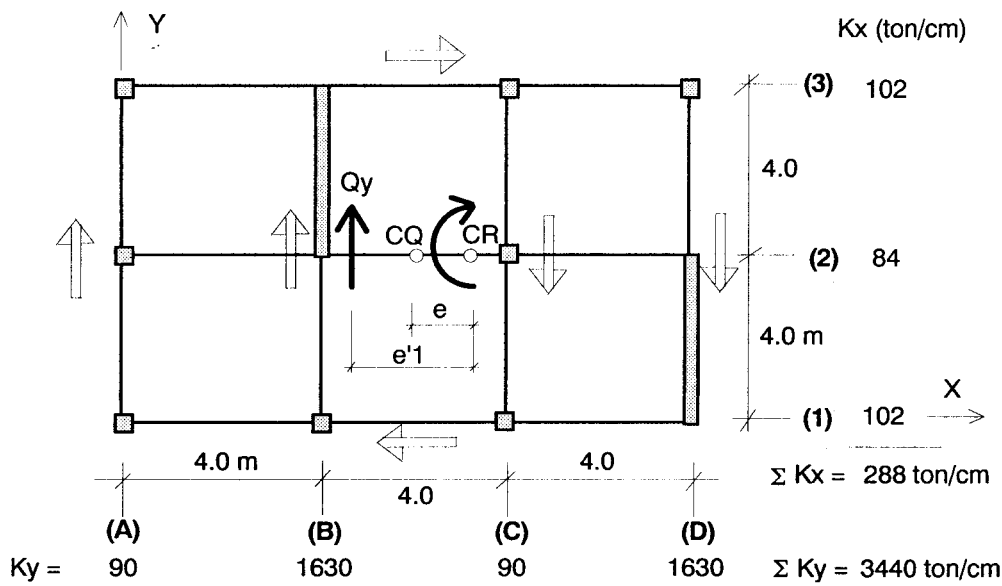


Fig. 6.31A. Análisis Sísmico Aproximado del Primer Piso de un Edificio.

CÁLCULO DE RIGIDECES LATERALES EN BARRAS BIEMPOTRADAS

$K = 12 E I / [h^3 (1 + 2 g)]$; donde: $g = 6 E I_f / G A h^2 = 1.38 (d / h)^2$
 $g = 0$ en columnas

Elemento	b x d (m)	$I = b d^3 / 12 \text{ (m}^4\text{)}$	g	K (ton/m)	K (ton/cm)
Columna	0.45x0.45	0.00342	0	3000	30
Placa	0.20x4.00	1.066	2.45	160000	1600
Placa efe	2.00x0.20	0.0013	0	1200	12

Luego, se podrá determinar la rigidez lateral de cada eje como sigue:

Ejes A y C (compuesto por 3 columnas): $K_A = K_C = 3 \times 30 = 90 \text{ ton/cm}$

Ejes B y D (1 columna + 1 placa): $K_B = K_D = 30 + 1600 = 1630 \text{ ton/cm}$

Ejes 1 y 3 (3 columnas + 1 placa efectiva): $K_1 = K_3 = 3 \times 30 + 12 = 102 \text{ ton/cm}$

Eje 2 (2 columnas + 2 placas efectivas): $K_2 = 2 \times 30 + 2 \times 12 = 84 \text{ ton/cm}$

Estas rigideces se muestran en la planta del edificio (Fig. 6.31A).

CENTRO DE CARGA (CQ)

Se asumirá que el centro de masas (CM, punto donde actúa "Fi") coincide con el centroide de la planta: $X_{cm} = 6 \text{ m}$, $Y_{cm} = 4 \text{ m}$.

Como no hay variación en la posición de CM en los 4 niveles se tendrá:

$$X_{cq} = \sum F_{yi} X_{cmi} / Q_y = X_{cm} = 6 \text{ m} \quad Y_{cq} = \sum F_{xi} Y_{cmi} / Q_x = Y_{cm} = 4 \text{ m}$$

CENTRO DE RIGIDEZ LATERAL (CR)

$$X_{CR} = \sum K_{yi} X_i / \sum K_{yi} = (1630 \times 4 + 90 \times 8 + 1630 \times 12) / 3440 = 7.8 \text{ m}$$

$$Y_{CR} = K_{xi} Y_i / \sum K_{xi} = 4 \text{ m} \dots (\text{por simetría})$$

ANÁLISIS EN LA DIRECCIÓN Y-Y

$$\text{Excentricidad accidental: } E_a = 0.1 B = 0.1 \times 12 = 1.2 \text{ m}$$

$$\text{Excentricidad real} = e = X_{CR} - X_{cq} = 7.8 - 6 = 1.8 \text{ m} > E_a \dots (\text{no hay inversión de Mt}).$$

$$\text{Excentricidad reglamentaria: } e'1 = e + E_a = 1.8 + 1.2 = 3.0 \text{ m}$$

$$\text{Momento Torsor: } M_t = Q_y e'1 = 50 \times 3 = 150 \text{ ton-m}$$

Cortante producido por la torsión (doble flecha en la Fig. 6.31A):

$$q_i = K_i R_i M_t / \sum K_i R_i^2 = K_i R_i \times 150 / 61034 \dots (\text{ver el cálculo de RT en la Tabla})$$

$$\text{Cortante producido por traslación: } V_{tras} = 50 K_{yi} / \sum K_{yi} = 50 K_{yi} / 3440$$

ANÁLISIS EN LA DIRECCIÓN X-X

Por simetría $e = 0$; sólo existe $E_a = 0.1 \times 8 = 0.8 \text{ m}$; con $Q_{x1} = 50 \text{ ton}$; luego:

$$e'1 = e + E_a = + 0.8 \text{ m} \quad e'2 = e - E_a = - 0.8 \text{ m}$$

$$M_t = 50 \times (\pm 0.8) = \pm 40 \text{ ton-m} \quad q_i = \pm K_i R_i \times 40 / 61034 \dots (\text{ver RT en Tabla})$$

$$V_{tras} = 50 K_{xi} / \sum K_{xi} = 50 K_{xi} / 288$$

Nota: De acuerdo al reglamento, los cortantes de diseño (V) se obtienen como $V_{tras} + q$ (nunca debe descargarse por torsión el eje). Asimismo, para que un edificio se considere bien estructurado ante los efectos torsionales, debe cumplirse: $q < 0.75 V_{tras}$, en este ejemplo el eje A no cumple con esa condición (ver Tabla), por lo que será conveniente rigidizarlo.

A continuación se muestra en forma tabulada los cálculos.

TABLA				SISMO EN "Y-Y"			SISMO EN "X-X"		
eje	Ri (m)	Ki (t/cm)	Ki Ri (t-m/cm)	qi (ton)	Vtras (ton)	V (ton)	qi (ton)	Vtras (ton)	V (ton)
A	7.8	90	702	1.72	1.5	3.22	± 0.46		
B	3.8	1630	6194	15.22	23.5	38.72	± 4.06		
C	0.2	90	18	-0.05	1.5	1.5	± 0.01		
D	4.2	1630	6846	-16.82	23.5	23.5	± 4.48		
1	4	102	408	-1.0			± 0.27	17.71	17.98
2	0	84	0	0			± 0	14.58	14.58
3	4	102	408	1.0			± 0.27	17.71	17.98
$\Sigma Ki Ri^2 = 61034 \text{ ton-m}^2/\text{cm}$				0.0	50.0		0.0	50.0	

Nótese que por equilibrio $\Sigma qi = 0$, y que cuando se analiza según X-X, los cortante producidos por la torsión en los ejes A, B, C y D (orientados según Y-Y) son despreciables con relación a los cortantes de diseño (V) obtenidos al analizar la dirección Y-Y y viceversa. Por otro lado, tablas como ésta deberían hacerse por cada entrepiso, para así obtener las fuerzas laterales finales en cada pórtico.

6.7.5. Edificios con Ejes Inclinados en Planta

La fórmula deducida anteriormente, para calcular el cortante inducido por la torsión, se sigue cumpliendo:

$qi = Ki Ri Mt / \Sigma Ki Ri^2$

Donde Ki es la rigidez lateral del pórtico plano "i" (Fig. 6.32).

Tomando un punto de paso del eje "i" (Xi, Yi), puede determinarse la distancia (Ri) que existe entre dicho eje y el centro de rigidez lateral (CR):

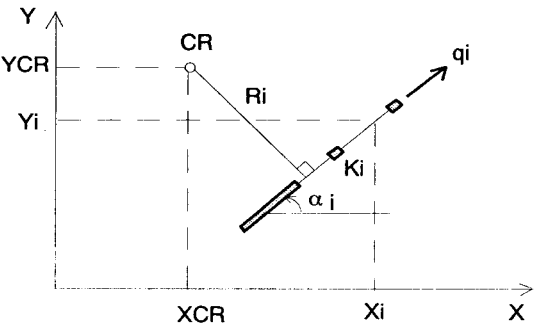
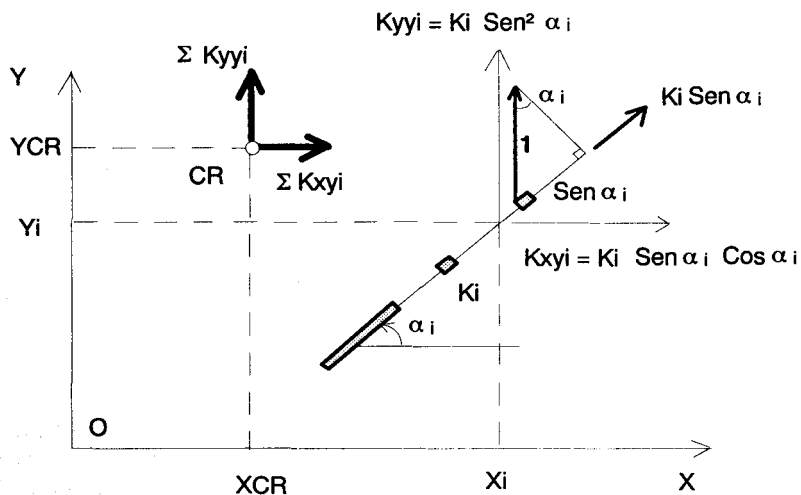


Fig. 6.32. Ejes Inclinados en Planta.

$Ri = | (Xi - XCR) Sen \alpha i - (Yi - YCR) Cos \alpha i |$

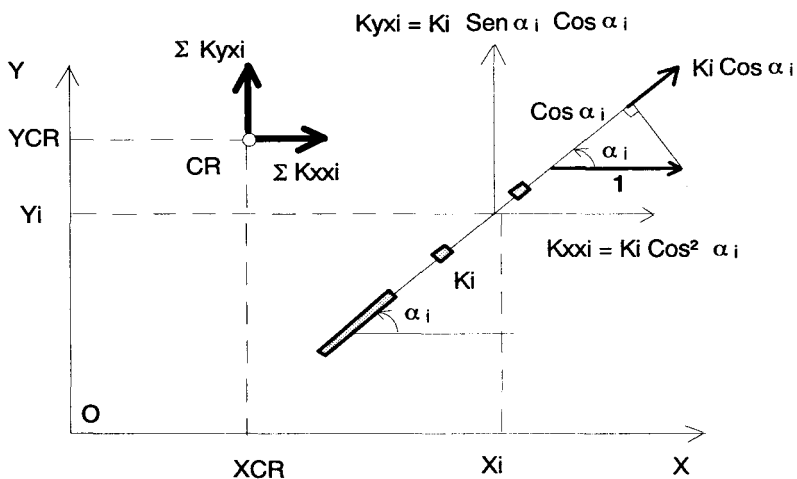
El problema consiste en determinar las coordenadas de CR, para lo cual se generarán desplazamientos unitarios en la losa del techo en cada dirección del edificio (X,Y). Recordando que en CR se encuentra concentrada toda la rigidez lateral del entrepiso y que el momento de la resultante es igual al momento que generan sus componentes respecto al origen del sistema de coordenadas (O), se tendrá:

DESPLAZAMIENTO UNITARIO EN Y-Y ($\delta_y = 1$)



$$X_{CR} \Sigma K_{yyi} - Y_{CR} \Sigma K_{xyi} = \Sigma K_{yyi} X_i - \Sigma K_{xyi} Y_i \dots [1]$$

DESPLAZAMIENTO UNITARIO EN X-X ($\delta_x = 1$)



$$Y_{CR} \Sigma K_{x xi} - X_{CR} \Sigma K_{y xi} = \Sigma K_{x xi} Y_i - \Sigma K_{y xi} X_i \dots [2]$$

De [1] y [2] podrá calcularse la ubicación del centro de rigidez lateral (XCR, YCR). Por otro lado, cabe indicar lo siguiente:

- 1.- Para el análisis sísmico traslacional debe trabajarse con la rigidez lateral $K_{xxi} = K_i \cos^2 \alpha_i$ (según X-X) y $K_{yyi} = K_i \sin^2 \alpha_i$ (según Y-Y). Luego, la fuerza cortante que se obtenga por traslación debe descomponerse en la dirección del pórtico y sumarse (si es que procede) con "qi".
- 2.- Si $\alpha_i = 0^\circ$ (pórtico orientado en la dirección X-X), entonces $K_{xxi} = K_i$, por lo que el pórtico "i" trabajará al 100% en la dirección X-X, con $K_{xyi} = K_{yxi} = 0$.
- 3.- Si $\alpha_i = 90^\circ$ (pórtico orientado en la dirección Y-Y), entonces $K_{yyi} = K_i$, por lo que el pórtico "i" trabajará al 100% en la dirección Y-Y, con $K_{xyi} = K_{yxi} = 0$.
- 4.- Las ecuaciones (1) y (2) pueden arreglarse matricialmente, dando lugar a:

$$\begin{bmatrix} \sum K_{yy} & - \sum K_{xy} \\ - \sum K_{yx} & \sum K_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{CR} \\ Y_{CR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum K_{yy} X - \sum K_{xy} Y \\ \sum K_{xx} Y - \sum K_{yx} X \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$K_{xx} = K \cos^2 \alpha$$

$$K_{yy} = K \sin^2 \alpha$$

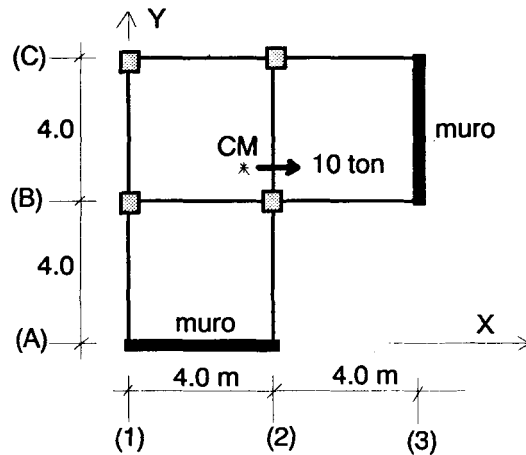
$$K_{xy} = K_{yx} = K \sin \alpha \cos \alpha$$

(X, Y) = punto de paso del pórtico correspondiente

6.7.6. Problemas Propuestos

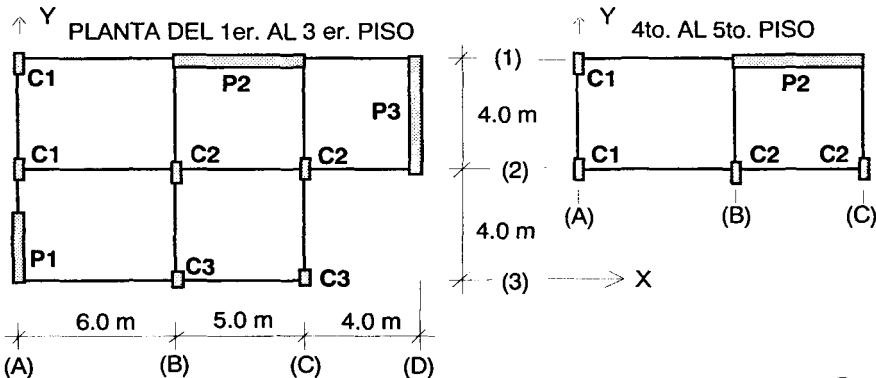
- 1.- Verifique si la planta del edificio de un piso mostrada está bien estructurada por efectos de torsión sísmica. En el cálculo de las rigideces laterales se supondrá que las columnas están biempotradas y que el muro de albañilería armada actúa en voladizo.

Datos: Columnas: 0.45 x 0.45 m $E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$
 Muro: 0.15 x 4.00 m $E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$ $E_a/G_a = 2.5$
 Altura: h = 2.6 m

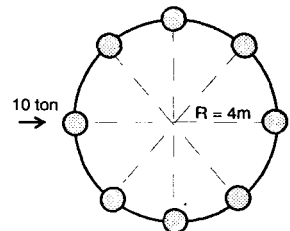


- 2.- Incluyendo la corrección por torsión reglamentaria, determine la fuerza cortante que absorbe cada eje del edificio cuyas plantas se muestran, el análisis se efectuará sólo para el primer piso. Las rigideces laterales de los elementos verticales se determinarán suponiendo que están biempotrados. Las fuerzas de inercia (ton) en X-X y Y-Y son: $F_5 = 25$, $F_4 = 20$, $F_3 = 15$, $F_2 = 10$, $F_1 = 5$, aplicadas en el centroide del área de la planta correspondiente. Suponer:

Placas: P1: 0.25 x 2.00 P2: 0.30 x 5.00 m P3: 0.25 x 4.00 m
 Columnas: C1: 0.25 x 0.60 C2: 0.30 x 0.60 m C3: 0.30 x 0.30 m
 $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$ $E/G = 2.3$ $h = 3 \text{ m}$



- 3.- Suponiendo que las columnas de sección circular ($\phi = 0.4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$) del edificio de un piso cuya planta se muestra, están biempotradas, dibuje el DMF para la columna más solicitada. Se incluirá la corrección por torsión reglamentaria.



7

NOCIONES GENERALES SOBRE ESTRUCTURACIÓN DE EDIFICIOS

Cada edificio constituye un problema particular, por lo que siendo imposible abarcar en este libro los miles de casos existentes, sólo se tratará de impartir conocimientos generales de estructuración.

Estructurar un edificio significa tomar decisiones en conjunto con los otros profesionales que intervienen en la obra (Arquitecto, Ingenieros de Instalaciones, etc.) acerca de la disposición y características que deben tener los diferentes elementos estructurales, de manera que el edificio tenga un buen comportamiento durante su vida útil; esto es, que tanto las cargas permanentes (peso propio, acabados, etc.) como las eventuales (sobrecarga, sismo, viento, etc.), se transmitan adecuadamente hasta el suelo de cimentación. En este proceso se busca los siguientes objetivos:

1.- ECONOMÍA. Deberá colocarse los elementos estructurales estrictamente indispensables; por ejemplo, se sabe que las placas son los mejores elementos sismorresistentes, sin embargo, no deben emplearse en gran cantidad porque son costosas. Por otro lado, si en un edificio de mediana altura (hasta de 5 pisos) abundasen los tabiques de albañilería, será conveniente convertirlos en muros estructurales.

2.- ESTÉTICA. En lo posible deberá respetarse la arquitectura del edificio.

3.- FUNCIONABILIDAD. La estructura no debe restar el carácter funcional al que los ambientes están destinados. Por ejemplo, si un edificio tiene cocheras en su parte baja, los elementos estructurales verticales no deben estorbar el paso de los vehículos. Asimismo, si un edificio está destinado a prestar servicios vitales (hospital, posta médica, estación de bomberos, etc.), deberá seguir funcionando después que se produzca un sismo severo, de lo contrario, no se podrá atender a los heridos o sofocar los incendios que generalmente ocurren después de un gran terremoto.

4.- SEGURIDAD. Sobre los tres objetivos anteriores el que debe primar es el de seguridad, a fin de que el edificio sea capaz de soportar todo tipo de sollicitación, sin que se

produzca de ninguna manera el colapso. Al respecto, en nuestra Norma Sísmica se especifica: que los sismos leves no deben originar ningún daño; que los sismos moderados pueden causar daños en los elementos no estructurales (tabiques, acabados etc.) y daños leves en los elementos estructurales; mientras que los terremotos severos pueden producir grandes daños en los elementos estructurales, pero que no comprometan la seguridad del edificio.

7.1. Estructuración por Carga Vertical

Al estructurar un edificio por carga vertical, debe pensarse que la carga gravitacional actuante en un nivel del edificio se transmite a través de la losa del techo hacia los denominados ejes portantes (antiguamente se les llamaba ejes principales) y de aquí, hacia el suelo de cimentación. Adicionalmente, como vivimos en un país sísmico, en este acápite no puede dejar de mencionarse los problemas que producen los terremotos.

7.1.1. Aligerados

Uno de los sistemas de techado más empleado en nuestro medio es la losa aligerada unidireccional (armada en un sentido), esto se debe a que es un sistema económico, liviano (propiedad necesaria para reducir las fuerzas sísmicas), donde los ladrillos aligerados (bloques con huecos tubulares) proporcionan acústica, termicidad y sirven además para darle forma (encofrado) a las viguetas de concreto armado; pero, para efectos del diseño estructural, se desprecia la participación de los bloques tanto en la rigidez como en la resistencia del aligerado (ver la Fig. 7.1).

Dependiendo de las luces de los ambientes y de las cargas existentes, los aligerados tienen un peralte $t = 13, 17, 20, 25, 30, 35$ y 40 cm, que incluye una losa superior de 5 cm de espesor. Cabe mencionar que cuando el peralte del aligerado resulta mayor que 30 cm, debe solicitarse anticipadamente la fabricación de bloques especiales.

Por otro lado, los bloques tienen dimensiones en planta de 30×30 cm, y tradicionalmente se emplean viguetas con nervios de 10 cm de espesor, lo que hace que estas viguetas se repitan modularmente cada 40 cm; sin embargo, dependiendo de las características que tengan los ambientes (luces, sobrecargas, etc.), estas medidas pueden modificarse, por ejemplo, empleando nervios de 15 cm y losa de 7.5 cm de espesor, lógicamente, esto deberá especificarse en los planos estructurales.

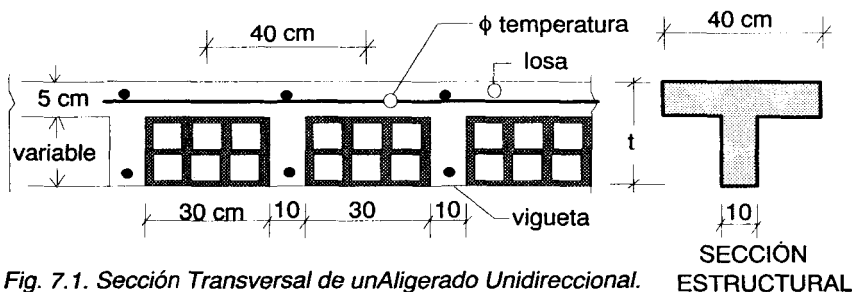


Fig. 7.1. Sección Transversal de un Aligerado Unidireccional.

Las viguetas se dirigen ("arman") en el sentido de la menor longitud del ambiente por techar ($L1$ en la Fig. 7.2), ya que al curvarse cilíndricamente la losa, los momentos flectores son significativos en esa dirección. Pero, cuando las luces son relativamente semejantes ($L1 \approx L2$), o cuando $L1 > 5$ m, se recomienda colocar perpendicularmente al armado, en la zona central del techo, una doble vigueta (dos viguetas juntas), cuyo objetivo es proporcionar rigidez torsional a las viguetas principales y también "coser" una posible fisura que puede formarse en la zona de contacto vigueta-bloque por flexión en el sentido ortogonal al armado; esta doble vigueta no actúa como apoyo del aligerado.

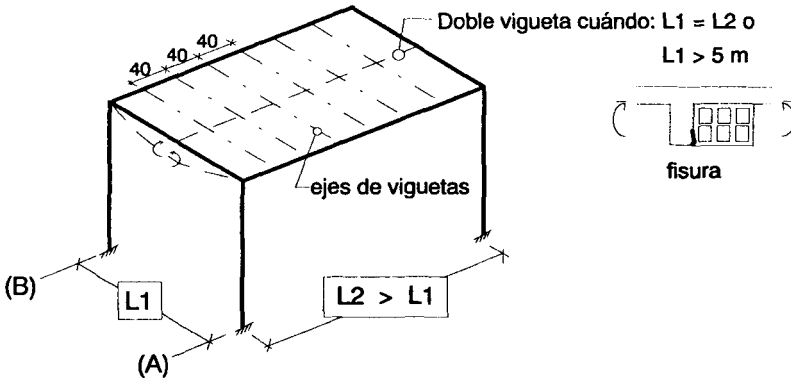


Fig. 7.2. Aligerado Unidireccional. Ejes Portantes A y B.

Debe tenerse presente que las viguetas no llevan refuerzo por corte (estribos), debiendo el concreto absorber íntegramente la fuerza cortante. En aligerados de grandes luces, o cuando la sobrecarga es importante, será necesario ensanchar las viguetas en las zonas donde el cortante actuante (V) resulte mayor al resistente (Vc); por lo general, este ensanche se realiza en forma alternada (Fig. 7.3), retirando ladrillos y llenando esos espacios con concreto. En estos aligerados también podría ocurrir problemas de grandes deflexiones que al superar los límites permitidos por el reglamento, dañarían los cielos rasos y la tabiquería, este problema se supera construyendo los aligerados con una contraflecha (especificada en los planos estructurales), o aumentando su espesor.

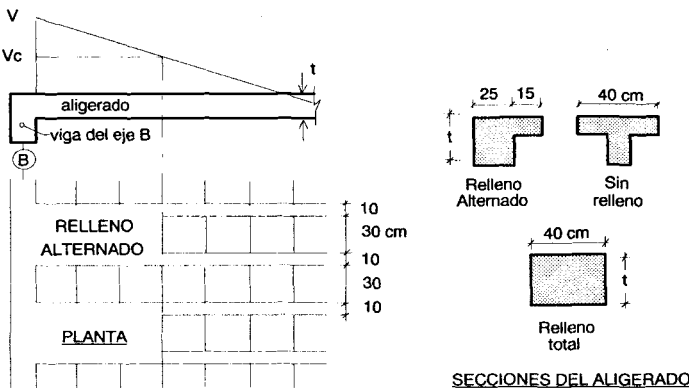


Fig. 7.3. Caso en que la Fuerza Cortante Actuante (V) es Mayor a la Resistente (Vc).

Cuando existen tabiques de albañilería dirigidos en el sentido del armado (Fig. 7.4), se tendrá que correr bajo ellos vigas chatas (con un peralte igual al espesor del aligerado) o doble viguetas, capaces de soportar al tabique y de evitar su agrietamiento por deflexión del elemento de soporte. Cabe indicar que las deflexiones diferidas (producidas a lo largo del tiempo al cerrarse los poros del concreto) son las que deben verificarse, ya que se supone que el tabique se construye después de desencofrar la estructura principal, lo que da lugar a las denominadas deflexiones instantáneas.

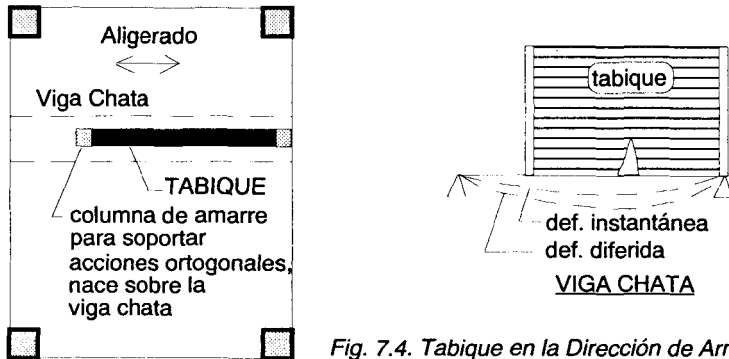


Fig. 7.4. Tabique en la Dirección de Armado

7.1.1. Ductos y Diafragmas Flexibles

En las zonas donde se produzca la discontinuidad del aligerado, por la presencia de ductos de basura, instalaciones sanitarias, chimeneas, etc., es conveniente rodear la discontinuidad con vigas chatas o doble vigueta (Fig. 7.5), para así atenuar las concentraciones de esfuerzos que surgen en las esquinas. Pero, si el ducto fuese de ventilación o de iluminación, bastaría con correr los nervios de las viguetas, formando una zona calada con 30 cm de ancho.

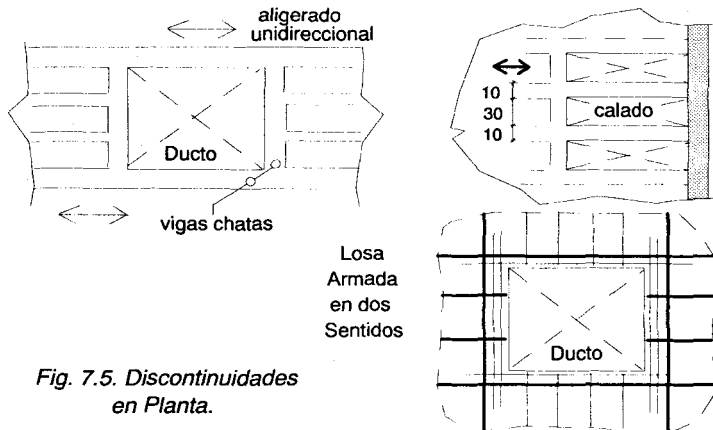


Fig. 7.5. Discontinuidades en Planta.

En el caso de losas macizas armadas en los dos sentidos, se adiciona en los bordes del ducto (Fig. 7.5) el refuerzo que se dejó de continuar (convenientemente anclado), pero, cuando el ducto tiene grandes dimensiones, deberá añadirse refuerzo diagonal en las esquinas.

Especial precaución deberá tenerse cuando existen placas sin vigas coplanares en uno o en sus dos bordes (Fig. 7.6), ya que cuando giran por flexión, la placa puede punzonar al aligerado. En esas zonas se recomienda usar una losa maciza, que incluso permite una mejor transferencia de las fuerzas de inercia desde la losa hacia la placa.

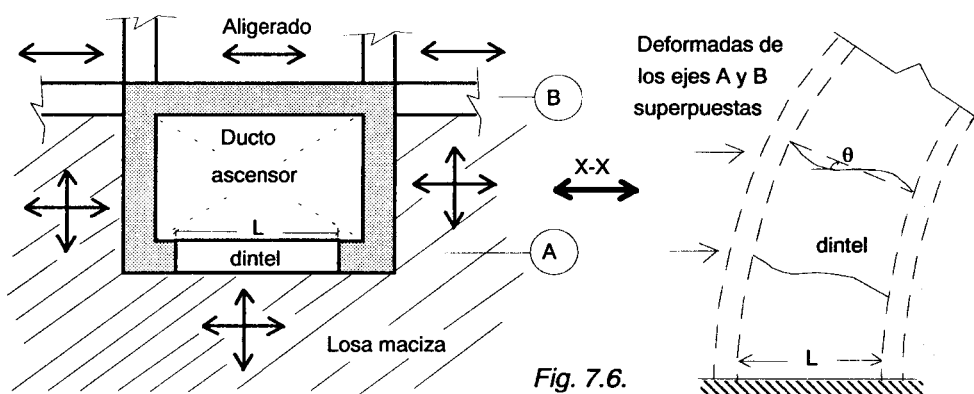


Fig. 7.6.

Por lo general, para el análisis sísmico en X-X (Fig. 7.6), se acostumbra modelar la caja del ascensor desdoblándola en dos partes (ejes A y B), eso hace que el pórtico A (que contiene a la viga dintel) tenga bajos esfuerzos, mientras que en realidad se ha observado fallas por corte en los dinteles, esto se debe a que la caja trabaja en conjunto, por lo que se recomienda para efectos de diseño del dintel, evaluar el desplazamiento vertical relativo entre sus extremos ($\delta = \theta L$), utilizando el giro (θ) correspondiente a la placa del eje B, para finalmente calcular el momento flector en los extremos del dintel mediante la expresión $M_v = 6 E I \delta / L^2$ y, por equilibrio, la fuerza cortante respectiva.

Debe tenerse en cuenta que la presencia de muchos vacíos en la losa atentan contra la hipótesis de diafragma rígido, en cuyo caso, el análisis sísmico debe contemplar este hecho ("**DIAFRAGMA FLEXIBLE**"); por ejemplo, si se efectúase el análisis sísmico traslacional según la dirección Y-Y del edificio mostrado en la Fig. 7.7, a pesar que el eje C tiene mayor rigidez lateral que los ejes A y B, absorberá poca fuerza cortante, debido a que las vigas (1-B-C y 2-B-C) que lo conectan contra la losa del techo se deforman.

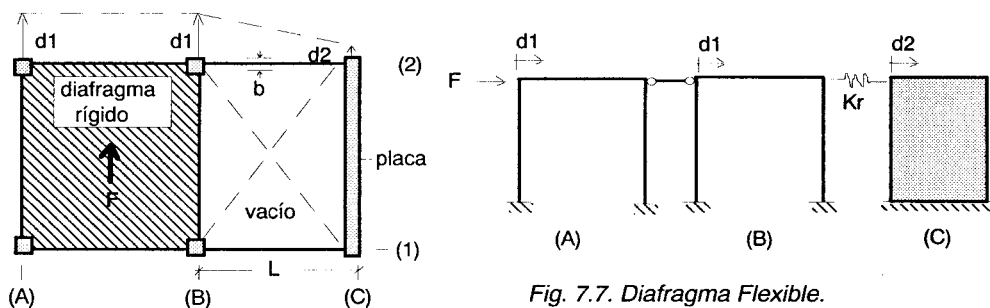
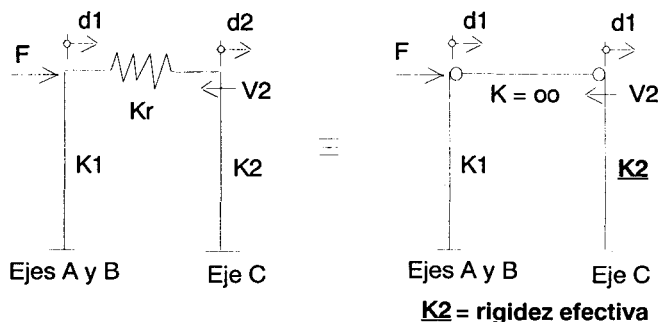


Fig. 7.7. Diafragma Flexible.

Para el análisis sísmico en la dirección Y-Y (Fig. 7.7), la constante de resorte "Kr" puede calcularse suponiendo que las vigas 1-B-C y 2-B-C están biempotradas, lo que proporciona $K_r = \Sigma 12 E I_v / L^3$, con $I_v = d b^3 / 12$, donde "b" es el ancho de la viga y "d" su peralte. Para el análisis en la dirección X-X (Fig. 7.7), las vigas 1-B-C y 2-B-C se deforman axialmente, por lo que $K_r = \Sigma E A_v / L$, donde $A_v = b d$; en esta situación, esas vigas deberán diseñarse de tal forma que se evite su falla por pandeo.

Una manera de analizar el problema, asumiendo que los tres pórticos se desplazan la misma cantidad (d1), consiste en disminuir la rigidez lateral del eje C, evaluando lo que se denomina la **RIGIDEZ LATERAL EFECTIVA = K**



Para el ejemplo mostrado en la Fig. 7.7, los ejes A y B al estar conectados por la losa, trabajan en paralelo, proporcionando una rigidez lateral total igual a K1, mientras que la rigidez del eje C (K2) es la que se desea modificar, sin que varíe la fuerza cortante que absorbe dicho eje (V2).

P = fuerza de interacción

$$V1 = K1 d1 = F - P \qquad V2 = K2 d2 = P$$

$$P = Kr (d1 - d2) = K2 d2 \Rightarrow \frac{d2}{d1} = \frac{Kr}{K2 + Kr}$$

Como $V2 = K2 d2 = \underline{K2} d1$ Resulta:

$$\underline{K2} = \frac{K2 Kr}{K2 + Kr}$$

En la expresión obtenida para la rigidez lateral efectiva $\underline{K2} = K2 Kr / (K2 + Kr)$, puede notarse que cuándo Kr tiende a ser infinito, entonces $\underline{K2} = K2$; es decir, el eje C trabaja al 100%. En cambio, cuándo Kr tiende a ser cero, $\underline{K2}$ se anula, lo que implica que el eje C no trabaja por más rígido que sea.

Este problema también puede presentarse cuando una losa cambia significativamente en sus dimensiones. Para el caso que se muestra en la Fig. 7.8 (vista en planta), la placa del eje C no trabaja al 100%, ya que la losa que la conecta contra el diafragma rígido se deforma. Si se supone que la extensión (apéndice) de la losa de concreto armado está biempotrada, entonces:

$$K_r = 12 E I / [L^3 (1 + 2 g)]$$

Donde:

$$I = t D^3 / 12$$

$$g = 1.38 (D / L)^2$$

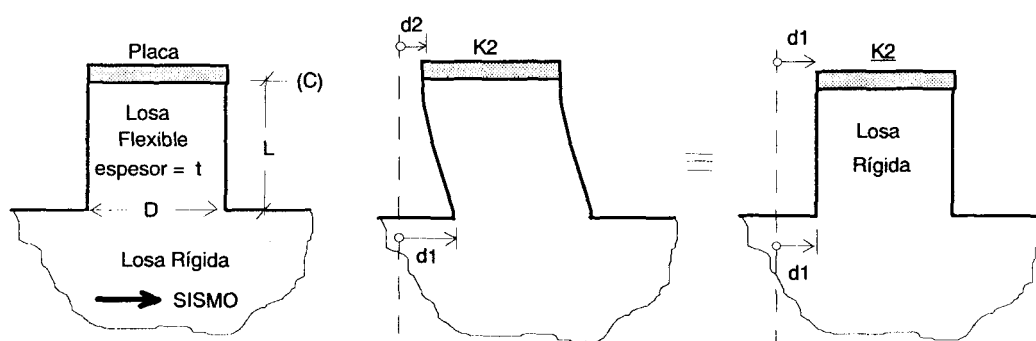
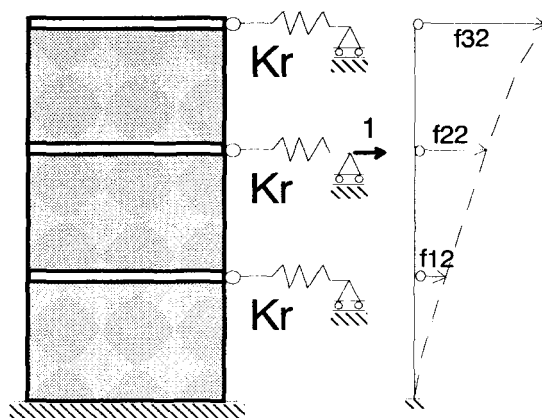


Fig. 7.8. Diafragma Flexible Conectado a Otro Rígido. Vista en Planta.

Si se emplea un programa de cómputo (por ejemplo, el programa "EDIFICIO"), donde se asume que los pórticos están conectados por diafragmas rígidos, entonces, para los casos mostrados en las figuras 7.7 y 7.8, la matriz de rigidez lateral de la placa correspondiente al eje C debe calcularse utilizando el modelo mostrado en la Fig. 7.9. En este caso, la matriz de flexibilidad lateral $[f_{ij}]$ se determina aplicando cargas unitarias en el extremo simplemente apoyado de cada resorte.

Fig. 7.9.

Elevación del eje C correspondiente a los Edificios de las Figuras 7.7 y 7.8. Cálculo de los coeficientes f_{i2} de la matriz de flexibilidad lateral.



En el caso que el programa de cómputo no admita resortes (Fig. 7.9), estos deberán ser reemplazados por bielas cuyas rigideces axiales son iguales a: $E A / L = K_r$. Usualmente, la longitud "L" y el módulo de elasticidad "E" de estas bielas son asumidas, y lo que se proporciona como dato al programa es el área axial de cada biela: $A = K_r L / E$.

7.1.3. Otros Sistemas de Techado para Ambientes con Grandes Luces

Cuando las luces del ambiente por techar son muy grandes, o cuando existen altas sobrecargas, se recurre a las siguientes soluciones (ordenadas de menor a mayor costo):

- 1.- Partición del Ambiente con Vigas Intermedias Peralgadas (Fig. 7.10). En este caso, debe tenerse presente que las vigas de los ejes A y B (apoyos de la viga intermedia) están sujetas a cargas concentradas, que las columnas trabajan a flexión biaxial y además, cabe la posibilidad de que el apoyo intermedio del aligerado (viga intermedia) tenga desplazamiento vertical relativo con respecto a sus apoyos extremos, ya que el punto de apoyo de la viga intermedia tiene mayor desplazamiento vertical que las columnas.

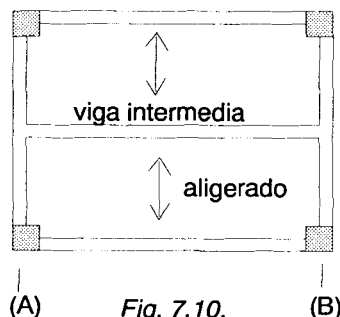


Fig. 7.10.

- 2.- Aligerado Armado en Dos Sentidos (Fig. 7.11). Los nervios de las viguetas se dirigen en los dos sentidos, y el espaciamiento entre viguetas puede variar modularmente, colocando 1 o 4 ladrillos en cada retícula, esta alternativa dependerá de las cargas actuantes y de las luces de los ambientes. El análisis estructural se realiza en forma similar al de una losa maciza armada en 2 sentidos.

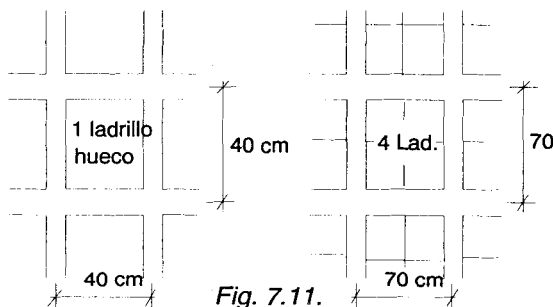


Fig. 7.11.

- 3.- Losa Maciza Armada en Dos Sentidos, Apoyada Sobre Vigas Peralgadas o Muros (Fig. 7.12). En este caso, la carga actuante en la losa se distribuye sobre las vigas (X, Y) aplicando la regla del sobre, para esto, se trazan rectas a 45° desde el vértice de cada ambiente, lo que

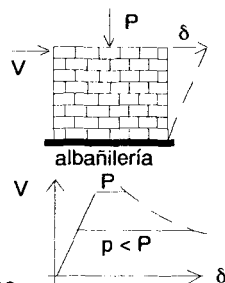
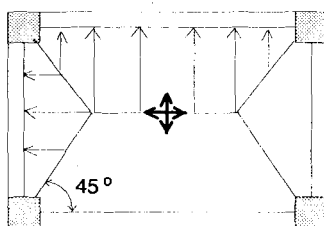
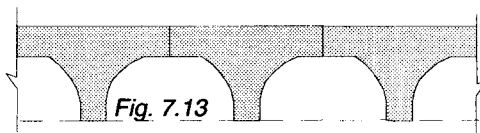


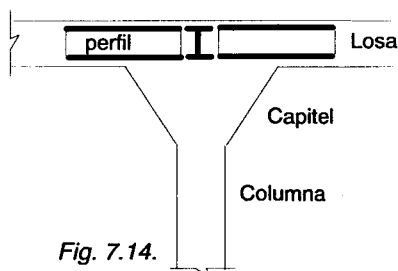
Fig. 7.12.

da lugar a cargas trapezoidales o triangulares sobre las vigas y a flexión biaxial en las columnas. Cabe mencionar que en los edificios de albañilería (confinada o armada internamente) de 4 o 5 pisos, es recomendable emplear una losa (maciza o aligerada) armada en los dos sentidos, con el objeto de que todos los muros (X, Y) porten una carga vertical (P) que no sea excesiva, ya que si bien la mayor carga axial incrementa la resistencia al corte (V) de esos muros, su ductilidad (o capacidad de deformación inelástica) disminuye drásticamente.

- 4.- **Techo Tipo Waffle.** Es prácticamente un aligerado armado en 2 sentidos sin ladrillos (Fig. 7.13); por lo general, se emplea encofrados metálicos para su construcción, pudiendo variar la forma, los espesores y el espaciamiento entre las viguetas.



- 5.- **Flat Slab (Losa Plana sin Vigas).** Son losas macizas armadas en dos sentidos que apoyan directamente sobre columnas. Para evitar que la columna punzone a la losa, las columnas se ensanchan en su extremo superior, formando capiteles tronco cónicos o piramidales (Fig. 7.14), también, para eliminar el problema mencionado, se recurre a la colocación de perfiles metálicos en el interior de la losa (en cruz). El análisis debe contemplar el hecho que la estructura está compuesta por elementos de sección variable (ver la Fig. 5.3).



- 6.- Cuando los ambientes son muy grandes, por ejemplo: gimnasios, almacenes, fábricas, etc., se recurre al techado metálico (Fig. 7.15), el cual está compuesto por tijerales (cerchas o armaduras) que reciben viguetas metálicas y como elementos de cobertura se emplean planchas de eternit, calamina, fibrablock, etc. El arriostre de los tijerales principales (para proporcionarles estabilidad ante las acciones perpendiculares a su plano) se efectúa mediante armaduras transversales o con tirantes diagonales anclados en las columnas vecinas, las que sirven de apoyo del tijeral principal. El arriostre de las viguetas se realiza con tirantes colocados al tercio de su longitud, dirigidos diagonalmente entre las viguetas vecinas. Por otro lado, a fin de evitar problemas por cambios de temperatura, los tijerales están simplemente apoyados sobre las columnas, uno de los apoyos es deslizante y el otro es fijo.

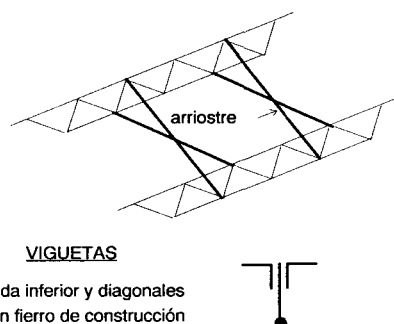
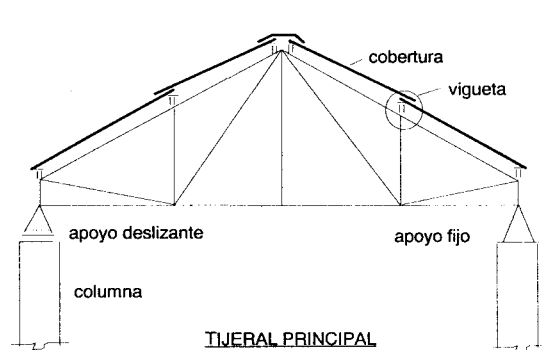


Fig. 7.15. Techo Metálico Empleando Tijerales.

En el caso de los techos tipo tribuna (empleados en los teatros, coliseos, aulas, etc.), el contrapaso de la grada se usa como una viga intermedia que sirve para apoyar la losa (paso de la grada), esta viga descansa sobre una viga inclinada, la que a su vez apoya sobre columnas. Ver la Fig. 7.16.

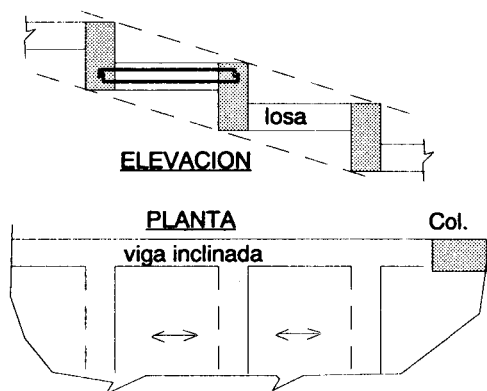


Fig. 7.16. Techo Tipo Tribuna.

7.1.4. Escaleras

Las escaleras son elementos que sirven de escape en caso ocurra un siniestro (sismo, incendio, etc.), por lo que debe prestársele especial atención a su diseño.

Algunas veces, surge el problema de apoyar las escaleras, por ejemplo, para el caso mostrado en la Fig. 7.17, si el eje A no estuviese muy alejado del descanso y si no se estorbase la circulación de las personas, puede adoptarse como solución, la prolongación del descanso hasta que apoye sobre una viga creada en la parte intermedia del entrepiso. Por otro

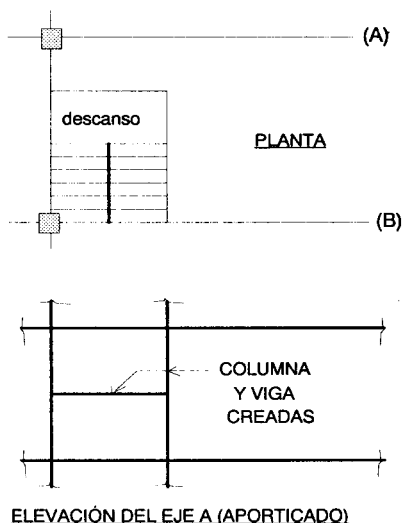
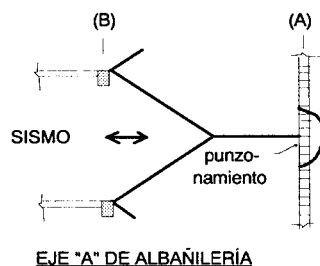


Fig. 7.17.



lado, si el eje A fuese un muro de albañilería, éste puede fallar por punzonamiento debido a los empujes sísmicos que le ocasiona la escalera; en ese caso, debe adicionarse columnas en los extremos del descanso (similar a la solución aporticada) y diseñarlas como si fuesen las vigas de una parrilla, para absorber dicho empuje.

Si el eje A estuviese muy alejado del descanso (Fig. 7.18), puede colocarse un tirante para sostenerlo (plaqueta), o también, puede recurrirse a la solución de escalera autoportante (apoyada en las vigas del eje B, con el descanso libre); sin embargo, debe

mencionarse que en las zonas sísmicas la última solución es peligrosa, ya que de fallar uno de los apoyos, la escalera autoportante puede colapsar.

Las escaleras son elementos rígidos, por lo que su mala ubicación en planta puede originar problemas de torsión sísmica. Una solución a este problema puede ser aislando la escalera de la estructura principal; sin embargo, para el caso que se muestra en la Fig. 7.19, es

conveniente que la cimentación de la escalera se conecte con la de la estructura principal, para evitar problemas de volcamiento por fuerzas sísmicas; esta solución deberá emplearse sólo para edificios hasta de dos pisos.

En la solución mostrada en la Fig. 7.19, los peldaños salen como elementos en voladizo empotrados en la placa, y bajo el descanso se ha corrido una viga que trabaja tanto a flexión como a torsión (el descanso trabaja como un balancín apoyado sobre la viga).

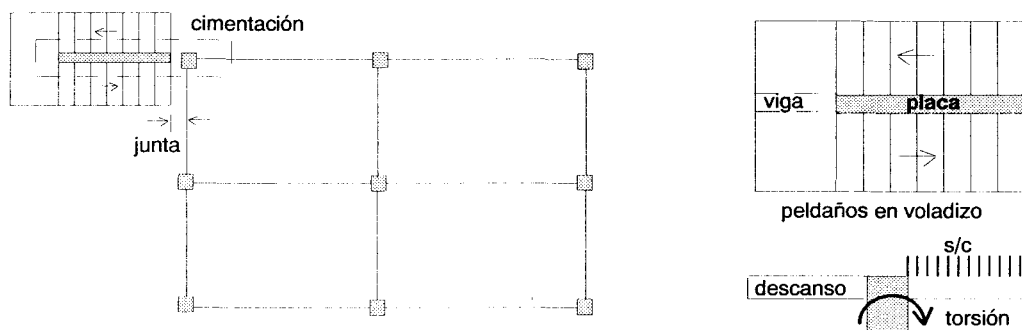
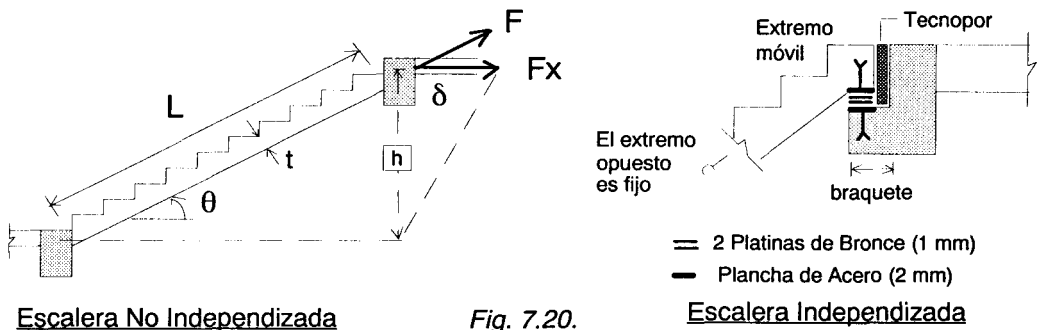


Fig. 7.19. Escalera Aislada de la Estructura Principal.

Las escaleras de un sólo tramo son lateralmente muy rígidas, por lo que cuando están mal ubicadas en la planta del edificio, conviene independizarlas de la estructura principal, tal como se muestra en la Fig. 7.20.



Llamando δ al desplazamiento horizontal del entrepiso, la fuerza axial en la escalera no independizada será $F = (E A / L) \delta \cos \theta$, y la proyección de esa fuerza en la dirección del movimiento será $F_x = (E A / L) \delta \cos^2 \theta$, por lo que la rigidez lateral de la escalera de un sólo tramo resulta:

$$K = \frac{F_x}{\delta} = \frac{E A \cos^2 \theta}{L}$$

Por ejemplo, para $L = 5$ m, con una altura de entrepiso $h = 3$ m, $E = 210$ ton/cm², ancho de la escalera $B = 110$ cm y un espesor de la garganta $t = 15$ cm, se obtiene:

$$K \text{ (escalera no independizada)} = 210 \times 110 \times 15 \times (4 / 5)^2 / 500 = 444 \text{ ton/cm}$$

Comparando esa rigidez con la de una columna biempotrada de 30x50 cm, se tiene:

$$K \text{ (columna)} = 12 E I / h^3 = 12 \times 210 \times 30 \times 50^3 / (12 \times 300^3) = 30 \text{ ton/cm}$$

Por lo que la escalera equivale a 15 columnas de proporciones regulares (30x50 cm).

Sin embargo, cuando la escalera es de 2 tramos (Fig. 7.21), su rigidez lateral disminuye considerablemente, ya que en este caso ella se deforma principalmente por flexión. Los pasos para calcular la rigidez lateral de una escalera de dos tramos se muestran a continuación.

1.- Calcular el desplazamiento relativo entre los extremos de las barras:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= + \delta / (2 \operatorname{Sen} \theta) \\ \delta_{23} &= - \delta / (2 \operatorname{tg} \theta) \\ \delta_{24} &= + \delta / (2 \operatorname{Sen} \theta) \end{aligned}$$

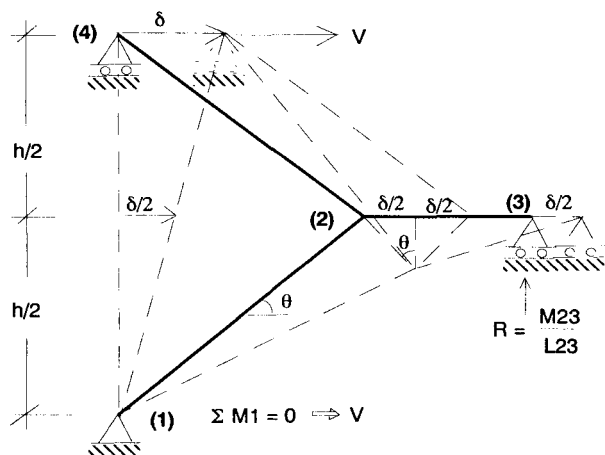


Fig. 7.21. Escalera de Dos Tramos.

- 2.- Determinar los momentos de empotramiento: $\mu_{ij} = -3 E I_j \delta_{ij} / L_{ij}^2$
- 3.- Resolver por Cross y hallar V por equilibrio.
- 4.- Finalmente, evaluar la rigidez lateral de la escalera: $K = V / \delta$

7.1.5. Problemas Propuestos

- 1.- Calcule la fuerza que absorbe la placa en voladizo mostrada. Las rigideces laterales de las columnas se determinarán aplicando el método de Muto. Suponer:

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

$$E/G = 2.3$$

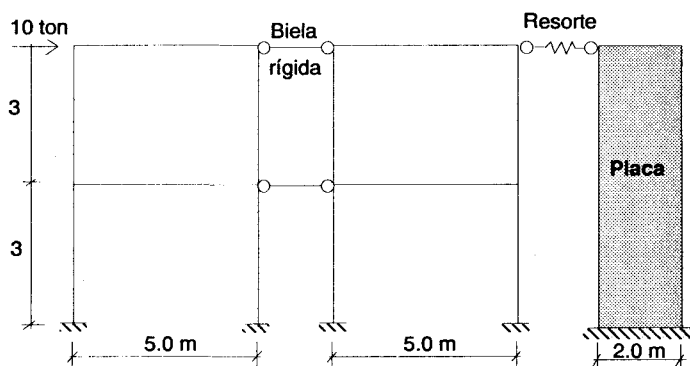
$$K_o = 1000 \text{ cm}^3$$

Vigas: 30 x 60 cm

Columnas: 30 x 45 cm

Placa: 15 x 200 cm

Resorte: $K_r = 2000 \text{ ton/m}$



RESULTADO: 3.68 ton

- 2.- La figura muestra la planta de un edificio aporticado de concreto armado de un piso; se pide: dibujar el DMF para la viga del eje A. Se seguirá el siguiente procedimiento:

- a) Aplicando el método de Muto, determine las rigideces laterales absolutas para todos los ejes. Nótese que por no existir losa en la zona B-C-1-2, deberá calcularse las rigideces laterales "efectivas" que aportan las columnas C-1 y C-2 en ambas direcciones.

- b) Analice sísmicamente al edificio en la dirección Y-Y. Luego de efectuar la corrección por torsión reglamentaria, se dibujará el DMF del eje A.

Datos:

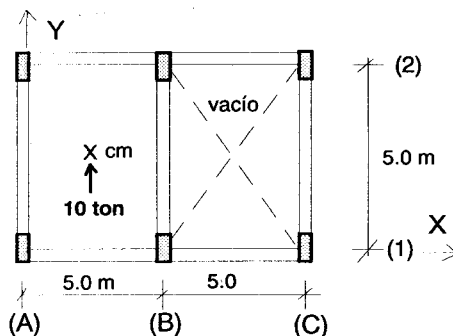
$$K_o = 0.001 \text{ m}^3$$

$$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$$

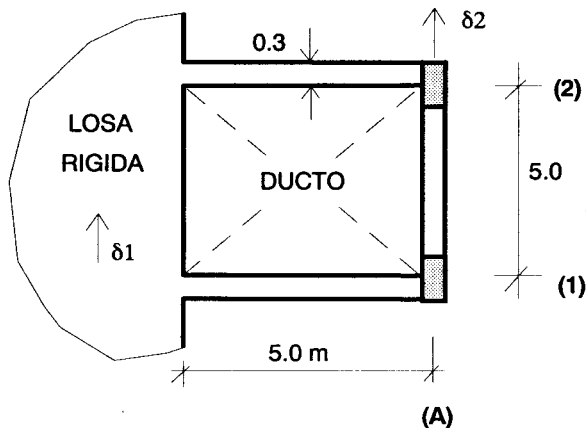
Vigas: 0.30 x 0.50 m

Columnas: 0.30 x 0.50 m

Altura de entrepiso: 3 m



- 3.- Determine la rigidez lateral efectiva del pórtico "A", perteneciente a un edificio de concreto armado ($E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$) de un piso. El cálculo de la rigidez lateral absoluta del eje "A" se hará mediante el método de Muto, suponiendo: $K_0 = 1000 \text{ cm}^3$, vigas y columnas de $30 \times 60 \text{ cm}$, altura de entrepiso $h = 3 \text{ m}$. Adicionalmente, se supondrá que las vigas transversales (ejes 1 y 2) están biempotradas.



RESULTADO: $K_r = 518.4 \text{ ton/m}$ $K_A = 4062 \text{ ton/m}$ $K_A = 460 \text{ ton/m}$

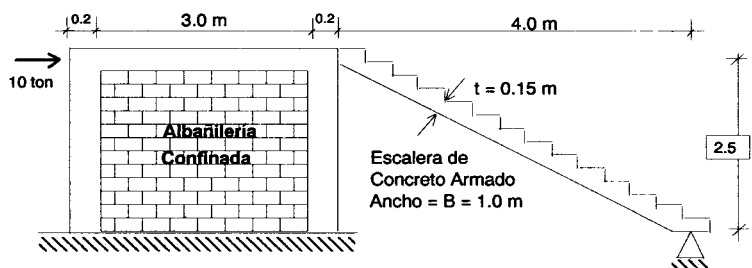
- 4.- Aplicando el método de Ozawa, calcule la rigidez lateral del sistema mostrado.

Datos:

Concreto Armado
 $E_c = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

Albañilería:
 $E_a = 500,000 \text{ ton/m}^2$
 $E_a / G_a = 2.5$

Espesor del muro
 confinado: 0.20 m



Columnas de confinamiento: $0.2 \times 0.2 \text{ m}$
 Altura de entrepiso = 2.50 m

Sugerencia: Calcular la rigidez lateral absoluta de la escalera (K_e) suponiendo que está articulada en sus dos extremos, luego, reemplazarla por una columna equivalente de albañilería con rigidez: $D_c = K_e / D_o$, donde $D_o = 12 E_a K_0 / h^2$.

RESULTADO: $K (\text{sistema}) = 83,237 \text{ ton/m}$

7.2. Estructuración por Carga Sísmica

Las fuerzas sísmicas son fuerzas de inercia producidas por el hecho que los niveles tienen masas sujetas a aceleraciones. La mayor parte de esta masa se encuentra localizada a la altura de los niveles (losa, vigas, acabados, sobrecarga, tabiques, etc.), mientras que la masa actuante en el entrepiso (columnas, placas, etc.) es más pequeña; por lo que para un análisis sísmico traslacional, puede suponerse que la masa se encuentra concentrada a la altura de los niveles (Fig. 7.22).

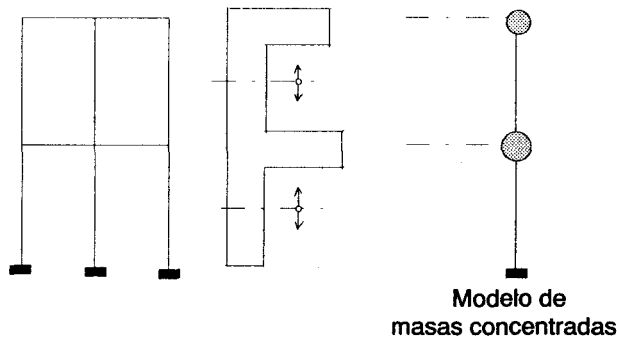


Fig. 7.22. Distribución de Masas en la Altura del Edificio.

Sísmicamente, la estructura ideal (Fig. 7.23) es aquella que tiene poca masa ($m \ll M$) y alta rigidez lateral ($K \gg k$); de esta manera, es necesario reducir la masa e incrementar la rigidez. Por ejemplo, el peso de los tabiques de albañilería se reduce cuando se emplea ladrillos con huecos tubulares ("pandereta"), también, el peso de una losa aligerada es menor al de una losa maciza, y la rigidez lateral que tienen las placas de concreto, o los muros de albañilería, es muy superior a la de las columnas.

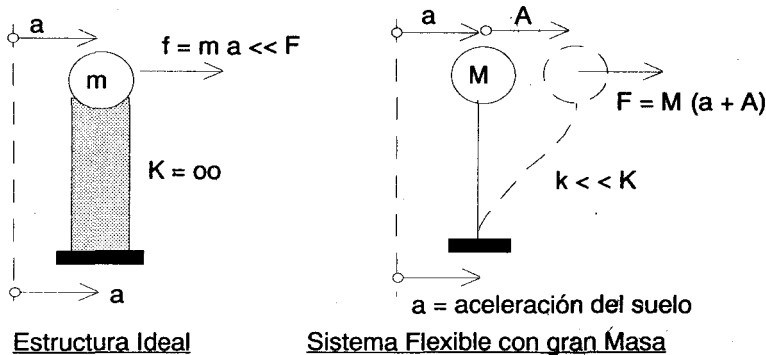


Fig. 7.23.

Por otro lado, un sismo ataca en cualquiera de las dos direcciones del edificio (Fig. 7.24), es decir, para un sismo no existen los "ejes principales". Antiguamente, se prestaba mucha atención a los ejes portantes de carga vertical, mientras que los ejes ortogonales eran considerados como arriostres, con vigas chatas y columnas de poco peralte, lo que producía el colapso del edificio en su dirección débil por ser muy flexible.

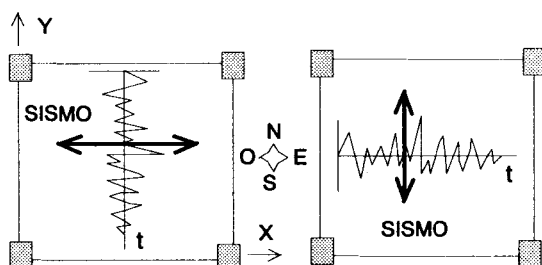


Fig. 7.24.

Actualmente, nuestro reglamento sísmico exige analizar cada dirección con el 100% del sismo actuando en forma independiente; sin embargo, otros reglamentos contemplan la posibilidad que el sismo actúe en forma simultánea en ambas direcciones: 100% en X y 30% en Y, y viceversa.

Asimismo, un sismo puede atacar en el sentido N-S o S-N y también E-O o O-E, ya que las aceleraciones son positivas y negativas. De esta manera, para efectos de diseño, debe trabajarse con la envolvente de esfuerzos en condición de rotura.

Para el cálculo de estas envolventes se recomienda efectuar el análisis estructural en estado de servicio para las tres solicitaciones básicas (tres hipótesis de carga, Fig. 7.25):

- 1.- Carga Permanente (D = Dead Load)
- 2.- Sobrecarga (L = Live Load)
- 3.- Sismo (E = Earthquake Load)

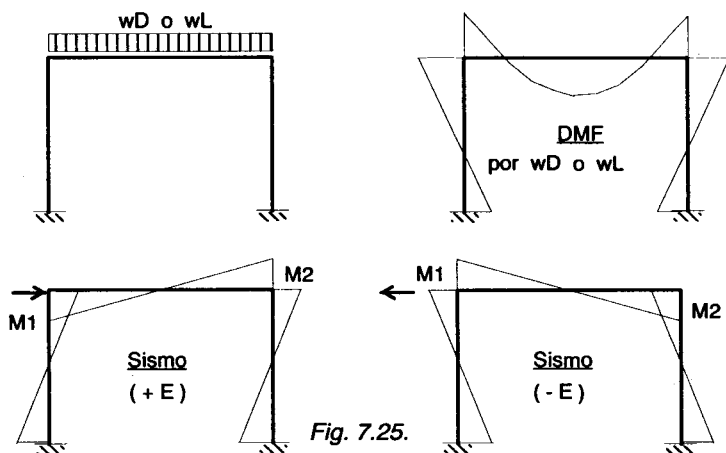
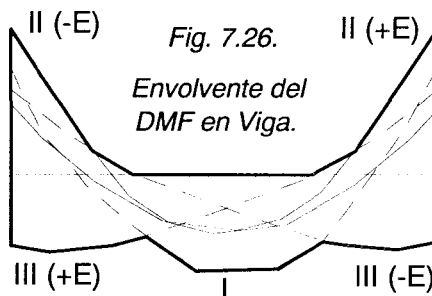


Fig. 7.25.

Para luego efectuar cinco combinaciones de carga, amplificando las solicitaciones de servicio por los factores de carga que especifica la Norma E-060 de Concreto Armado:

- | | |
|--|----------------------|
| I) Hipótesis de carga vertical:
($w_u = 1.5 w_D + 1.8 w_L$) | $1.5 D + 1.8 L$ |
| II) Hipótesis sísmica:
($w_u = 1.25 (w_D + w_L)$) | $1.25 (D + L \pm E)$ |
| III) Hipótesis sísmica con carga vertical reducida:
($w_u = 0.9 w_D$) | $0.9 D \pm 1.25 E$ |

La combinación I, se utiliza para calcular los máximos momentos flectores positivos y negativos por carga vertical en las vigas; la II, permite calcular los máximos momentos flectores negativos; y la III, sirve para obtener las inversiones de momentos en los extremos de las vigas, o la posibilidad de esfuerzos combinados de tracción con momento flector y fuerza cortante en los elementos verticales (placas, columnas, etc.). Cada combinación genera un diagrama de esfuerzos (momentos o cortantes) y para el diseño se emplea la curva que envuelve a estos diagramas (envolvente de esfuerzos en condición de rotura), ver la Fig. 7.26.



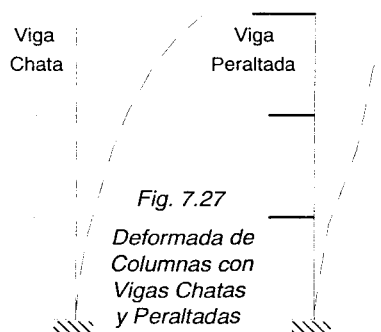
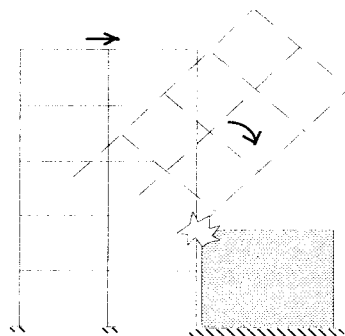
7.2.1. Rigidez, Continuidad Vertical, Hiperestaticidad y Efecto P- δ

Las fuerzas laterales generan desplazamientos horizontales que no deberían sobrepasar a los límites especificados por la Norma Sismo-resistente, con el objeto de:

- Evitar impactos entre edificios vecinos o bloques del mismo edificio.
- Minimizar los daños en los elementos no estructurales (tabiques, acabados, etc.).
- Evitar el pánico en las personas, especialmente cuando el edificio es público.

En el terremoto de México producido el año 1985, por ejemplo, ocurrieron daños severos por el choque entre edificios flexibles (aporticados) y rígidos (de albañilería), generando en algunos casos el colapso de ambos edificios.

Estas fuerzas de impacto son descomunales y no las contemplan ningún código del mundo, por lo que es necesario aislar los edificios vecinos mediante una junta sísmica de separación.



Una manera de rigidizar las estructuras aporticadas puede lograrse peraltando la sección transversal de las vigas (Fig. 7.27), lo que genera un semi-empotramiento en los extremos de las columnas; sin embargo, debe tenerse cuidado con esta solución, ya que podría provocar vigas muy resistentes que hagan que las rótulas plásticas se formen en las columnas y no en las vigas.

Cabe mencionar que en el Reglamento de Concreto Armado (Norma E-060) se especifica que los elementos

deben diseñarse de tal manera que las rótulas plásticas se formen en las vigas y no en las columnas, ya que a veces basta con que falle una sola columna como para que se produzca el colapso del edificio; en cambio, cuando las rótulas plásticas se forman en las vigas, se requiere que se generen una gran cantidad de rótulas para producir el mecanismo de colapso, disipándose la energía sísmica a través de esas rótulas. Por esta razón, es conveniente que la estructura sea lo más hiperestática posible; al respecto, en el terremoto de Kobe-Japón (1995), pudo observarse el colapso de autopistas elevadas (High Way, Fig. 7.28) cuyo tablero apoyaba sobre una línea de pilares en voladizo, en cambio, cuando el tablero apoyaba sobre pórticos con dos columnas (hiperestático), el comportamiento sísmico mejoró.

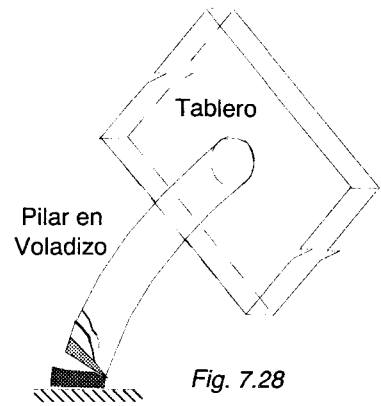


Fig. 7.28

Las acciones sísmicas verticales pueden producir el colapso parcial de grandes voladizos (como el alero de una tribuna en el estadio de Nasca, ante el sismo de 1996), así como también el colapso total de puentes largos simplemente apoyados (Fig. 7.29).

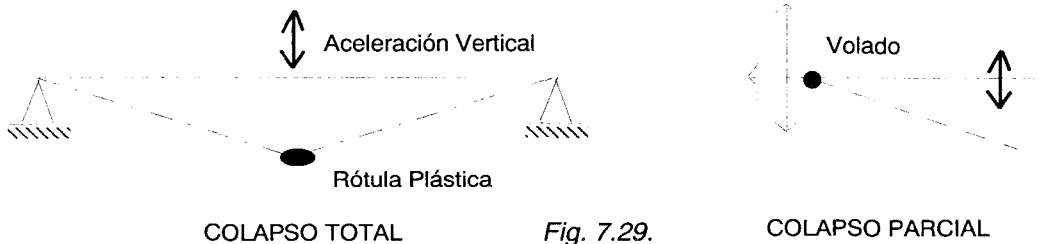


Fig. 7.29.

En la Fig. 7.30, se muestra el proceso de formación de rótulas plásticas en un pórtico con vigas más resistentes que las columnas (el momento resistente de las columnas es M_p). El primer punto en rotarse es la base de las columnas, para $V = M_p / (0.6 h)$; luego, ante un incremento de carga ($2 \Delta V$), se rotula el extremo superior cuando $\Delta V = 0.33 M_p/h$; finalmente, los desplazamientos laterales (δ) se tornan incontrolables y las cargas axiales (P) producen la inestabilidad del pórtico y el pandeo del refuerzo vertical.

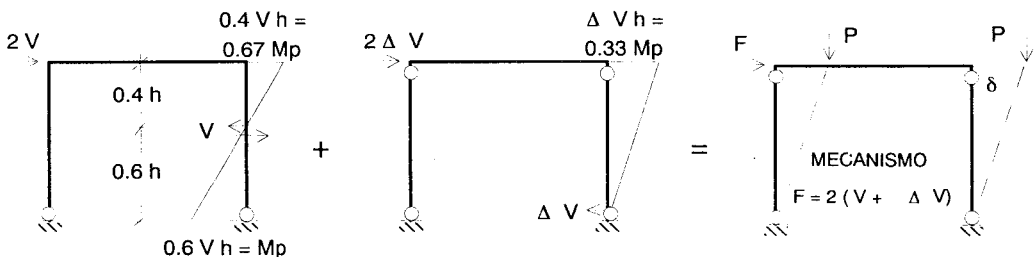


Fig. 7.30. Proceso de Formación de Rótulas Plásticas en un Pórtico.

La mejor manera de controlar los desplazamientos horizontales es mediante el empleo de placas de concreto armado, lo que a su vez hace que ellas absorban un gran porcentaje de la fuerza sísmica, aliviando el trabajo de los pórticos.

Por ejemplo, para el caso que se muestra en la Fig. 7.31, resulta más económico armar el aligerado en la dirección X-X que hacerlo según Y-Y, en vista que al techar en X-X, los pórticos orientados en la dirección Y-Y trabajan básicamente a carga vertical (las placas absorben prácticamente la totalidad de la fuerza sísmica), mientras que al techar según la dirección Y-Y, los pórticos X-X trabajan simultáneamente tanto a carga vertical como ante las fuerzas sísmicas.

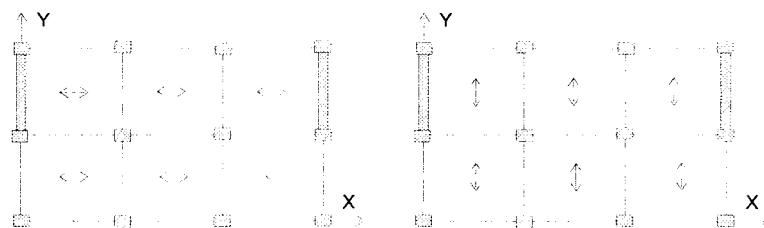


Fig. 7.31.

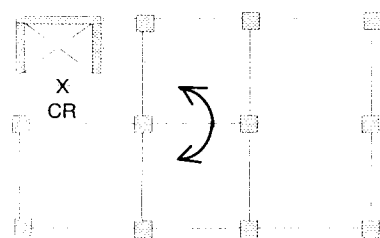


Fig. 7.32. Torsión en Planta.

Sin embargo, el uso de placas no debe ser indiscriminado, por su alto costo y también porque debido a su elevada rigidez lateral su mala disposición en planta puede producir problemas de torsión sísmica (Fig. 7.32).

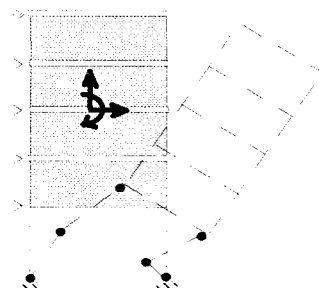
Asimismo, las placas deben tener **continuidad** a lo largo de su altura. Un problema que puede presentarse es el del **"PISO BLANDO"**, producido en aquellos edificios donde el primer piso se destina a cocheras o tiendas (Fig. 7.33).

En esos casos, debido a que la placa se discontinúa en el primer piso, transformándola en dos columnas, se presenta una variación muy brusca de rigideces entre el primer piso y los pisos superiores, estos últimos empiezan a trabajar como si fuesen un sólido rígido con 3 grados de libertad, que son: un desplazamiento horizontal, otro vertical y una rotación.

Al rotar los pisos superiores, se generan fuerzas axiales (P) elevadas en las columnas y por los grandes desplazamientos laterales (δ) que tiene el piso flexible, el peso excéntrico superior produce momentos adicionales ($P\delta$), formándose después rótulas plásticas en las columnas, lo que conlleva finalmente al colapso de estos edificios.

Fig. 7.33.

Piso Blando



La única manera de evitar el problema de Piso Blando es limitando los desplazamientos laterales de ese piso, mediante columnas robustas (prácticamente placas) o creando placas en el interior del edificio.

El EFECTO $P-\delta$ (Fig. 7.34) por lo general proporciona esfuerzos de segundo orden (despreciables) en las vigas y las columnas; sin embargo, cuando el edificio es muy flexible (aporticado) los esfuerzos que generan las cargas gravitacionales cuando la masa se desplaza horizontalmente (masa excéntrica), son importantes y deben sumarse con los producidos por las cargas sísmicas (F).

Una manera simplificada de contemplar el efecto $P-\delta$ consiste en realizar un proceso iterativo, donde en primer lugar se calcula el desplazamiento lateral (δ) producidos por la fuerza sísmica (F), luego, se determina una fuerza lateral equivalente (F') de tal manera que al actuar en conjunto con F , generen el mismo momento volcante (M), después, se vuelve a analizar el sistema sometiendo a una carga $F + F'$, esta fuerza producirá otro desplazamiento lateral, enseguida, se repite el proceso hasta lograr la convergencia de F' . Cabe indicar que usualmente el proceso converge con una sola iteración, y que la fuerza F permanece constante durante el proceso iterativo.

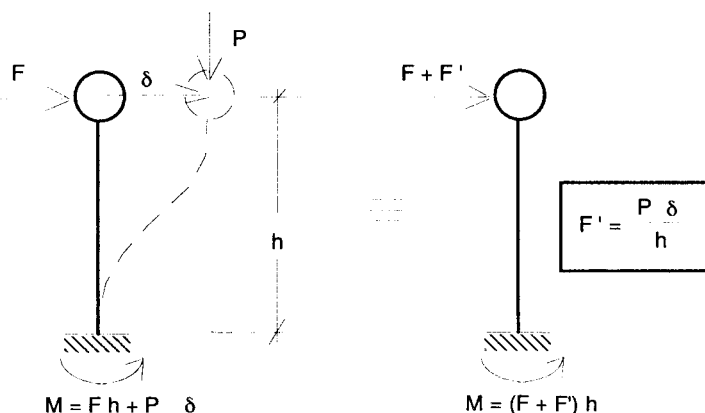


Fig. 7.34. Efecto $P - \delta$

Otro método aproximado consiste en amplificar los esfuerzos de primer orden (generados por " F ") por el factor $\alpha = 1 + Q' / Q$, donde Q y Q' son los cortantes en la base del edificio asociados a las fuerzas F y F' , respectivamente. Este procedimiento es empleado por la Norma de Concreto Armado E-060.

A continuación, para un edificio de " n " pisos, se muestra las ecuaciones que permiten calcular la fuerzas equivalentes F'_i . En este caso, la nomenclatura empleada es:

P_i = peso del nivel " i "

ΣP_i = peso acumulado por encima del nivel en análisis

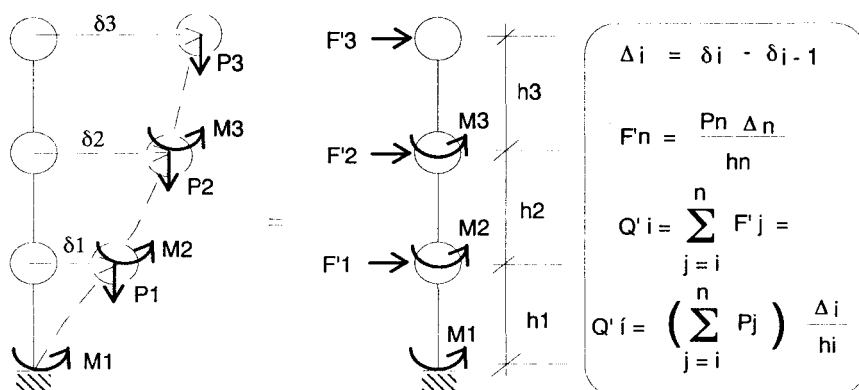
h_i = altura del entrepiso " i "

δ_i = desplazamiento lateral total del nivel " i " (producido por la fuerza sísmica F_i , mediante un análisis de primer orden).

Δ_i = desplazamiento relativo del entrepiso " i " = $\delta_i - \delta_{i-1}$

Q'_i = cortante en el entrepiso " i " producido por la fuerza equivalente F'_i

La fuerza lateral con la cual se reanaliza el edificio es $F_i + F'_i$, aplicada en cada nivel.



$$F'_i = \left(\sum_{j=i}^n P_j \right) \frac{\Delta_i}{h_i} - \sum_{j=i+1}^n F'_j = Q'_i - Q'_{i+1}$$

Como F'_i es una función de δ_i , P_i y h_i , existen programas de cómputo (entre ellos el programa EDIFICIO, en su opción de análisis modal traslacional) que modifican la matriz de rigidez lateral $[R]$ del edificio, para contemplar el efecto $P-\delta$ de la siguiente manera:

$$\{F\} + \{F'\} = \{F\} + [p]\{\delta\} = [R]\{\delta\}; \text{ luego,}$$

$$\{F\} = ([R] - [p])\{\delta\} = [R']\{\delta\}$$

Donde $[p]$ es una matriz simétrica cuyos coeficientes están en función de P_i y h_i .

7.2.2. Tabique y Alféizar de Albañilería

En nuestro medio se acostumbra utilizar tabiques hechos de albañilería por las buenas propiedades térmicas, acústicas e incombustibles que tiene ese material. Estos tabiques se emplean como elementos separadores de ambientes o de cerramiento en los pórticos ubicados en el perímetro del edificio. Por otro lado, la secuencia constructiva que se sigue en los edificios aporticados con tabiques que rellenan los paños ("Infilled Frames") es: primeramente se vacían las columnas y después las vigas en conjunto con la losa del techo; finalmente, luego de desencofrar la estructura principal (lo que hace que el pórtico sea el sistema que soporta la carga vertical), se construyen los tabiques rellinando con mortero la interconexión albañilería-concreto.

Ante los sismos leves, ciertas partes del pórtico se separan del tabique, debido a que la zona de interfase concreto-albañilería es muy débil, trabajando la albañilería como un puntal en compresión (Fig. 7.35); esto se debe a que la zona de interacción (contacto) se presenta en las esquinas, al deformarse el tabique por corte ("panel de corte"), mientras que el pórtico (más flexible que el tabique) se deforma principalmente por flexión.

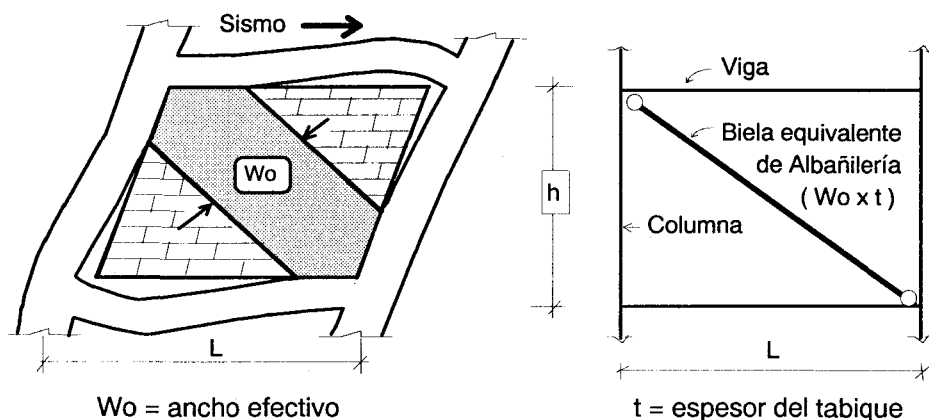
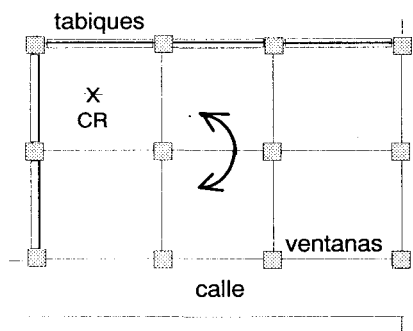


Fig. 7.35. Interacción Tabique-Pórtico.

El ancho efectivo del puntal equivalente (W_o) se asume que es aproximadamente igual a la longitud de la diagonal del tabique dividida entre cuatro, aunque en la Ref. 8 se presentan fórmulas empíricas que permiten calcular a " W_o " en función de las características elásticas y geométricas tanto del pórtico como del tabique.

Cuando los tabiques no se aíslan de la estructura principal (haciéndolos "flotantes"), los puntales rigidizan al edificio, incrementando las fuerzas sísmicas al reducirse el período natural de vibración, y muchas veces pueden originar problemas de: Torsión en Planta, Piso Blando y Columnas Cortas, tal como se muestra en la Fig. 7.36.



Torsión en un Edificio en Esquina

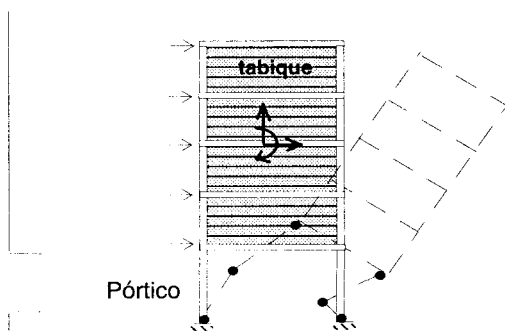


Fig. 7.36.

Piso Blando

El problema de la columna corta (Fig. 7.37) se presenta principalmente en los edificios escolares, cuando una columna larga es desplazada por la losa del techo y choca contra un alféizar de ventana alta, originándose distorsiones angulares que generan la falla por corte de la columna. Producida esta falla, la columna pierde rigidez y los desplazamientos laterales crecen considerablemente, finalmente, por efectos de la carga axial (efecto $P-\delta$), el refuerzo vertical termina pandeándose y la columna corta termina aplastándose.

Muchas veces, el proyectista no contempla la interacción entre la columna y el alféizar de albañilería, el cual es mucho más rígido que la columna, y evalúa la rigidez lateral (K) de la columna como si ésta fuese una columna larga, cometiendo un grave error, tal como se muestra a continuación (ver además la Fig. 7.37).

A fin de ilustrar el problema, se va a considerar que la columna está biempotrada y que sus dimensiones son 30x30 cm, con $E = 210 \text{ ton/cm}^2$. Bajo esa condición: $K = 12 E I / (h^3 (1 + 2g))$; donde $g = 1.38 (d / h)^2$, y $d = 30 \text{ cm}$.

Para $h = 50 \text{ cm} \rightarrow K \text{ corta} = 680 \text{ ton/cm}$

Para $h = 300 \text{ cm} \rightarrow K \text{ larga} = 6.3 \text{ ton/cm}$

Notándose que $K \text{ corta} / K \text{ larga} = 108$

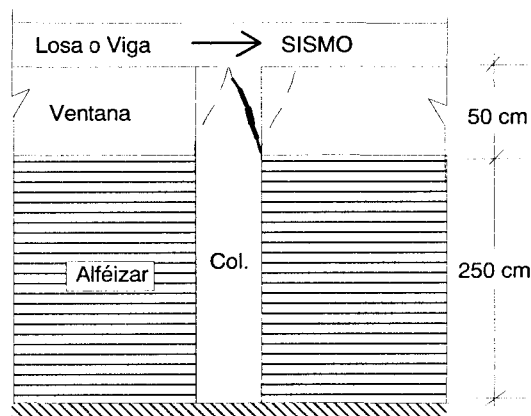


Fig. 7.37. Columna Corta.

La gran rigidez que tiene la columna corta hace que ella absorba un elevado porcentaje del cortante de entrepiso, también, ella puede crear problemas de torsión y al reducirse el período de vibrar, las fuerzas sísmicas se incrementarán. Para resolver el problema de las columnas cortas existen varias soluciones (ver la Fig. 7.38), como son:

- Aislar el alféizar de la estructura principal, arriostrándolo con elementos de concreto armado para que no se vuelque por cargas sísmicas perpendiculares a su plano. Cabe mencionar que en el sismo de Nasca (1996, Ref. 16) se practicó esta solución en algunos colegios, pero, el espesor de la junta (rellena con tecnopor) resultó insuficiente (menos de 2 cm), por lo que se produjo el problema de columna corta.
- Limitar los desplazamientos laterales peraltando las columnas (transformándolas prácticamente en pequeñas placas) o adicionar placas de concreto armado.
- Emplear planchas de fibrablock en vez del alféizar de albañilería. Estas planchas son muy flexibles y se reacomodan a las deformaciones de las columnas.

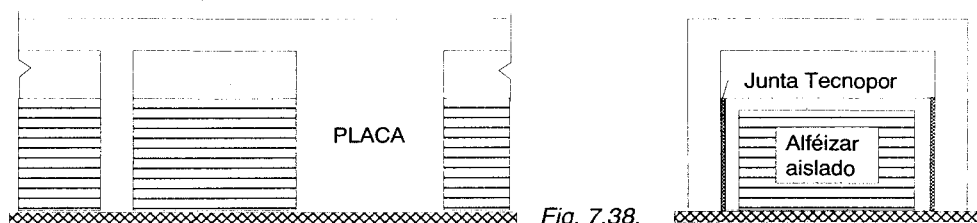


Fig. 7.38.

Cuando se presenta la interacción tabique-pórtico, los tabiques de albañilería pueden fallar (Fig. 7.39) por tracción diagonal, compresión en las esquinas en contacto con los

pórticos y por cizalle en su zona central (a la altura de la junta de construcción entre jornadas de trabajo), y las resistencias asociadas a cada falla aparecen en la Ref. 8.

De fallar uno de los tabiques del edificio, desaparecería el efecto de puntal y los resultados del análisis estructural que contemplaba la interacción no servirían. Por esta razón, se aconseja minimizar la interacción tabique-pórtico reduciendo la carga que absorbe el tabique (puntal), mediante la adición de placas de concreto armado, de tal manera que siempre el tabique se comporte en el rango elástico.

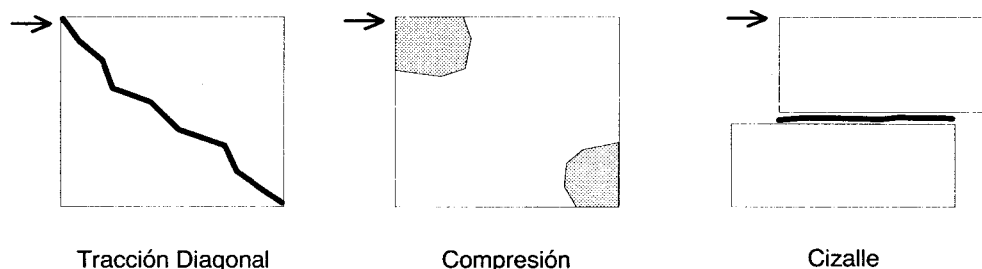


Fig. 7.39. Forma de Falla de los Tabiques de Albañilería.

Otra manera de atenuar la interacción tabique-pórtico consiste en emplear tabiques contruidos con planchas de fibrablock (o de madera), y para evitar la interacción, deberá aislarse los tabiques de la estructura principal. En el último caso, deberá arriostrarse la albañilería con elementos de concreto armado (separados de la estructura principal mediante juntas rellenas con tecnopor), capaces de evitar el vaciamiento del tabique ante acciones sísmicas perpendiculares a su plano.

7.2.3. Simetría y Juntas Sísmicas

Cuando un edificio presenta una gran asimetría en la forma de su planta (Fig. 7.40), o en elevación (Fig. 7.41), o cuando los elementos resistentes están mal dispuestos generando bloques con distintas características vibratorias, es conveniente separar el edificio en bloques mediante juntas sísmicas, de manera que estos bloques no interactúen entre si evitando el choque entre ellos.

El objetivo de estas subdivisiones será evitar problemas de torsión y los cambios bruscos de rigideces y masas entre los pisos consecutivos.

Cada uno de estos bloques deberán ser analizados en forma independiente, y la creación de la junta (rellena con algún material blando, por ejemplo, Tecnopor) implicará la adición de nuevas columnas o placas en la zona de separación. Cabe también mencionar que en la Norma Sismo-resistente se especifica el espesor mínimo que deben tener estas juntas.

A continuación, en la Fig. 7.40, se muestra algunas plantas irregulares que ameritan la creación de juntas sísmicas, que no necesitan atravesar la cimentación.

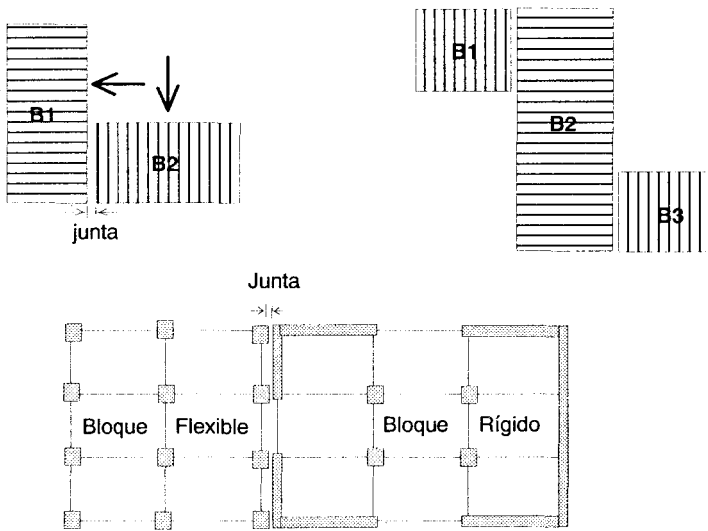


Fig. 7.40. Plantas Irregulares que Requieren Juntas Sísmicas.

Cuando el edificio tiene una reducción en planta considerable (Fig. 7.41), transformándose una zona en una torre, será necesario que la junta atraviese la cimentación, para así evitar problemas de asentamientos diferenciales (aplicando la teoría de la subrasante, recuérdese que los desplazamientos son proporcionales a los esfuerzos actuantes en el suelo).

Por otro lado, cuando el edificio muestra una planta muy alargada (más de 40 m), también es conveniente desdoblarlo en bloques, para de esta manera evitar problemas por cambios de temperatura o por contracción de secado del concreto.

Se ha presentado casos de edificios con plantas muy alargadas, donde el concreto del aligerado se vació de una sola vez, originándose fuertes contracciones que dieron lugar a fracturas diagonales en placas de concreto armado que tenían nada menos que 7 m de longitud, tal como se ilustra en la Fig. 7.42.

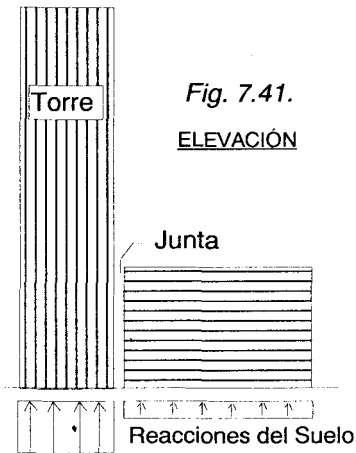


Fig. 7.41.

ELEVACIÓN

Una manera de solucionar el problema de contracción de secado consiste en vaciar el concreto del aligerado en dos etapas (franja izquierda y derecha respecto al eje central) dejando un tiempo prudencial (unas 2 semanas) entre ambas etapas, o empleando aditivos que retarden la fragua del concreto. Soluciones como las mencionadas, deberán especificarse en los planos estructurales.

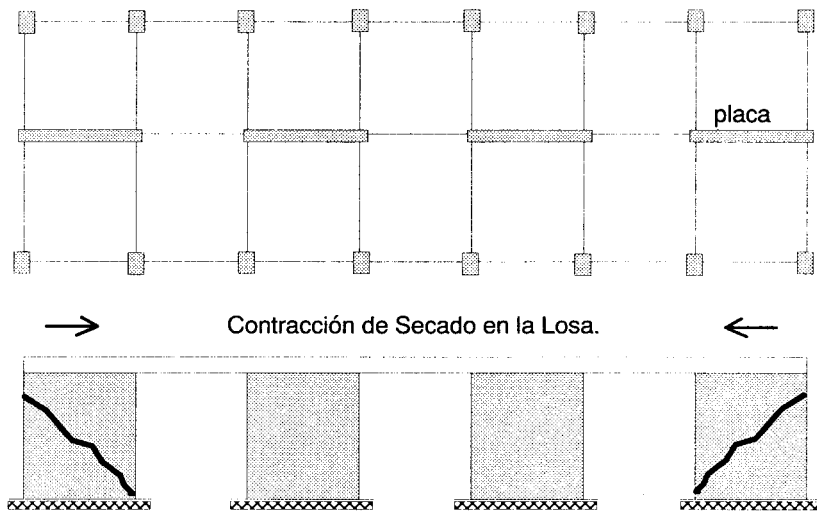
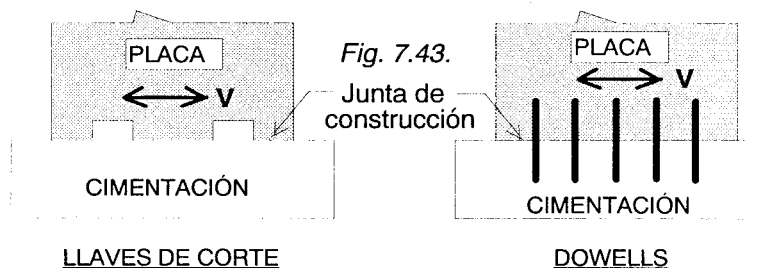


Fig. 7.42. Falla de Placas por Contracción de Secado de una Losa Alargada.

Cabe indicar que cuando se vacia el concreto en dos etapas, el concreto nuevo trata de retraerse, creándose una **JUNTA DE CONSTRUCCIÓN**, la cual constituye una zona potencial de falla; en consecuencia, esta junta deberá hacerse en las zonas menos esforzadas, por ejemplo, en el caso de una losa aligerada que carece de refuerzo por corte (estribos), esta junta deberá realizarse al centro del paño, puesto que en esa zona la fuerza cortante es mínima.

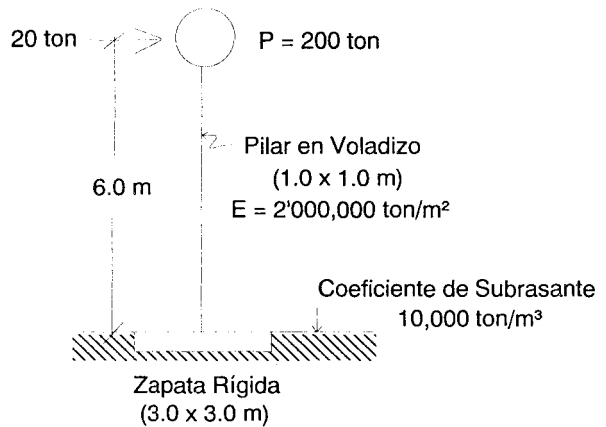
Debe mencionarse que estas juntas de construcción deben ser lo más rugosas posibles, asimismo, debe eliminarse las partículas sueltas y se debe humedecer el concreto antiguo antes de vaciar el concreto nuevo.

Por otro lado, muchas veces se ha observado fallas en las placas de concreto armado a la altura de las juntas horizontales de construcción, producidas por una mala transferencia de la gran fuerza cortante (V , en la Fig. 7.43) que absorbe la placa hacia la cimentación; este problema puede solucionarse diseñando llaves de corte en la interfase cimentación-placa, o sino diseñando espigas de acero vertical ("dowell") mediante la teoría de corte-fricción, estas espigas son barras adicionales a las que necesita la placa por flexión.



7.2.4. Problemas Propuestos

- 1.- La figura muestra el modelo matemático del pilar de un puente de concreto armado, cuya zapata apoya sobre un suelo flexible; contemplando el efecto $P-\delta$ y efectuando 2 iteraciones, se pide el momento flector en la base del pilar. Se despreciará la deformación por corte.



RESULTADO: 124 ton-m

- 2.- Aplicando el método de Muto y contemplando el efecto $P-\delta$ (2 ciclos), dibuje el DMF en las columnas y viga de arriostre correspondientes a la estructura mostrada. Se supondrá que las columnas no se deforman axialmente (contemplar sólo la traslación del tanque).

Datos:

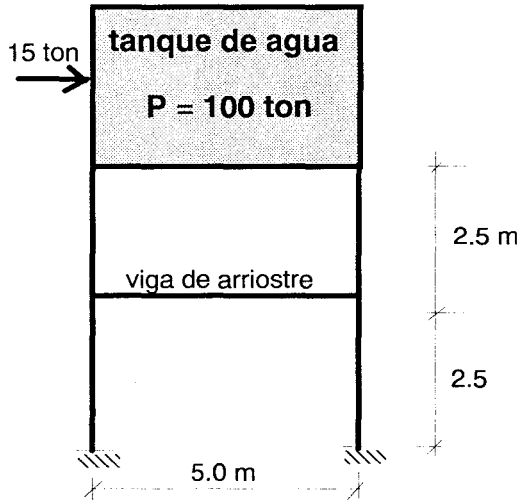
Columnas: 0.4 x 0.4 m

Viga: 0.3 x 0.5 m

$E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

$K_o = 0.001 \text{ m}^3$

Nota: por la rigidez que tienen las caras del tanque, puede asumirse que las columnas del segundo entrepiso están empotradas en su extremo superior. Adicionalmente, obsérvese que las columnas del primer y segundo piso (separadas por la viga de arriostre) están dispuestas en serie.



- 3.- La figura muestra la planta de un edificio aporticado de concreto armado de cuatro pisos; se pide: dibujar la envolvente de momento flector (en condición de rotura) para la viga del eje E (de un piso). Se seguirá el siguiente procedimiento:
- Aplicando el método de Cross, dibuje el DMF por carga vertical de servicio (hipótesis de carga: D y L) sólo para la viga del eje E.
 - Aplicando el método de Muto, calcule las rigideces laterales sólo del primer piso para todos los ejes.
 - Analice sísmicamente (hipótesis de carga: E) al edificio en la dirección Y-Y. La corrección por torsión reglamentaria se hará sólo para el primer piso. Luego, dibuje el DMF correspondiente al eje E.
 - Finalmente, empleando los factores de carga especificados por el RNC, dibuje la envolvente de momento flector para la viga del eje E.

Suponer:

$K_o = 1000 \text{ cm}^3$
 $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$

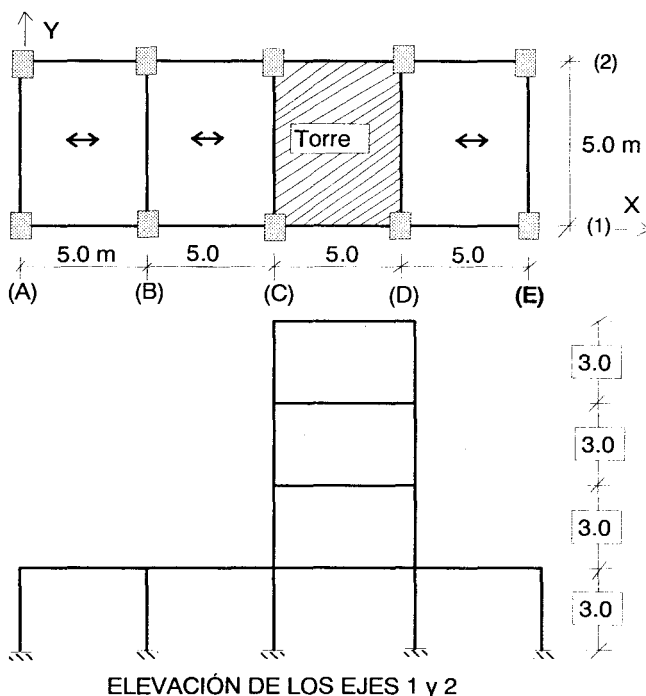
Vigas: $30 \times 50 \text{ cm}$

Columnas: $45 \times 45 \text{ cm}$
 Altura de entrepiso: 3 m

Aligerado: 0.3 ton/m^2
 Acabados: 0.1 ton/m^2
 $\gamma \text{ concreto} = 2.4 \text{ ton/m}^3$
 Sobrecarga: 0.2 ton/m^2

Fuerzas de inercia Y-Y
 aplicadas en el centroide
 de cada nivel:

$F_4 = 6 \text{ ton}$
 $F_3 = 5 \text{ ton}$
 $F_2 = 3 \text{ ton}$
 $F_1 = 6 \text{ ton}$

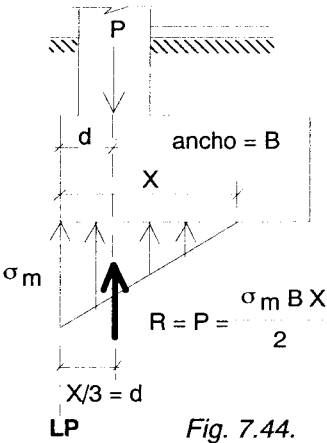


7.3. Cimentaciones

La estructuración que debe darse a la cimentación de un edificio, depende del tipo de suelo sobre el cual éste se ubique.

Para el caso que se cimente sobre **suelo duro**, las zapatas pueden ser superficiales, aisladas y no necesitan vigas que las enlacen, ya que al ser rígido el suelo, ellas vibrarán en fase ante los sismos.

Sin embargo, los problemas surgen cuando esas zapatas están ubicadas en el límite de propiedad (LP en la Fig. 7.44), en cuyo caso, la carga axial (P) puede caer fuera del núcleo central de la zapata, generándose tracciones en el suelo, por lo que la distribución de presiones será del tipo triangular. En este caso, si el esfuerzo máximo en el suelo (σ_m) supera al admisible, deberá emplearse otras soluciones como son las zapatas combinadas o las conectadas con una viga de cimentación (Fig 7.45).

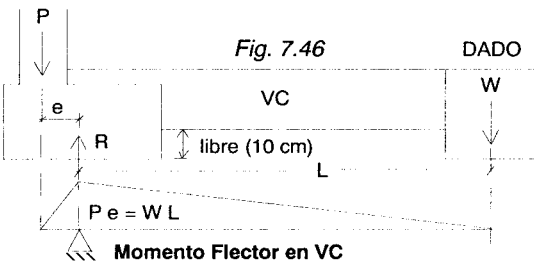
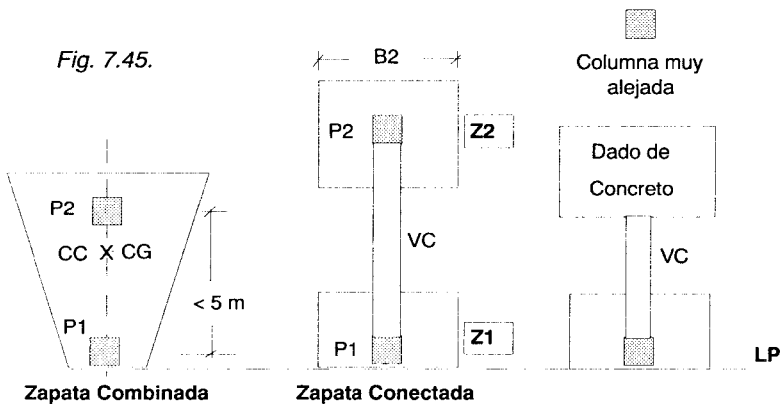


Estas soluciones dependen de cuán alejadas estén las columnas vecinas. Cuando esta distancia es menor que 5 m (Fig. 7.45), la solución zapata combinada

(una sólo zapata para las 2 columnas) es la más económica, mientras que cuando las columnas están muy distanciadas (por ejemplo, en fábricas, almacenes, etc.), se recurre a conectar

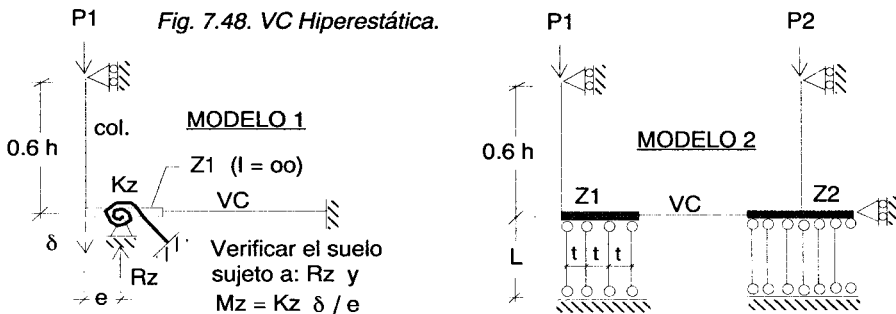
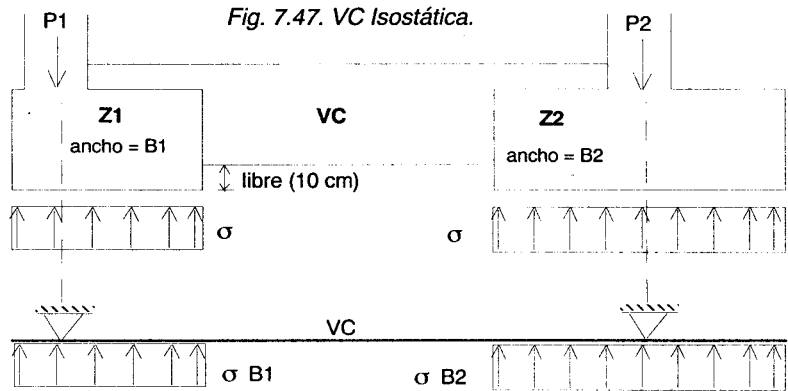
la zapata ubicada en el límite de propiedad a un contrapeso (dado de concreto), a través de una viga de cimentación (VC, Fig. 7.46), capaz de absorber el momento originado por la excentricidad de la carga axial (e).

Esta viga de cimentación deberá estar libre en su base (o con un material blando) para que pueda deformarse.



La forma que adopta la zapata combinada (o las dos conectadas, Fig. 7.45), debe ser tal que su centro de gravedad (CG) coincida con el punto de paso (CC) de la carga resultante ($P_1 + P_2$), para que de esta manera exista una distribución uniforme de la reacción del suelo (o la misma presión σ en las dos zapatas conectadas), con lo cual, se trata de evitar los asentamientos diferenciales.

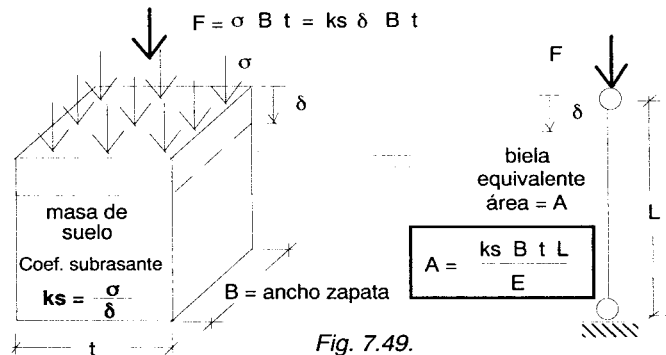
Usualmente, se analiza la viga de cimentación despreciando el efecto hiperestático de las columnas (como si la viga estuviese simplemente apoyada en las columnas, Fig. 7.47); sin embargo, mejores modelos matemáticos se muestran en la Fig. 7.48.



En ambos modelos, se ha supuesto que el punto de inflexión en la columna está localizado a $0.6 h$, siendo " h " la altura del primer entrepiso.

En el Modelo 1, para fines de un análisis manual, se ha supuesto que la zapata Z1 es rígida y tiene como grado de libertad traslacional al desplazamiento δ .

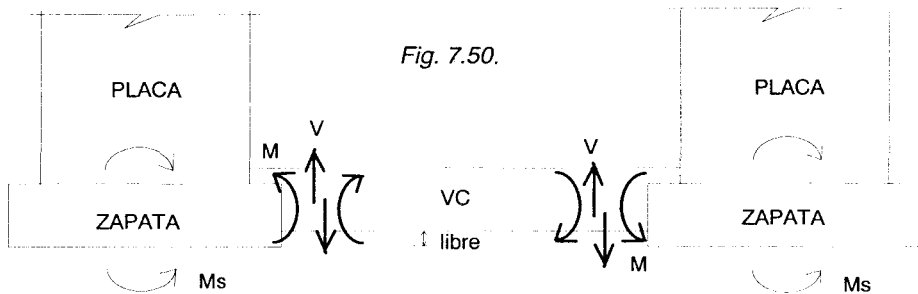
En el Modelo 2, las zapatas son flexibles y las bielas, que



están espaciadas a una distancia constante igual a "t", representan al suelo. Este modelo debe ser analizado por computadora y el área axial de cada biela (A) puede calcularse suponiendo que el suelo y la biela equivalente (con módulo de elasticidad igual a E), tienen la misma rigidez axial (ver la Fig. 7.49); en este caso, después de calcular δ , la presión en el suelo se obtiene como $\sigma = ks\delta$.

Por otro lado, es usual que las placas tengan un elevado momento flector en su base, por lo que para reducir el momento que se transmite al suelo (M_s , con el cual se dimensiona la zapata, Fig. 7.50), puede adicionarse vigas de cimentación, dándose su sección transversal y el refuerzo respectivo, lo que permite evaluar el momento plástico de la viga (M_p) y por equilibrio puede obtenerse la fuerza cortante correspondiente (V_p).

Como la cimentación se dimensiona en el rango elástico, M_p y V_p deben reducirse dividiéndolas por el factor de amplificación de carga sísmica 1.25 y multiplicándolas por el factor de reducción de resistencia por flexión ($\phi = 0.9$), ver la Norma E-060, para así obtener M y V en la viga. Al actuar M y V en sentido contrario sobre la zapata (Fig. 7.50), contrarrestarán al momento basal proveniente de la placa; luego, por equilibrio, puede evaluarse el momento que se transmite hacia el suelo (M_s). Si " M_s " resulta elevado, puede incrementarse tanto la sección transversal de la viga como su refuerzo respectivo.



Otra situación que puede ocurrir es que una placa y la columna vecina tengan una zapata combinada (Fig. 7.51). Usualmente, se supone que la zapata es rígida, con lo cual, al ser elevado el momento en la base de la placa (M_p), la reacción del suelo tendrá una distribución triangular, presentándose tracciones en el suelo en la zona donde está ubicada la columna. Esto querrá decir que la zapata deberá absorber una fuerza cortante igual a la carga axial que baja por la columna (P_c), requiriendo un gran peralte (D); esto no es cierto debido a que la zapata se deforma, por lo que es mejor trabajar con un modelo matemático similar

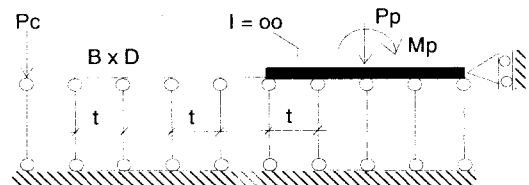
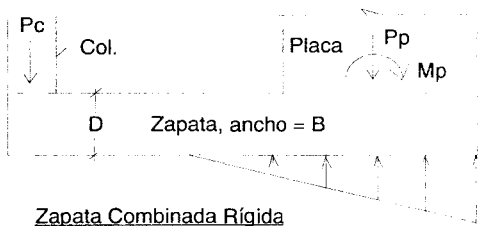


Fig. 7.51. Zapata Combinada Flexible.

al número 2, mostrado en la Fig. 7.48, donde la zapata es flexible (excepto en la zona donde está ubicada la placa, puesto que su gran altura la rigidiza), mientras que el suelo es modelado como un conjunto de bielas equivalentes que trabajan a compresión. Si alguna biela resulta traccionada, deberá volverse a analizar el sistema eliminando esa biela, ya que el suelo no trabaja a tracción.

Cuando el suelo de cimentación es relativamente **blando** y ocurriese que la suma de las áreas de las zapatas aisladas es mayor que el 50% del área en planta del edificio, o que las zapatas se traslapan, se usa otro sistema de cimentación denominado: Solado (o Platea) de Cimentación, el cuál puede ser rígido o flexible (Fig. 7.52).

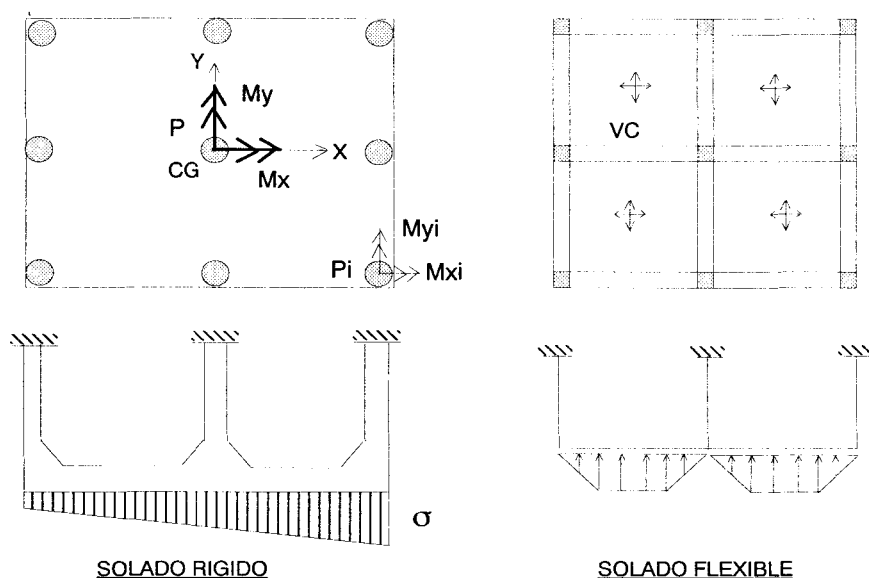


Fig. 7.52. Solado o Platea de Cimentación.

El solado rígido es una losa de cimentación de gran espesor, mientras que el solado flexible es una losa de menor espesor que apoya sobre vigas peraltadas. En ambos casos, la losa es de concreto armado en los dos sentidos y se asume que se comporta como una gran zapata aislada y rígida, sujeta a cargas axiales (P_i) y momentos bidireccionales (M_{xi} , M_{yi}) provenientes de las columnas o placas.

La carga axial (P) y los momentos (M_x , M_y) resultantes en el centro de gravedad del solado (incluyendo el peso del solado y las sobrecargas respectivas), producen esfuerzos sobre el suelo de cimentación (σ) que pueden calcularse aplicando la teoría de flexión biaxial compuesta: $\sigma = P / A + M_x Y / I_x + M_y X / I_y$; donde: X , Y son los ejes centrales principales, A es el área en planta del solado, e I_x , I_y son los momentos principales de inercia del solado. Esta teoría es válida siempre y cuando el suelo trabaje a compresión; de lo contrario, debe aplicarse las ecuaciones de equilibrio para calcular σ .

Después de calcular σ , deberá revisarse que el suelo no falle por compresión; asimismo, con la presión del suelo, podrá determinarse los esfuerzos internos en la losa.

Especial cuidado deberá tenerse cuando la losa apoya directamente sobre columnas (solado rígido), debido a la posibilidad de una falla por punzonamiento del solado (similar a los flat slabs), en cuyo caso, deberá colocarse capiteles en la base de las columnas.

En el caso de **suelos muy blandos** se recurre a la solución pilotes de punta (si el estrato blando es muy profundo se utiliza pilotes de fricción), donde las zapatas se conectan a través de vigas de cimentación (VC) que les permiten vibrar en forma ordenada (en fase) ante las acciones sísmicas, asimismo, estas vigas sirven para arriostrar la gran longitud que usualmente tienen los pilotes. Ver la Fig. 7.53.

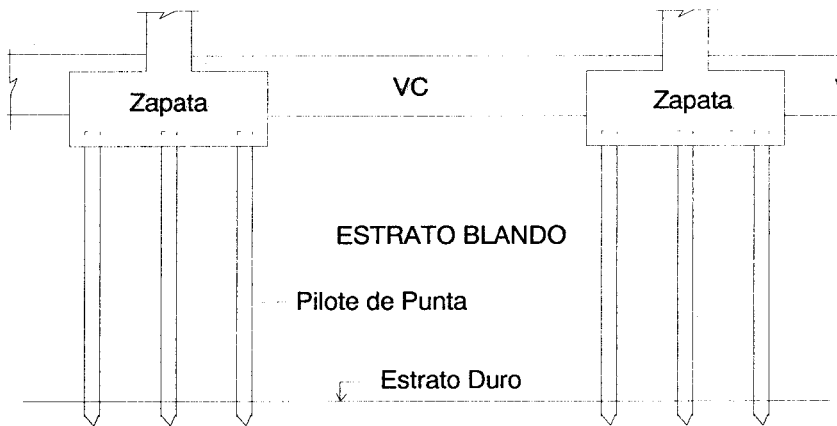


Fig. 7.53. Cimentación Empleando Pilotes de Punta.

Cabe indicar que los pilotes rigidizan la cimentación y se ha observado casos (Fig. 7.54) donde en uno de los ejes del edificio existía pilotes, mientras que en el eje paralelo, la cimentación era superficial; ésto produjo que las columnas cuyas zapatas apoyaban sobre pilotes fuesen más rígidas lateralmente que las que apoyaban sobre zapatas aisladas, presentándose problemas de torsión en la planta del edificio.

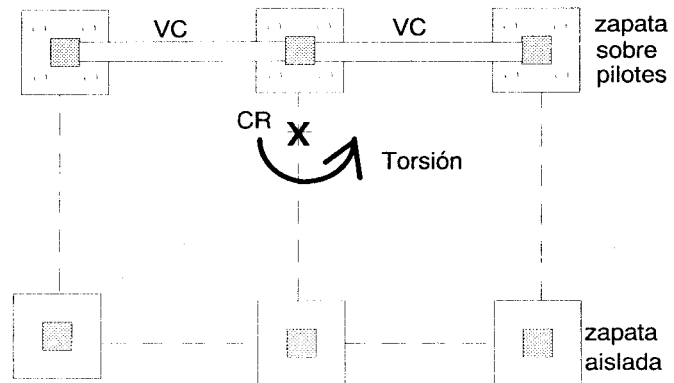


Fig. 7.54.

En líneas generales, debe evitarse cimentar sobre arenas sueltas, porque se pueden compactar (densificar) por las vibraciones sísmicas, causando asentamientos diferenciales en la superestructura; más aún, cuando este suelo tiene una napa freática elevada, puede producirse problemas de licuefacción, perdiendo la arena su capacidad portante, convirtiéndose prácticamente en “arena movediza”, esto ha ocurrido en Chimbote ante el sismo del 31 de Mayo de 1970.

En Tlara (1983) ocurrieron daños severos en viviendas de albañilería, cuya cimentación apoyaba sobre arcilla expansiva, ésta al entrar en contacto con el agua se hinchó originando asentamientos diferenciales y enormes grietas en los muros.

Una solución al problema mencionado, puede realizarse profundizando la cimentación, por debajo de la zona de hinchamiento (Fig. 7.55), y separando con material granular la columna de la arcilla expansiva, para de esta manera atenuar la fuerza de fricción que desarrolla la arcilla al expandirse; en este caso, el primer piso funcionará como un nivel adicional, cuya base no debe entrar en contacto con el suelo a fin de que la arcilla pueda expandirse.

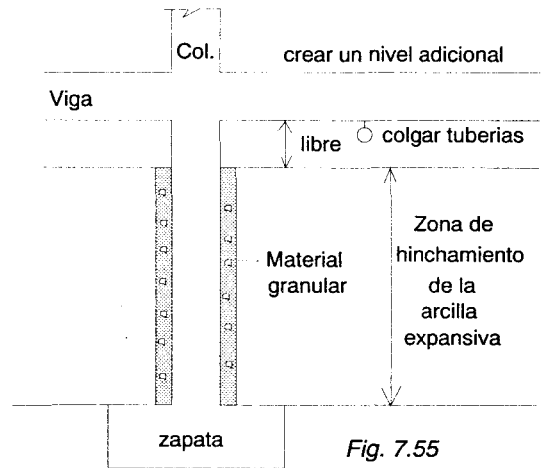
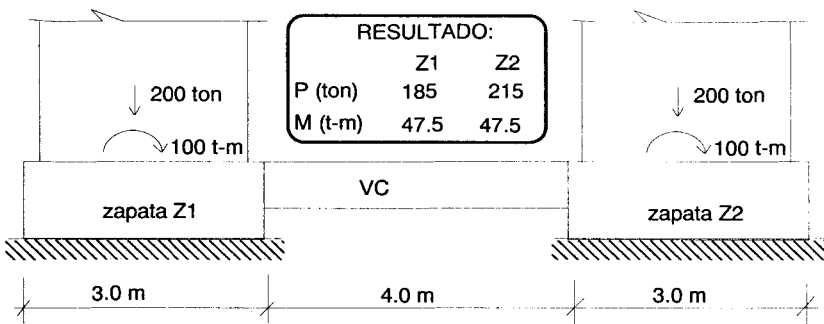


Fig. 7.55

7.3.1. Problema Propuesto

Asumiendo que la viga de cimentación (VC) plastifica en sus extremos, con un momento $M_p = 30 \text{ ton-m}$, determine la carga axial y el momento flector (ambos en condición de rotura) que transmite cada zapata hacia el suelo de cimentación.



INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN MATRICIAL DE ESTRUCTURAS PLANAS. Método Directo de Rigidez

El objetivo de este capítulo es efectuar una introducción al análisis matricial de estructuras, así como que el lector tenga una idea básica de como trabajan los programas de cómputo de análisis estructural (entre ellos, el programa EDIFICIO), incluyendo los más sofisticados como son los de Elementos Finitos.

En principio, se supone que la estructura está definida en un sistema de referencia dextrogiro, denominado SISTEMA GLOBAL (X, Y, Z), y que todos sus nudos pueden moverse positivamente en el sentido X, Y, Z, incluso los apoyos (Fig. 8.1), para después imponerles condiciones de restricción.

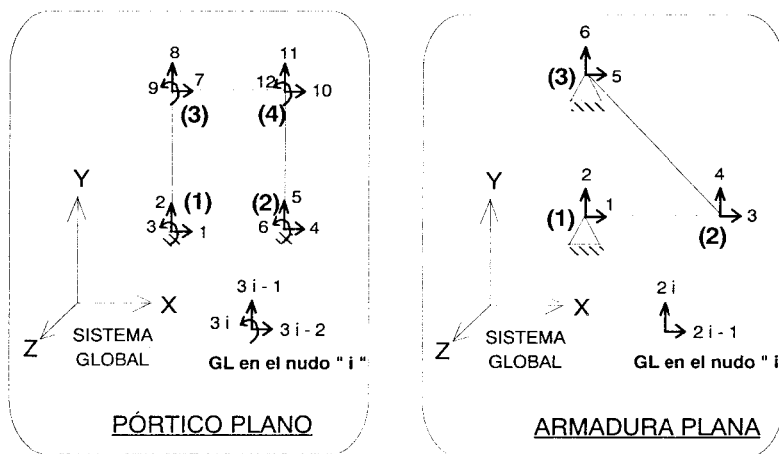


Fig. 8.1. Grados de Libertad de un Pórtico Plano y de una Armadura Plana.

En cada uno de los nudos, un pórtico plano tiene 3 grados de libertad (GL), mientras que una armadura plana tiene 2 GL y una viga continua 1 GL (Fig. 8.1A). La numeración

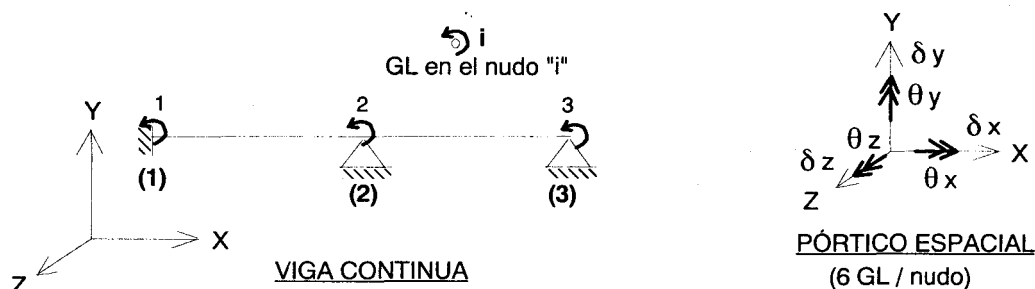


Fig. 8.1A. Grados de Libertad Rotacionales en una Viga Continua y Grados de Libertad en un Nudo de un Pórtico Espacial.

asignada a los grados de libertad está relacionada con la numeración que tienen los nudos, los cuales deben tener una numeración creciente y correlativa (desde 1 hasta n). De esta manera, si se conoce a que nudos concurre una barra i - j , se podrá identificar los GL en sus extremos.

8.1. Cargas Nodales {Q}

El método Directo de Rigidez hace uso de cargas aplicadas sobre los nudos de la estructura { Q }; estas cargas son positivas si siguen el sentido positivo de las coordenadas globales.

De esta manera, si existiesen cargas actuantes sobre las barras, debe aplicarse el principio de superposición, desdoblando a la estructura original en la suma de dos estados (Fig. 8.2), los cuales son:

- 1.- **ESTADO PRIMARIO.** En este estado se aplica todas las solicitaciones externas y se restringe todos los grados de libertad, mediante apoyos simples y conexiones de empotramiento. Con lo cual, al quedar fija la estructura, será cinemáticamente determinada, surgiendo un vector de reacciones { r } en los apoyos ficticios.

El cálculo de las reacciones { r } en el Estado Primario se realiza fijando los extremos de cada barra (Fig. 8.3) y aplicando sobre ella las solicitaciones respectivas, esto dará lugar a las acciones de empotramiento en cada barra { q' }_{Primario}, que se transmiten en sentido contrario sobre los nudos; luego, efectuando el equilibrio de cada nudo en el sistema global de referencia, se determinan las reacciones.

Como esas reacciones son ficticias (no existen en la estructura original), deberán eliminarse aplicando en el Estado Complementario un sistema de fuerzas en sentido contrario, la que dará lugar al Vector de Cargas Nodales { Q } = - { r }.

- 2.- **ESTADO COMPLEMENTARIO (o SISTEMA Q-D).** En este estado se aplica el vector de cargas nodales { Q } y se liberan los grados de libertad; éste estado es el que se resuelve mediante el Método Directo de Rigidez.

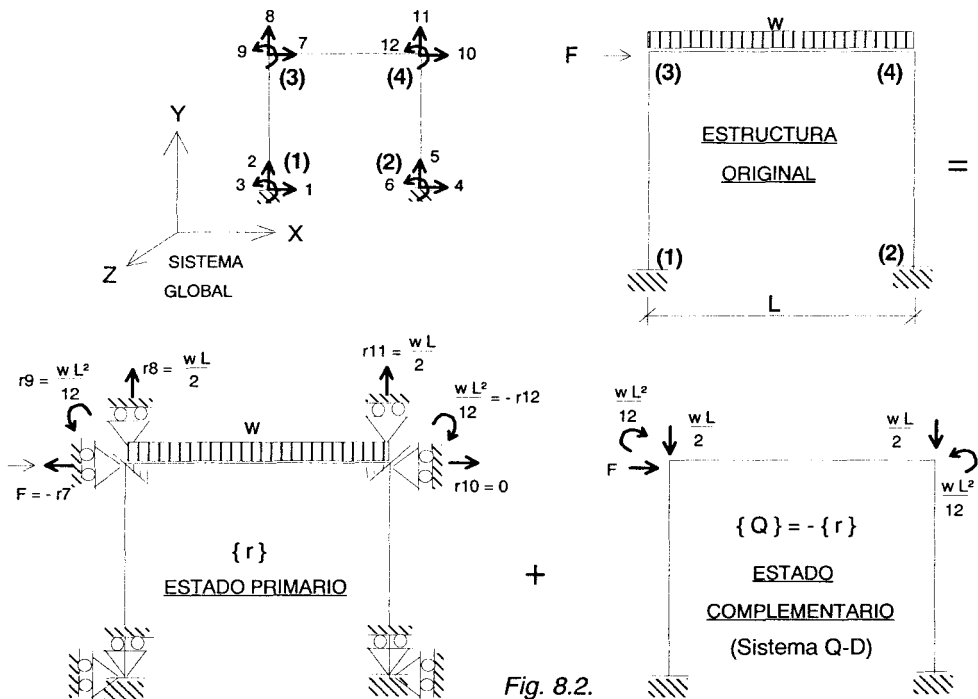
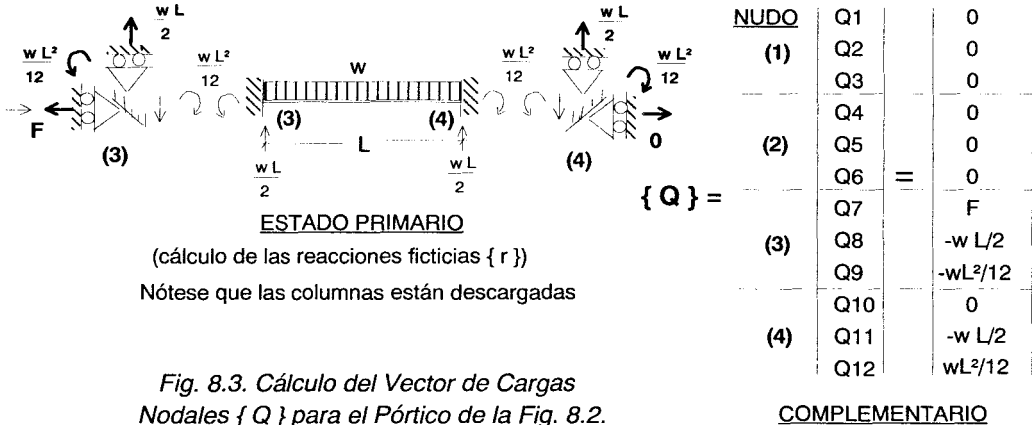


Fig. 8.2.

En la Fig. 8.3 se muestra la solución del Estado Primario y el vector de cargas nodales { Q } por aplicar en el Complementario, para el pórtico correspondiente a la Fig. 8.2.



Usualmente, cuando la estructura está sometida a cargas sencillas, los programas de cómputo resuelven el Estado Primario; pero, cuando las solicitaciones son complicadas (por ejemplo: efectos de temperatura, desplazamientos de apoyos, cargas variables, etc.), o cuando la estructura está compuesta por barras de sección variable (incluyendo las prismáticas con brazos rígidos), la mayoría de los programas requieren que se les proporcione como datos las acciones de empotramiento típicas (axial, cortante y momento flector, que se repiten varias veces) en los extremos de las barras.

Estas acciones de empotramiento $\{q'\}$ se calculan para cada barra $i-j$ en el Estado Primario y se consideran positivas cuando siguen el sentido positivo del **SISTEMA LOCAL** de referencia (Fig. 8.4), el cual es un sistema dextrogiro cuyo eje x' sigue la dirección axial de la barra y va dirigido desde el nudo menor (i) hacia el nudo mayor (j).

Posteriormente, como se conoce la inclinación de la barra (θ), el programa se encarga de rotar estas acciones convirtiéndolas al Sistema Global $\{q_i\}$, con lo cual, es posible efectuar el equilibrio del nudo en forma directa, contemplando las distintas barras que allí concurren, para de esta manera obtener las reacciones ficticias $\{r\}$ en el Primario y, finalmente, el vector de cargas nodales $\{Q\}$ en el Complementario.

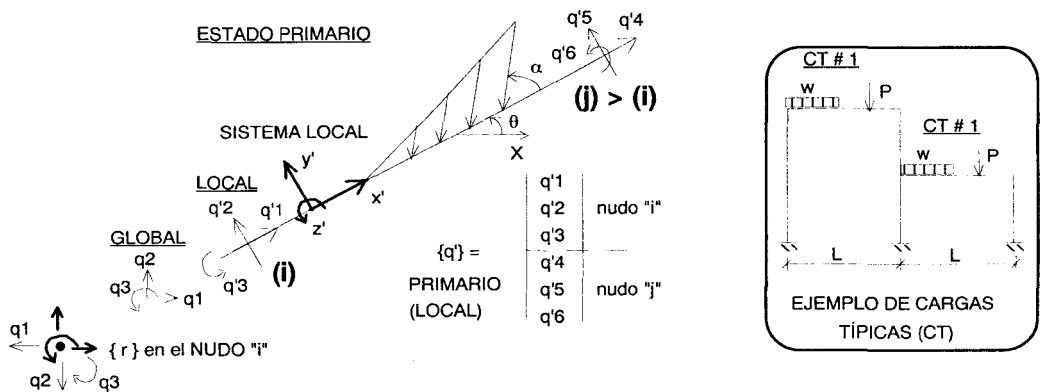


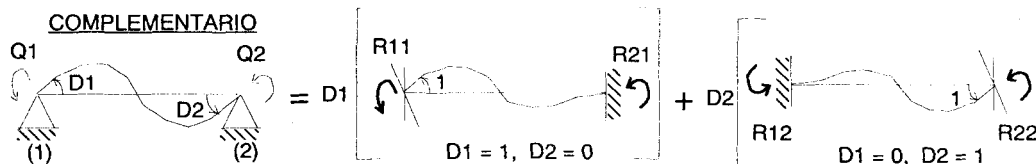
Fig. 8.4. Acciones de Empotramiento $\{q'\}$ en el Sistema Local de la Barra $i-j$.

Cabe indicar que el vector de acciones de empotramiento típico (calculado o dado como dato) en el Sistema Local de referencia $\{q'\}_{\text{Primario}}$ tiene que ser archivado, con el objeto de sumarlo con el vector correspondiente al complementario $\{q'\}_{\text{Complementario}}$, para así obtener finalmente las fuerzas de sección en el Sistema Local:

$$\{q'\} = \{q'\}_{\text{Primario}} + \{q'\}_{\text{Complementario}}$$

8.2. Solución del Estado Complementario

Aplicando el método de rigidez (principio de superposición sobre los desplazamientos) sobre una estructura sencilla con dos grados de libertad, se tiene:



Equilibrio en el nudo 1: $Q1 = R11 D1 + R12 D2$

Equilibrio en el nudo 2: $Q2 = R21 D1 + R22 D2$

Ecuaciones que ordenadas matricialmente resulta:

$$\begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R11 & R12 \\ R21 & R22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \end{Bmatrix}$$

Para el caso general de una estructura con N grados de libertad, las ecuaciones de equilibrio planteadas en cada nudo de la estructura ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$), en el Sistema Global de Referencia, conducen a la denominada Ecuación Básica de Equilibrio Nodal:

$$[R] \{D\} = \{Q\}$$

Donde: $\{D\}$ = vector de desplazamientos de los nudos
 $\{Q\}$ = vector de cargas nodales
 $[R]$ = matriz de rigidez nodal o global de la estructura completa

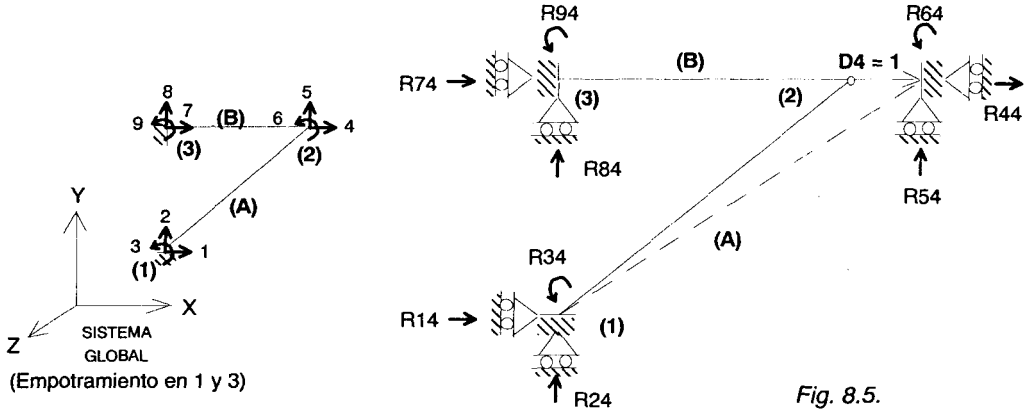
La matriz $[R]$ es simétrica, cuadrada, de orden $N \times N$; donde N = número de grados de libertad. Por ejemplo, para un pórtico plano con 20 nudos (incluyendo los apoyos), $[R]$ contendrá 60×60 elementos. Cabe indicar que esta matriz no tiene inversa, debido a que todavía no se ha impuesto restricciones a los apoyos; es decir, se estaría resolviendo un sistema inestable.

8.2.1. Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Global $[R]$

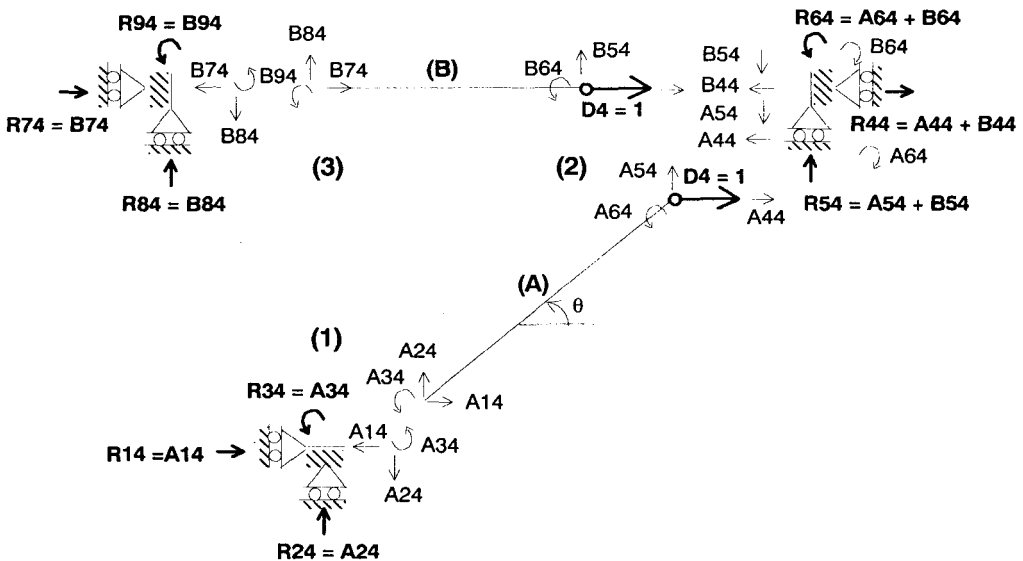
La matriz $[R]$, está constituida por los denominados coeficientes de rigidez " R_{ij} "; donde:

R_{ij} = reacción en la coordenada " i " cuando se imprime un desplazamiento unitario en la coordenada " j ", restringiendo al resto de coordenadas ($D_j = 1$, $D_i = 0$, para " i " diferente de " j ").

Por ejemplo, veamos como se llena la cuarta columna de $[R]$ para el pórtico plano compuesto por tres nudos (9 GL) y dos barras (A y B), mostrado en la Fig. 8.5.



El cálculo de R_{i4} se realiza trabajando con cada barra en forma independiente, para después, mediante las ecuaciones de equilibrio planteadas en cada nudo, determinar R_{i4} ; para esto, será necesario trabajar en el Sistema Global de referencia. Para el caso que se está analizando ($D4 = 1$, Fig. 8.5) se tiene:



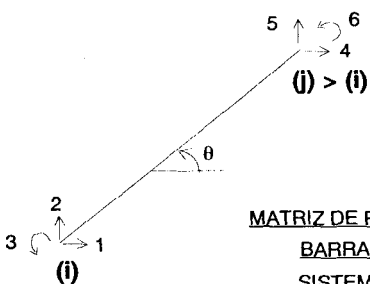
Donde puede observarse (para $D4 = 1$) que:

- 1.- La barra B trabaja sólo a carga axial ($B54 = B64 = B84 = B94 = 0$).
- 2.- La barra A tiene una deformación axial igual a $\cos \theta$, que genera una carga axial N, y un desplazamiento relativo igual a $\sin \theta$, que produce un momento flector M y una fuerza cortante V en cada extremo. V y N tienen que transformarse al Sistema Global, para obtener los valores $Ai4$.
- 3.- Los valores $Ri4$ pueden obtenerse en forma directa (siempre y cuando se trabaje en el Sistema Global) como la suma de los valores $Ai4$ y $Bi4$, notándose que cada barra aporta rigidez sólo sobre los nudos a los cuales concurre. Por esta razón, es necesario conocer a que nudos concurre cada barra, de manera que el programa pueda identificar los grados de libertad respectivos.

CUARTA COLUMNA DE [R]					
NUDO			APORTE DE "A"		APORTE DE "B"
(1)	R14 R24 R34		A14 A24 A34		
(2)	R44 R54 R64	=	A44 A54 A64	+	B44 B54 B64
(3)	R74 R84 R94		concurre a 1, 2		B74 B84 B94
					concurre a 2, 3

Lo que se ha realizado para $D4 = 1$, puede extenderse al resto de grados de libertad, trabajando esta vez con las matrices de barra determinadas en el Sistema Global $[kij]$, y sabiendo que ellas aportan rigidez sólo sobre los nudos a los cuales concurren.

Para una barra perteneciente a un pórtico plano, $[kij]$ está compuesta por 6×6 elementos, ordenados de tal manera que las tres primeras columnas y filas correspondan a los desplazamientos del nudo "i", y las otras tres al nudo "j"; con $j > i$.

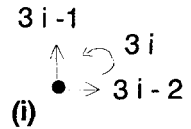


$$[kij] =$$

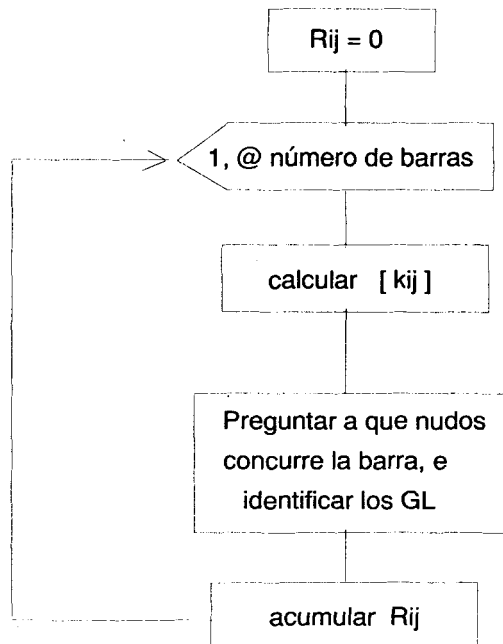
MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA
BARRA i-j EN EL
SISTEMA GLOBAL

(i)			(j)		
k11	k12	k13	k14	k15	k16
k21	k22	k23	k24	k25	k26
k31	k32	k33	k34	k35	k36
k41	k42	k43	k44	k45	k46
k51	k52	k53	k54	k55	k56
k61	k62	k63	k64	k65	k66

Puesto que se conoce a que nudos concurre la barra, será fácil identificar sobre que grados de libertad (de la estructura) está aportando rigidez, recordando que para un nudo "i" de un pórtico plano se tiene:



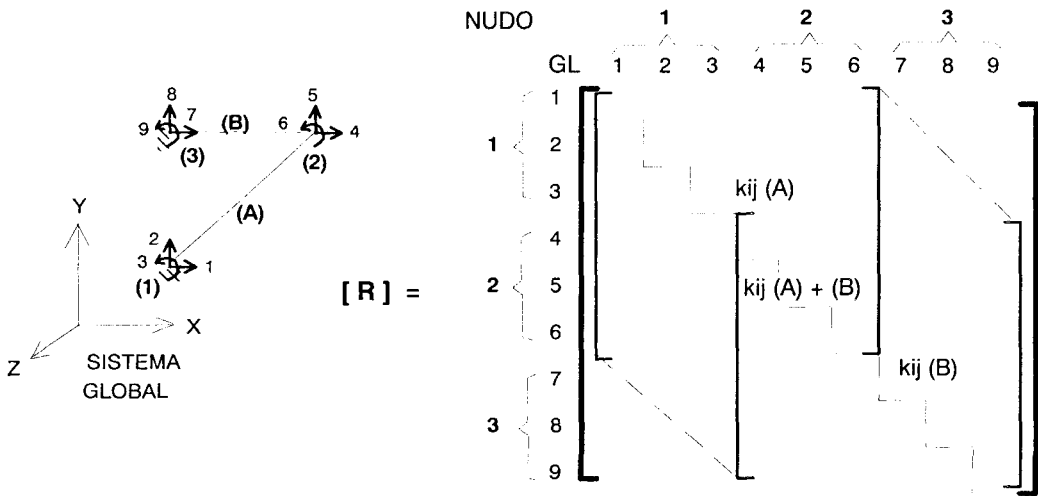
De esta manera, si se conociera $[k_{ij}]$ en el Sistema Global, será sencillo ensamblar la matriz de rigidez nodal $[R]$, como una suma directa de las rigideces que aporta cada barra, siguiendo el proceso iterativo mostrado:



La matriz $[R]$ es bandeada en forma diagonal y el ancho de la banda depende de la máxima diferencia que exista entre los nudos "j" e "i" de una barra i-j cualquiera; cabe indicar que una de las limitaciones del programa EDIFICIO es que $j - i \leq 8$.

En un programa de cómputo se trabaja sólo con la semibanda superior, ya que la matriz $[R]$ es simétrica y el resto de términos (a un lado de la semibanda superior) son nulos.

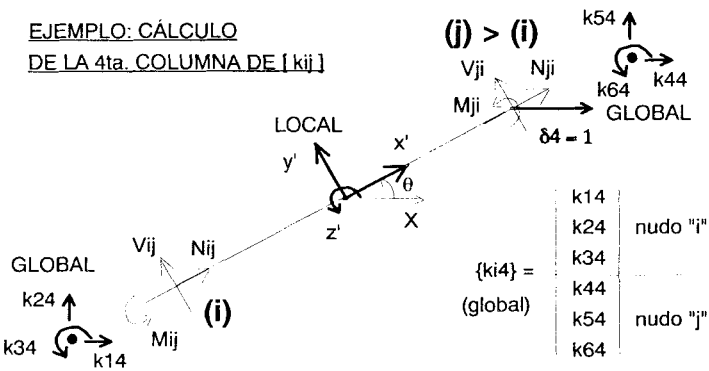
Regresando al ejemplo del pórtico compuesto por dos barras (Fig. 8.5) se tendrá:



8.2.2. Matriz de Rigidez de Barra en Coordenadas Locales $[k'_{ij}]$

Como se ha visto, el proceso de ensamblaje para formar la matriz $[R]$ es bastante sencillo, siempre y cuando se trabaje con matrices de barras calculadas en el Global $[k_{ij}]$; pero, calcular $[k_{ij}]$ es muy complicado, en vista que primeramente los desplazamientos unitarios en el Sistema Global deben descomponerse en el Local, para así determinar el momento flector (M), la fuerza cortante (V) y la carga axial (N); luego, V y N tienen que volverse a transformar al Sistema Global para hallar $[k_{ij}]$.

EJEMPLO: CÁLCULO DE LA 4ta. COLUMNA DE $[k_{ij}]$

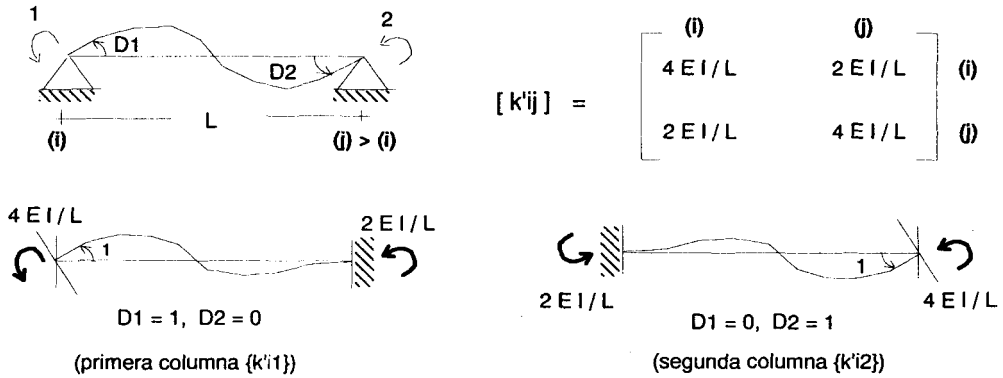


De esta manera, para sistematizar el proceso, lo que se hace es trabajar con una matriz de barra formulada en el Sistema Local $[k'_{ij}]$, para después transformarla al Sistema Global. Esta matriz resulta simétrica, y el número de elementos que la componen depende de la cantidad de grados de libertad que tenga la barra en sus extremos.

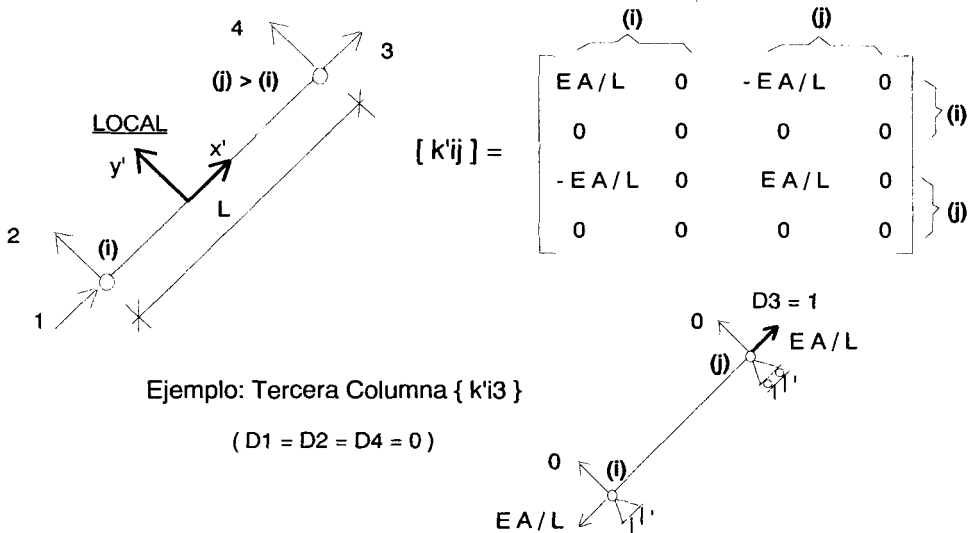
Cabe destacar que en un programa de cómputo los coeficientes de $[k'_{ij}]$ obedecen a fórmulas preestablecidas, donde sólo hay que reemplazar los parámetros E (módulo de elasticidad), L (longitud de la barra), I (momento de inercia) y A (área axial) por sus valores respectivos.

Como ejemplo, se mostrará la manera como se determina $[k'_{ij}]$, en el Sistema Local, para los siguientes casos:

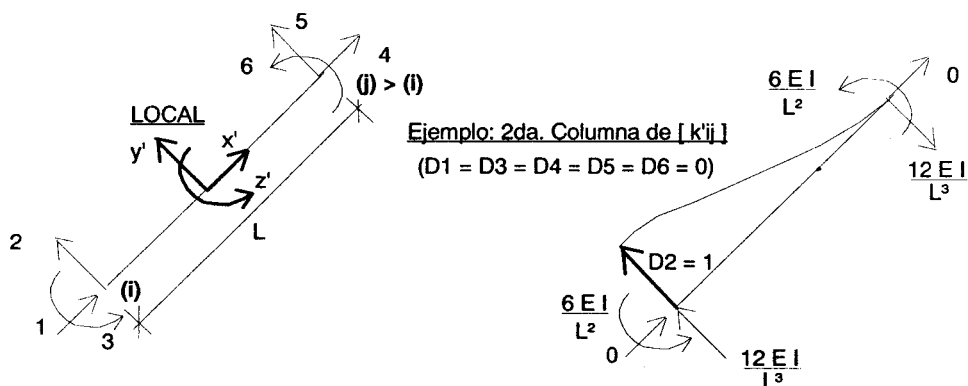
1.- Barra de una viga continua deformable por flexión, con GL rotacionales:



2.- Barra de una armadura plana:



3.- Barra de un pórtico plano deformable por flexión y fuerza axial:



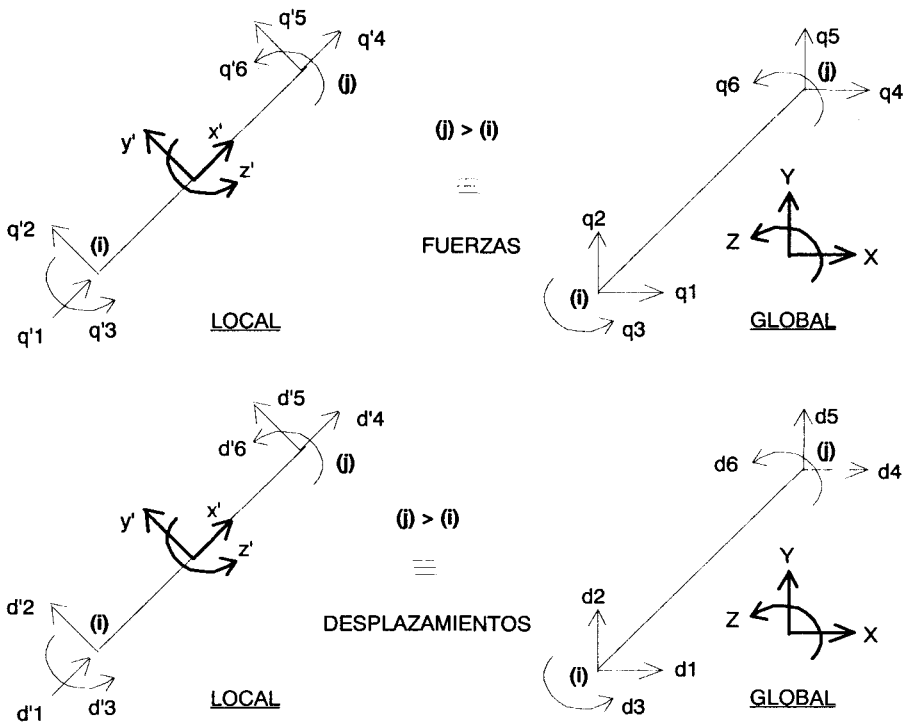
$$[k'_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{matrix} & \begin{matrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \end{matrix} \\ \begin{matrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L \end{matrix} & \begin{matrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(i)} \\ \text{(j)} \end{matrix}$$

El programa "EDIFICIO" trabaja con una matriz $[k'_{ij}]$ correspondiente a una barra con brazos rígidos en sus extremos, contemplando adicionalmente la deformación por corte, lo que proporciona fórmulas preestablecidas más complicadas que las mostradas.

Por otro lado, en una barra correspondiente a un pórtico espacial, la matriz de barra en el Local resulta de 12 x 12 elementos (6 GL por nudo); asimismo, en un programa de Elementos Finitos, la matriz del elemento finito resulta mucho más complicada (Ver Anexo 3), pero siempre los coeficientes k'_{ij} obedecen a fórmulas preestablecidas.

8.2.3. Transformación de la Matriz de Rigidez de Barra del Local $[k'_{ij}]$ al Global $[k_{ij}]$

Se trata de transformar vectores de fuerzas y de desplazamientos, aplicados en el nudo "i" o "j", desde el Sistema Local ($\{q'\}$ o $\{d'\}$) al Global ($\{q\}$ o $\{d\}$):



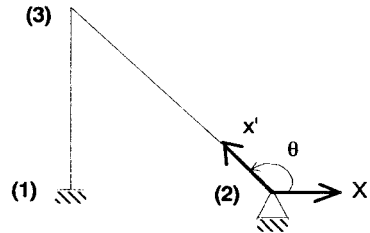
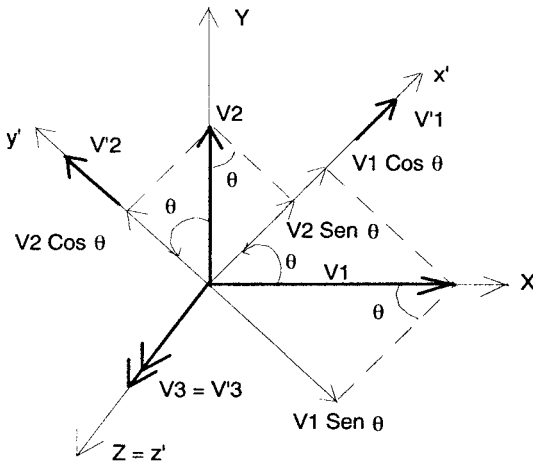
Para esto, debe entenderse que en coordenadas locales o globales, la ecuación básica de equilibrio en una barra $i-j$ se cumple: $\{q'\} = [k'] \{d'\}$ y $\{q\} = [k] \{d\}$, respectivamente.

En el Sistema Local, la ecuación básica de equilibrio puede desdoblarse de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \{q'\} \text{ nudo "i"} \\ \{q'\} \text{ nudo "j"} \end{Bmatrix} = [k'] \begin{Bmatrix} \{d'\} \text{ nudo "i"} \\ \{d'\} \text{ nudo "j"} \end{Bmatrix}$$

Como $\{q'\}$ y $\{d'\}$, en cualquiera de los nudos (i, j) , son vectores con tres componentes, se verá primeramente cómo se transforma un vector cualquiera V del Sistema Global (componentes V_1, V_2, V_3) al Local (componentes V'_1, V'_2, V'_3). Para esto, llamaremos θ al ángulo que forma el eje x' del Sistema Local con el eje X del Sistema Global.

Cabe mencionar que en un programa de cómputo, las coordenadas de los nudos son datos y que previamente se ha indicado a que nudos concurre la barra ($i-j$ con $j > i$), con lo cual, es posible: 1) definir el sentido del eje x' del Sistema Local; 2) calcular la longitud de la barra; y, 3) obtener el ángulo θ para cada barra $i-j$ en análisis.



Ejemplo: Cálculo de θ en la barra 2-3

En un Nudo ("i" o "j") :

$$\begin{Bmatrix} V'1 \\ V'2 \\ V'3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V1 \cos \theta + V2 \sin \theta \\ -V1 \sin \theta + V2 \cos \theta \\ V3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V1 \\ V2 \\ V3 \end{Bmatrix}$$

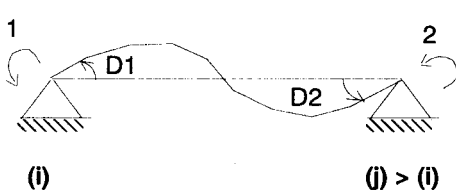
En general, para un nudo cualquiera se tiene: $\{ V' \} = [r] \{ V \}$; pero, como la barra consta de dos nudos extremos (i, j) se tendrá para el vector de fuerzas:

$$\begin{Bmatrix} \{ q' \} \text{ nudo "i"} \\ \{ q' \} \text{ nudo "j"} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [r] & [0] \\ [0] & [r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ q \} \text{ nudo "i"} \\ \{ q \} \text{ nudo "j"} \end{Bmatrix}$$

O lo que es lo mismo: $\{ q' \} = [R_\theta] \{ q \}$

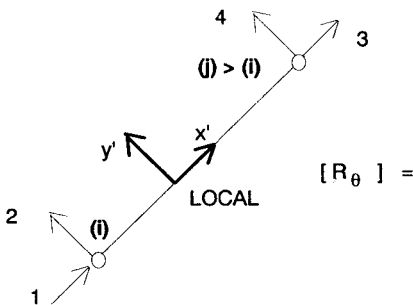
Donde $[R_\theta]$ es una matriz de 6 x 6 elementos (para el caso de barras que pertenecen a pórticos planos), conocida con el nombre de Matriz de Rotación o de Transformación del Sistema Global al Local.

La Matriz de Rotación $[R_\theta]$ es de 2 x 2 elementos para el caso de una barra correspondiente a una viga continua, de 4 x 4 elementos cuando la barra corresponde a una armadura plana y de 12 x 12 elementos cuando la barra corresponde a un pórtico espacial, tal



$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix}$$

BARRA DE UNA VIGA CONTINUA CON GL ROTACIONALES (Z = z')



$$[R_\theta] =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix}$$

BARRA CORRESPONDIENTE A UNA ARMADURA PLANA

como se muestra a continuación.

En forma similar, para los desplazamientos se tiene: $\{d'\} = [R_\theta] \{d\}$

Como la ecuación básica de equilibrio en el Sistema Local es: $\{q'\} = [k'] \{d'\}$, entonces, reemplazando $\{q'\}$ y $\{d'\}$ por sus equivalentes en el Global, se tendrá:

$$\{q'\} = [R_\theta] \{q\} = [k'] \{d'\} = [k'] [R_\theta] \{d\}$$

$$\text{Con lo cual se obtiene: } \{q\} = [R_\theta]^{-1} [k'] [R_\theta] \{d\} \quad [1]$$

$$\text{Pero, en el Global, la ecuación básica de equilibrio es: } \{q\} = [k] \{d\} \quad [2]$$

$$\text{Por lo que identificando términos en [1] y [2] resulta: } [k] = [R_\theta]^{-1} [k'] [R_\theta]$$

Puede demostrarse que: $[R_\theta]^{-1}$ (inversa) = $[R_\theta]^T$ (transpuesta), por lo que finalmente se obtiene:

$$[k] = [R_\theta]^T [k'] [R_\theta]$$

Esta última expresión es la que se emplea en los programas de cómputo para transformar la matriz de rigidez de una barra del Sistema Local al Global, para después proceder con el ensamblaje de la matriz de rigidez global o nodal $[R]$.

8.2.4. Cálculo de Desplazamientos, Reacciones y Fuerzas de Sección

Una vez ensamblada $[R]$, no es posible resolver el problema $\{Q\} = [R] \{D\}$ en forma directa, debido a que $[R]$ no tiene inversa; es decir, hasta este instante, al no haberse impuesto las condiciones de restricción brindada por los apoyos, se estaría resolviendo una estructura inestable.

Por esa razón, es necesario indicar en un programa de cómputo cuales son los grados de libertad restringidos por los apoyos, para particionar a la matriz $[R]$ de la siguiente manera:

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_{ff}] & [R_{fr}] \\ [R_{rf}] & [R_{rr}] \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q_f\} \\ \{Q_r\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{ff}] & [R_{fr}] \\ [R_{rf}] & [R_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_f\} \\ \{D_r\} \end{Bmatrix}$$

Donde:

f = free (libre)

r = restrained (restringido)

$\{D_f\}$ = vector de desplazamientos (desconocidos) asociados a los GL reales.

$\{D_r\}$ = vector de desplazamientos asociados a los GL restringidos por los apoyos; usualmente: $\{D_r\} = \{0\}$

$\{Q_f\}$ = vector de cargas nodales aplicadas en los GL reales.

$\{Q_r\}$ = vector de reacciones en los GL restringidos por los apoyos.

$[R_{ff}]$ = matriz de rigidez asociada a los GL reales; es simétrica, de orden $N \times N$, donde: N = número de GL reales (es la verdadera matriz de rigidez).

$[R_{rr}]$ = matriz de rigidez cuyos coeficientes están asociados a los GL restringidos; es simétrica, de orden $N1 \times N1$, donde: $N1$ = número de GL restringidos por los apoyos.

$[R_{rf}]$ = matriz cuyos coeficientes representan la influencia de los GL reales sobre los restringidos; es de orden $N1 \times N$

$[R_{fr}]$ = matriz cuyos coeficientes representan la influencia de los GL restringidos sobre los reales; es de orden $N \times N1$. Cumpliéndose: $[R_{fr}] = [R_{rf}]^T$

De esta manera: $[R_{ff}] \{D_f\} + [R_{fr}] \{D_r\} = \{Q_f\}$

De la cual: $\{D_f\} = [R_{ff}]^{-1} [\{Q_f\} - [R_{fr}] \{D_r\}]$

Los desplazamientos $\{ Df \}$ son positivos cuando siguen el sentido positivo del sistema global de referencia (X, Y, Z).

Conviene indicar que algunos programas de cómputo (entre ellos, el programa EDIFICIO) no contemplan los desplazamientos de apoyo, asumiéndose que $\{ Dr \} = \{ 0 \}$; con lo cual, resulta innecesario determinar la matriz $[Rfr]$, de esta manera, los desplazamientos asociados a los GL reales (en el Global) se obtienen como: $\{ Df \} = [Rff]^{-1} \{ Qf \}$. En este caso, de existir desplazamiento de apoyo (de magnitud conocida), sus efectos se contemplan en el Estado Primario.

Conocido $\{ Df \}$, las reacciones correspondientes al Estado Complementario se calculan mediante la siguiente expresión:

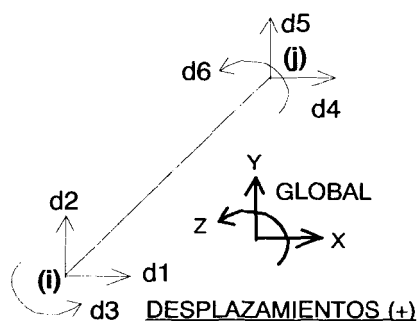
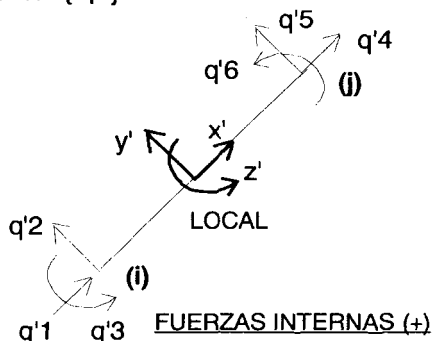
$$\{ Qr \} = [Rrf] \{ Df \} + [Rrr] \{ Dr \}$$

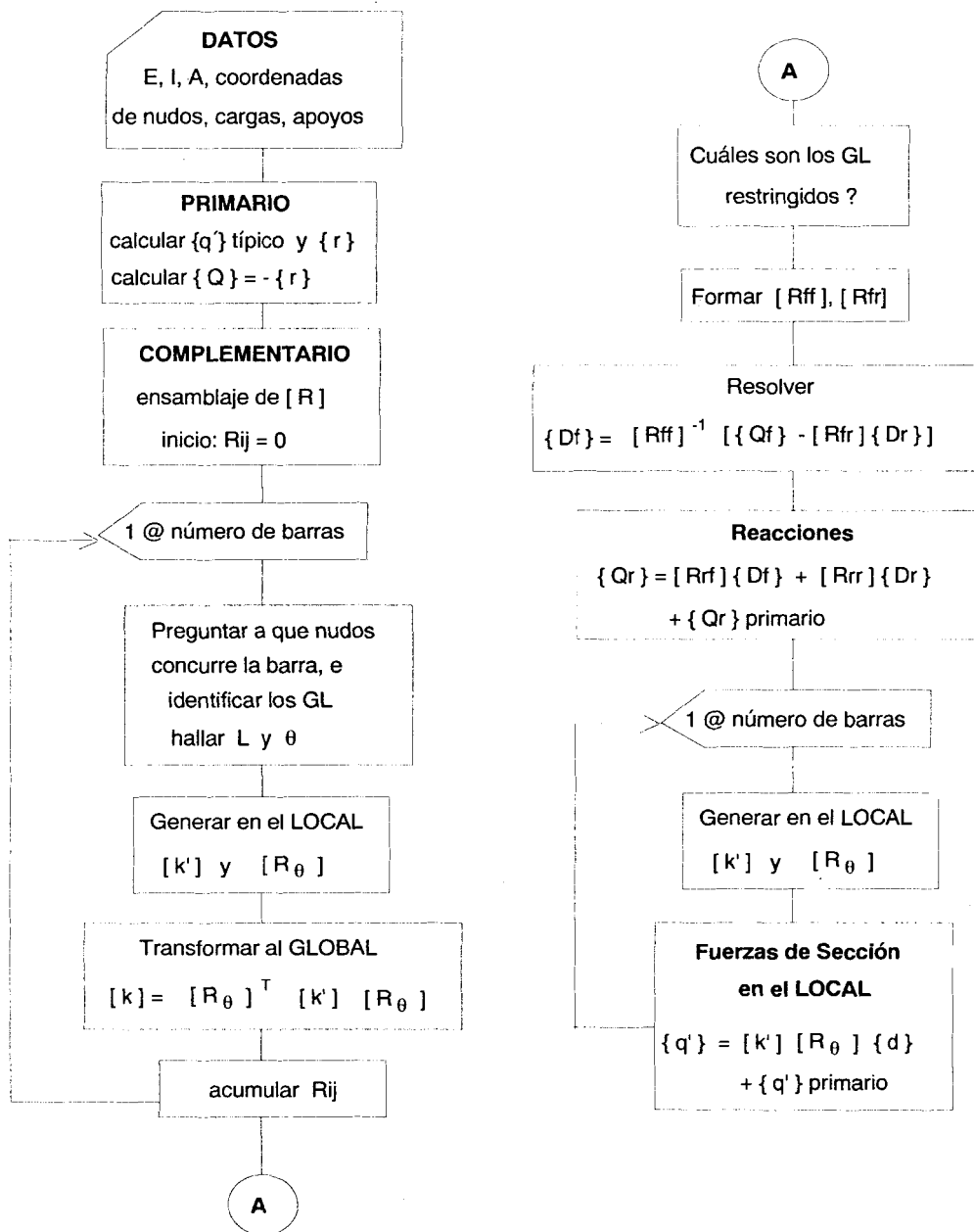
Estas reacciones deberán sumarse con las halladas en el Estado Primario. Cabe también indicar que algunos programas de cómputo (entre ellos, el programa EDIFICIO) no calculan reacciones, con lo cual, es innecesario determinar las matrices $[Rrf]$ y $[Rrr]$; en estos casos, las reacciones se determinan por equilibrio de los nudos, en base a conocer las fuerzas de sección de las barras que concurren al apoyo respectivo.

Las fuerzas internas (o fuerzas de sección: axial, cortante y momento flector) en los extremos de una barra i - j (con $j > i$), definidas positivamente en el Sistema Local de referencia, se calculan en el Estado Complementario como:

$$\{ q' \} = [k'] \{ d' \} = [k'] [R_0] \{ d \}$$

En el cálculo de $\{ q' \}$ debe volverse a iterar barra por barra, formulando nuevamente para cada una de ellas sus matrices $[k']$ y $[R_0]$, mientras que $\{ d \}$ se extrae del vector $\{ D \}$ conociendo a que nudos concurre la barra en análisis. A este resultado debe agregarse el vector $\{ q' \}$ calculado en el Estado Primario.

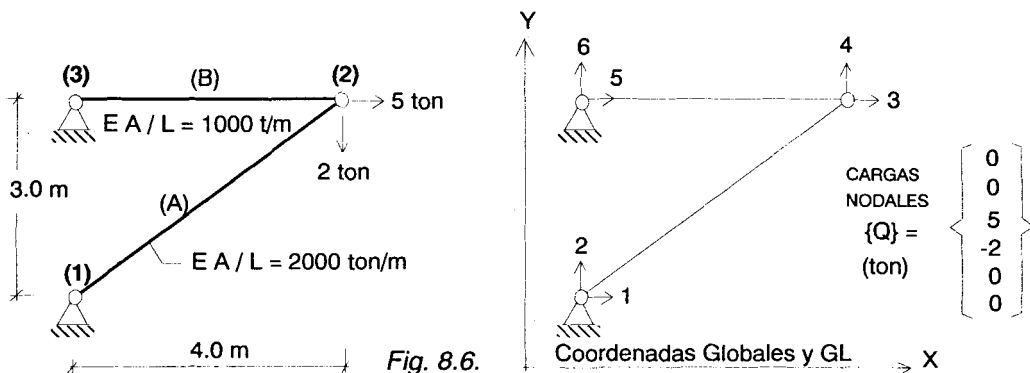


8.3. Resumen del Método Directo de Rigidez

8.4. Ejemplos de Aplicación

8.4.1. Armadura

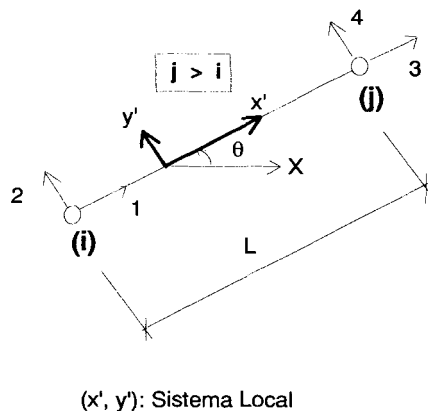
Resolver la armadura mostrada en la Fig. 8.6. Nótese que al estar las cargas aplicadas sobre los nudos, resulta innecesario resolver el Estado Primario, por lo que directamente se solucionará el Estado Complementario.



Para el caso de una barra que forma parte de una armadura, su matriz de rigidez en el Sistema Local $[k']$ y de rotación $[R_\theta]$ están dadas por las siguientes expresiones:

$$[k'] = \begin{bmatrix} \overbrace{EA/L}^{(i)} & 0 & \overbrace{-EA/L}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overbrace{-EA/L}^{(i)} & 0 & \overbrace{EA/L}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (i) \\ (j) \\ (j) \end{matrix}$$

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ NODAL EN EL SISTEMA GLOBAL [R]

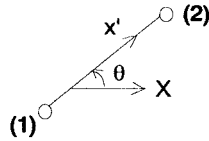
Inicialmente se empieza con una matriz nula (en este caso de 6x6 elementos), luego se calcula para una barra determinada su matriz de rigidez global $[k] = [R_0]^T [k'] [R_0]$, se observa a que nudos concurre esa barra, y los términos de $[k]$ se suman con los términos correspondientes de $[R]$.

El proceso se repite barra por barra, hasta terminar con el número total de barras. Por otro lado, cabe indicar que las matrices $[k]$, $[k']$ y $[R_0]$ no se archivan, sino que se generan cada vez que se necesitan.

$$[R] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{(1)} & \text{(2)} & \text{(3)} \end{matrix} & & \text{NUDO} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & & \text{GL} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{(1)} \\ \text{(2)} \\ \text{(3)} \end{matrix} \end{matrix}$$

BARRA "A"

$$E A / L = 2000 \text{ ton/m}$$



$$\text{Sen } \theta = 3 / 5 = 0.6$$

$$\text{Cos } \theta = 4 / 5 = 0.8$$

$$[k_A] =$$

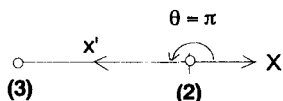
$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 & 0 & -2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2000 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \text{(1)} & \text{(2)} \\ \begin{bmatrix} 1280 & 960 & -1280 & -960 \\ 960 & 720 & -960 & -720 \\ -1280 & -960 & 1280 & 960 \\ -960 & -720 & 960 & 720 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

Acumulando:

$$[R] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{(1)} & \text{(2)} & \text{(3)} \end{matrix} & & \text{NUDO} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & & \text{GL} \\ \begin{bmatrix} 1280 & 960 & -1280 & -960 & 0 & 0 \\ 960 & 720 & -960 & -720 & 0 & 0 \\ -1280 & -960 & 1280 & 960 & 0 & 0 \\ -960 & -720 & 960 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{(1)} \\ \text{(2)} \\ \text{(3)} \end{matrix} \end{matrix}$$

BARRA "B"

$$E A / L = 1000 \text{ ton/m}$$



$$\text{Sen } \theta = 0$$

$$\text{Cos } \theta = -1$$

$$[kB] =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Acumulando:

Nota: En un programa de cómputo sólo se trabaja con la semibanda superior (línea punteada).

$$[R] = \begin{bmatrix} \text{NUDO 1} & \text{NUDO 2} & \text{NUDO 3} & \text{GL} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1280 & 960 & -1280 & -960 & 0 & 0 \\ 960 & 720 & -960 & -720 & 0 & 0 \\ -1280 & -960 & 2280 & 960 & -1000 & 0 \\ -960 & -720 & 960 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

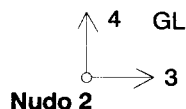
CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ $[R_{ff}]$ y DE LOS DESPLAZAMIENTOS $\{D_f\}$ ASOCIADOS A LOS GRADOS DE LIBERTAD REALES

En este caso, el nudo 2 (con GL: 3 y 4) es el único que se desplaza, los apoyos 1 y 3 no se desplazan $\Rightarrow \{D_r\} = \{0\}$. Por otro lado, $[R_{ff}]$ se extrae de la matriz $[R]$.

$$[R_{ff}] = \begin{bmatrix} 2280 & 960 \\ 960 & 720 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{NUDO 2} \\ \text{GL} \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\{D_f\} = [R_{ff}]^{-1} \{ \{Q_f\} - [R_{fr}]\{D_r\} \}$$

$$\{D_f\} = [R_{ff}]^{-1} \{Q_f\}$$



$$\begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2280 & 960 \\ 960 & 720 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.00133 \\ -0.00133 & 0.003167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.007667 \\ -0.013 \end{bmatrix} \text{ m}$$

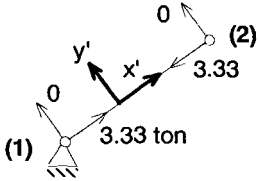
Nota: En un programa de cómputo el cálculo de $\{D_f\}$ se hace solucionando un sistema de ecuaciones lineales, sin invertir la matriz $[R_{ff}]$.

CÁLCULO DE LAS FUERZAS INTERNAS EN EL SISTEMA LOCAL

En este caso, $\{q'\}_{\text{Primario}} = \{0\}$, por lo que las fuerzas internas se obtienen como:

$$\{q'\} = [k'] [R_\theta] \{d\} \dots (\text{en el Sistema Local})$$

BARRA "A"



$$\{q'\} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & -2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2000 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.007667 \\ -0.013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0 \\ -3.33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

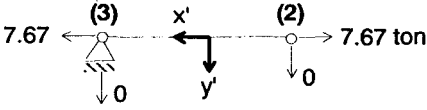
(ton)

Nudo

1

2

BARRA "B"



$$\{q'\} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.007667 \\ -0.013 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.67 \\ 0 \\ 7.67 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ton)

Nudo

2

3

CÁLCULO DE REACCIONES

$$\{Q_r\} = \{Q_r\}_{\text{Primario}} + [R_{rf}] \{D_f\} + [R_{rr}] \{D_r\} \dots (\text{en el Sistema Global})$$

En este caso, $\{Q_r\}_{\text{Primario}} = \{0\}$, asimismo, $\{D_r\} = \{0\}$ debido a que los apoyos 1 y 3 no se desplazan, por lo que: $\{Q_r\} = [R_{rf}] \{D_f\}$.

Por otro lado, las matrices $[R_{rf}]$ y $[R_{rr}]$ se extraen de la matriz $[R]$, considerando los grados de libertad respectivos. Asimismo, nótese que este paso es innecesario, ya que conociendo las fuerzas internas en las barras, las reacciones pueden ser calculadas por equilibrio de los nudos 1 y 3 (apoyos).

$$\begin{aligned}
 [Rrr] &= \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (3) \end{matrix} & \text{NUDO} \\ \begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1280 & 960 & 0 & 0 \\ 960 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 [Rrf] &= \begin{matrix} & (2) & \text{NUDO} \\ \begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1280 & -960 \\ -960 & -720 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 \{Qr\} &= \begin{bmatrix} -1280 & -960 \\ -960 & -720 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.007667 \\ -0.013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.67 \\ 2.00 \\ -7.67 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Nudo} \\ 1 \\ - \\ 3 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

(ton)

Como se aprecia, la solución matricial hecha en forma manual resulta demasiado extensa y sólo debe aplicarse cuando se emplea una computadora.

Este ejemplo pudo resolverse manualmente, mediante el equilibrio de fuerzas en el nudo 2, tal como se muestra a continuación.

$$\Sigma F_y = 0:$$

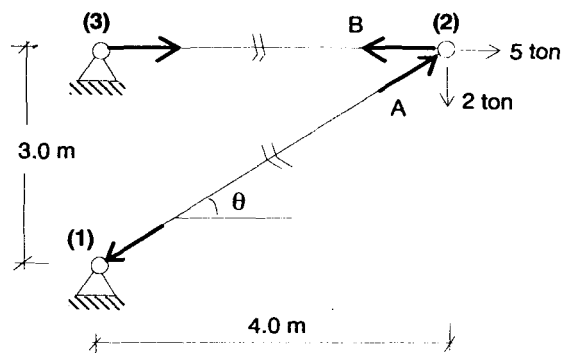
$$A \text{ Sen } \theta = A (3 / 5) = 2 \text{ ton}$$

$$A = 3.33 \text{ ton (en compresión)}$$

$$\Sigma F_x = 0:$$

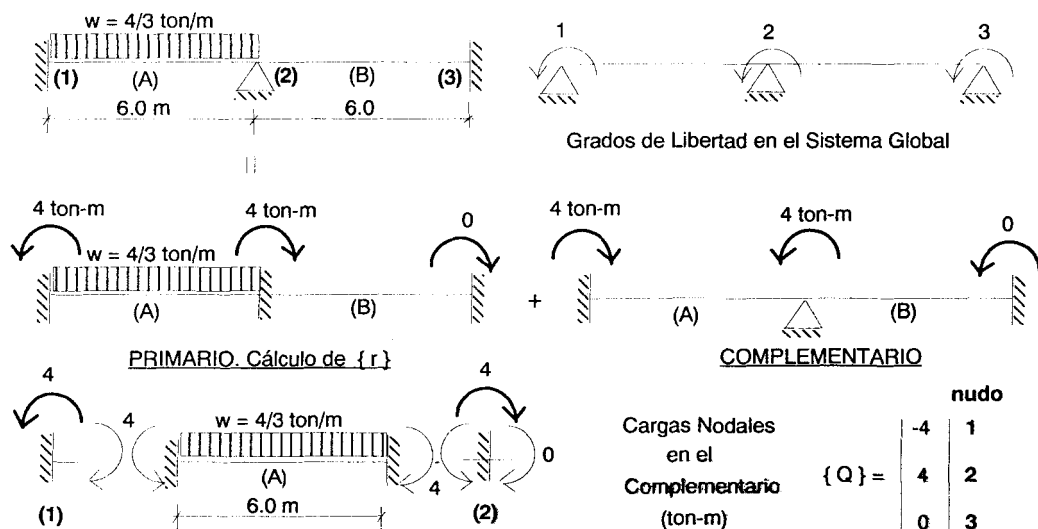
$$B = A \text{ Cos } \theta + 5 \Rightarrow$$

$$B = 7.67 \text{ ton (en tracción)}$$



8.4.2. Viga Continua

Resolver la viga continua mostrada. Suponer para las dos barras: $E I / L = 100 \text{ ton-m}$.



SOLUCIÓN DEL COMPLEMENTARIO

En este caso, la matriz de rotación $[R]$ es unitaria, con lo cual, la matriz de rigidez global $[k]$ de cada barra coincide con la local $[k']$:

$$[k] = [R]^T [k'] [R] = [k']$$

$$[R_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [k'] = [k] = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (i) & (j) \\ (i) & (j) \end{matrix}$$

$$[k_A] = [k_B] = \begin{bmatrix} 400 & 200 \\ 200 & 400 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (2) & (3) & \text{---} & B \\ (1) & (2) & A & | \\ 400 & 200 & (1) & (2) \\ 200 & 400 & (2) & (3) \end{matrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & \text{nudos} \\ \begin{bmatrix} 400 & 200 \\ 200 & 800 \end{bmatrix} & 0 & (1) \\ \begin{bmatrix} 200 & 800 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} & 200 & (2) \\ \begin{bmatrix} 0 & 200 \\ 200 & 400 \end{bmatrix} & (3) \end{bmatrix}$$

El único nudo que rota es el 2 (los apoyos 1 y 3 no rotan $\{Dr\} = \{0\}$), con lo cual:

$$[Rff] = [800]; \quad [Rfr] = [200 \ 200]; \quad \{Qf\} = \{Q2\} = \{4\}$$

$$\{Df\} = [Rff]^{-1} \{ \{Qf\} - [Rfr] \{Dr\} \} \{D2\} = [Rff]^{-1} \{Q2\} = [800]^{-1} \{4\} = \{0.005\} \text{ rad.}$$

CÁLCULO DE LAS FUERZAS INTERNAS

$$\{q'\} = \{q'\}_{\text{Primario}} + \{q'\}_{\text{Complementario}}$$

Nota: $\{q'\}_{\text{Complementario}} = [k'] [R] \{d\} = [k] \{d\}$

$$\{q'A\} = \begin{array}{c|c} \text{P} & \text{COMPLEMENTARIO} \\ \hline 4 & 400 \ 200 \\ -4 & 200 \ 400 \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0.005 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{P} & \text{C} \\ \hline 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{array} = \begin{array}{c} 5 \\ -2 \end{array} \text{ ton-m}$$

$$\{q'B\} = \begin{array}{c|c} \text{P} & \text{COMPLEMENTARIO} \\ \hline 0 & 400 \ 200 \\ 0 & 200 \ 400 \end{array} \begin{array}{c} 0.005 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{P} & \text{C} \\ \hline 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \text{ ton-m}$$

CÁLCULO DE REACCIONES en (1) y (3):

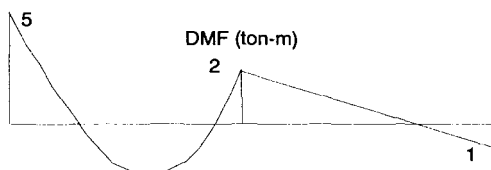
$$\{Qr\} = \{Qr\}_{\text{Primario}} + \{Qr\}_{\text{Complementario}}$$

Nota: $\{Qr\}_{\text{Complementario}} = [Rrf] \{Df\} + [Rrr] \{Dr\}$

$$\{Qr\} = \begin{array}{c|c} \text{P} & \text{COMPLEMENTARIO} \\ \hline 4 & 200 \ 200 \\ 0 & 200 \ 200 \end{array} \begin{array}{c} \{0.005\} \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c|c} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{P} & \text{C} \\ \hline 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \text{ ton-m}$$

Solucionando el problema mediante el método de Cross, lógicamente se obtiene los mismos resultados:

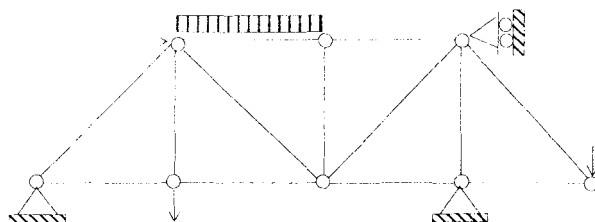
Nudo	1	2	3
α_{ij}	0.0	0.5	0.5
u_{ij}	-4	4	0
D	0	-2	-2
T	-1	0	0
M_{ij}	-5	2	-2



8.5. Programas de Computación

8.5.1. Programa "ARMADURA"

Bajo un procedimiento similar al explicado en el ejemplo del acápite 8.4.1, con la excepción que no se calculan reacciones, el programa "ARMADURA" resuelve tijerales planos hiperestáticos, sujetos a varias hipótesis de cargas aplicadas sobre los nudos, también, proporcionando las acciones de fijación en los extremos de las barras (cortantes y axiales), definidos positivamente en el sistema local de referencia, el programa soporta cargas actuantes sobre las barras, efectos de temperatura y de montaje.

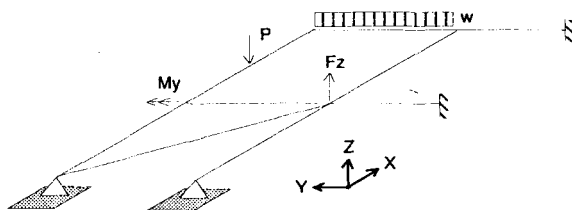


En el programa se supone que los nudos son articulaciones perfectas, mientras que para los casos en que los nudos son rígidos puede emplearse el programa "EDIFICIO", resolviendo al tijeral como si se tratase de un pórtico plano (ver el ejercicio 3 del acápite 8.6).

Para generar los datos debe recurrirse al manual de uso "ARMADURA.MAN", donde además se especifica las limitaciones del programa. Estos datos se proporcionan en un archivo de texto (empleando un nombre cualquiera) y se pueden verificar gráficamente mediante el programa. Los resultados (axiales y cortantes en cada barra, así como los desplazamientos de los nudos) quedan grabados en un archivo de texto, cuyo nombre lo proporciona el usuario. El programa tiene incorporado un ejemplo de aplicación, cuyos datos aparecen en el file ARMADURA.DAT y sus resultados en el file ARMADURA.RES.

8.5.2. Programa "PARRILLA"

Este programa permite resolver parrillas cuyas barras están contenidas en el plano X-Y, mientras que las cargas siguen el sentido Z (excepto los momentos M_x y M_y) de un Sistema Global X, Y, Z, dextrogiro. La parrilla puede estar sujeta a varias hipótesis de cargas aplicadas sobre los nudos (M_x , M_y , F_z) y sobre las barras (w , P); también, proporcionando las acciones de fijación en los extremos de las barras, el programa soporta efectos de temperatura, desplazamientos de apoyos, etc.



Los datos se proporcionan en un archivo de texto y pueden verificarse gráficamente; para generar los datos debe emplearse el manual de uso "PARRILLA.MAN", donde

además se indica las limitaciones del programa. Los resultados (momento torsor, momento flector y fuerza cortante en cada barra, así como los desplazamientos de los nudos) quedan grabados en un archivo de texto, cuyo nombre lo proporciona el usuario. El programa contiene adicionalmente un ejemplo de aplicación, cuyos datos aparecen en el archivo PARRILLA.DAT y sus resultados en el file PARRILLA.RES.

Cabe mencionar que el proceso matricial que emplea este programa, es muy similar al que se utiliza para resolver pórticos planos (descrito en los acápites 8.1 y 8.2), con la excepción que la matriz de rigidez de barra en el sistema local de referencia $[k'_{ij}]$ varía de la siguiente manera:

Ejemplo: 2da. Columna de $[k'_{ij}]$
($D1 = D3 = D4 = D5 = D6 = 0$)

Diagram showing the beam element and the corresponding stiffness matrix $[k'_{ij}]$ for the second column (where $D1 = D3 = D4 = D5 = D6 = 0$).

$$[k'_{ij}] = \begin{bmatrix} JG/L & 0 & 0 & -JG/L & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ -JG/L & 0 & 0 & JG/L & 0 & 0 \\ 0 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{--- (i) ---} \\ \text{--- (j) ---} \end{matrix}$$

Donde: I = momento de inercia de la sección transversal según el eje y' del Local

J = constante de torsión de la sección transversal (ver el acápite 5.6.2).

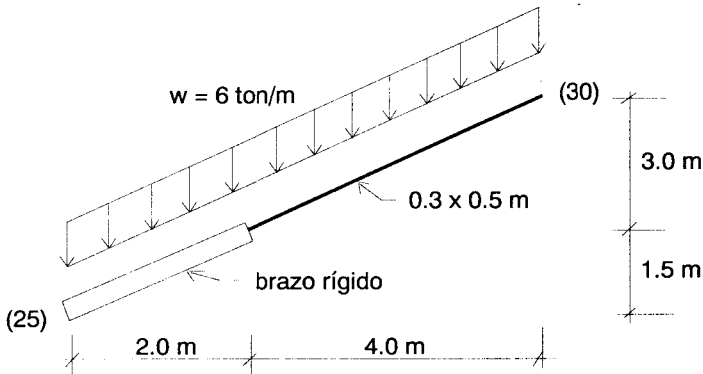
G = módulo de corte

E = módulo de elasticidad

Cabe mencionar que los coeficientes de la matriz $[k'_{ij}]$ mostrada, contemplan sólo la deformación por flexión y torsión en la barra, mientras que el programa "PARRILLA" adiciona los efectos de la deformación por fuerza cortante.

8.6. Problemas Propuestos

- 1.- Formule el vector de acciones de empotramiento ($\{q'\}$ del Estado Primario) en el sistema local de la barra 25-30 mostrada. Esta barra forma parte de un pórtico plano.

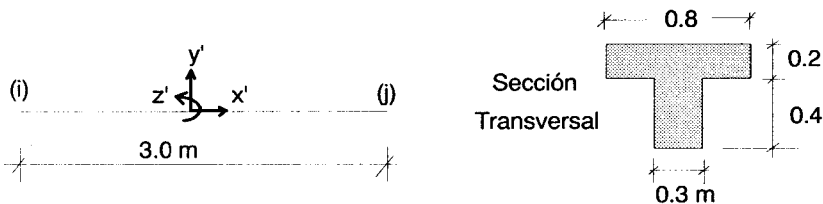


RESULTADO

(ton y ton-m)

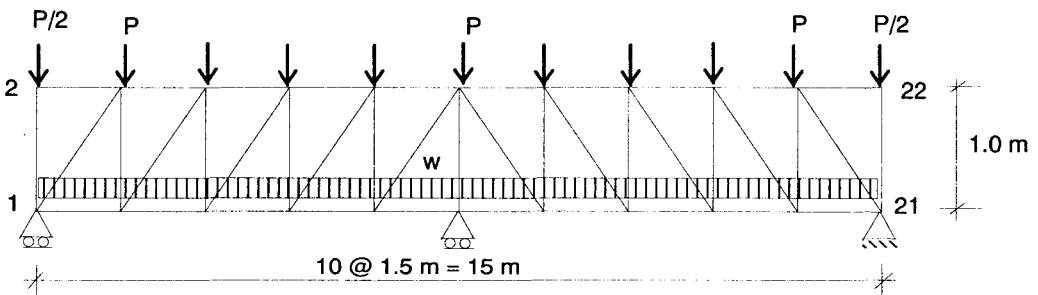
$$\{q'\} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 24 \\ 55 \\ 9 \\ 12 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

- 2.- Contemplando las deformaciones por flexión, fuerza cortante y fuerza axial, formule la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ en el sistema local para la barra mostrada. Suponer $E = 2'000,000 \text{ ton/m}^2$, $E/G = 2.3$.



- 3.- Utilizando el programa "EDIFICIO", resuelva la armadura compuesta por nudos rígidos mostrada. Se seguirá el siguiente procedimiento:
- Empleando el manual de uso MANUAL.BT, defina las características elásticas y geométricas de las barras típicas (son tres: brida superior, brida inferior y montante o diagonal), grabándolas en el archivo BT.DAT.
 - Mediante el manual de uso MANUAL.PT, defina las características geométricas de la armadura (coordenadas de los nudos, conectividad de las barras, etc.), grabándolas en el archivo PT1.DAT (cómo si fuese un pórtico plano típico).

- c.- Correr el programa EDIFICIO y con la opción 1 del menú, verifique gráficamente la geometría y las barras típicas de la armadura.
- d.- Con la opción 7 del menú, genere: las cargas típicas existentes en las barras (aquellas que producen iguales acciones de empotramiento en sus extremos, en este caso sólo hay una), las barras cargadas (brida inferior) y los nudos cargados (nudos de la brida superior). Los resultados quedarán grabados en el archivo CARGAS.1.
- e.- Con la opción 8 del menú solucione la armadura. Los resultados (desplazamientos y fuerzas de sección) quedarán grabados en el archivo MARCO.1.
- f.- Compare los resultados solucionando al tijeral mediante el programa "ARMADURA", suponiendo que los nudos están articulados. Para generar los datos, utilice el manual de uso ARMADURA.MAN.



Brida Superior: 2 Ls 2 1/2" x 2 1/2" x 1/4"

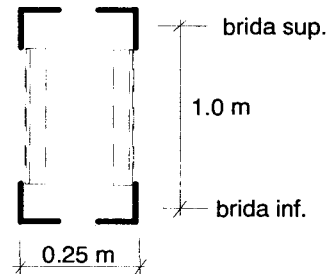
Brida Inferior: 2 Ls 2" x 2" x 1/4"

Montantes y Diagonales: 2 Ls 2" x 2" x 1/8"

$P = 100 \text{ kg}$

$w = 100 \text{ kg/m}$

$E = 2 \cdot 100,000 \text{ kg/cm}^2$



De las tablas proporcionadas por el AISC (American Institute of Steel Construction), las características de las barras (compuestas por 2 ángulos) son:

Brida Superior: $I = 1.406 \text{ pulg}^4$

$A = 2.38 \text{ pulg}^2$

Brida Inferior: $I = 0.696 \text{ pulg}^4$

$A = 1.876 \text{ pulg}^2$

Montantes y Diagonales: $I = 0.38 \text{ pulg}^4$

$A = 0.968 \text{ pul}^2$

9

ANÁLISIS MATRICIAL DE EDIFICIOS SUJETOS A SISMOS. Programa "EDIFICIO"

Un edificio que presenta plantas paralelas al plano X-Y del sistema global de referencia (Fig. 9.1) y que se encuentra sujeto a cargas sísmicas F_x , F_y , M_z , aplicadas en el centro de masas "cm" del nivel correspondiente, se comporta como si fuese un sólo pórtico tridimensional con seis grados de libertad en cada uno de sus nudos "n", los cuales son: tres traslaciones (δ_{xn} , δ_{yn} , δ_{zn}) más tres rotaciones (θ_{xn} , θ_{yn} , θ_{zn}).

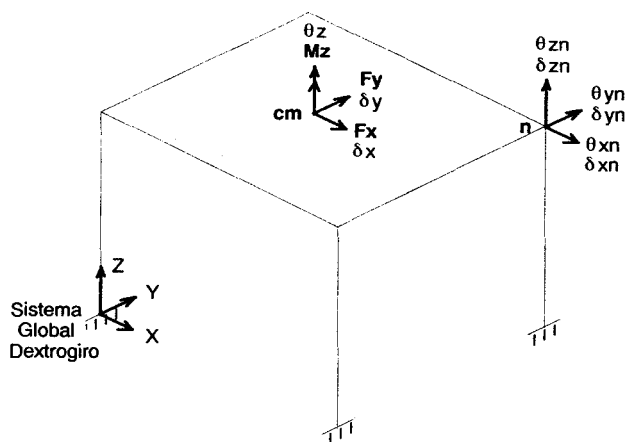


Fig. 9.1. Edificio Modelado como un Pórtico Tridimensional.

Sin embargo, la losa del techo se comporta como un diafragma rígido, con lo cual, los desplazamientos δ_{xn} , δ_{yn} y θ_{zn} de cualquiera de sus puntos, pueden ser calculados geoméricamente en base a conocer los desplazamientos δ_x , δ_y , θ_z de uno de sus puntos,

al cual se le denomina "Master Joint" y que generalmente es adoptado como aquel punto coincidente con el centro de masas "cm" del nivel correspondiente.

Para calcular δx_n , δy_n y θz_n , en un punto "n" (ubicado en las coordenadas X_n , Y_n , Z_n) correspondiente a una de las losas que conforman al edificio, puede aplicarse las siguientes relaciones lineales:

$$\delta x_n = \delta x + \theta z (Y_{cm} - Y_n)$$

$$\delta y_n = \delta y + \theta z (X_n - X_{cm})$$

$$\theta z_n = \theta z$$

Pero, aún subsistirían 3 grados de libertad en cada nudo: θx_n , θy_n , δz_n , los que sumados a los desplazamientos de las losas, proporcionarían una cantidad elevada de grados de libertad en todo el edificio: $3 \times (\text{número de niveles} + \text{número de nudos})$.

Por otro lado, resolver tridimensionalmente un edificio resulta bastante engorroso, por la información (dos momentos de inercia, dos áreas de corte, un área axial y una constante torsional) que debe proporcionarse a cada una de las barras, con respecto a un sistema local que pasa por los ejes centrales principales de su sección transversal, y para definir el desplazamiento de otro punto correspondiente a la misma sección transversal, habría que conectarlo con barras rígidas al centro de gravedad (cg) de dicha sección (Fig. 9.2).

Es más, existen casos complicados de conexiones placas-vigas ortogonales, donde un modelaje por pórticos planos, haciendo uso de columnas con anchos efectivos, podría proporcionar resultados más confiables, por la concentración de esfuerzos que existe en esa conexión y porque la hipótesis de Navier no se cumple en placas de gran longitud.

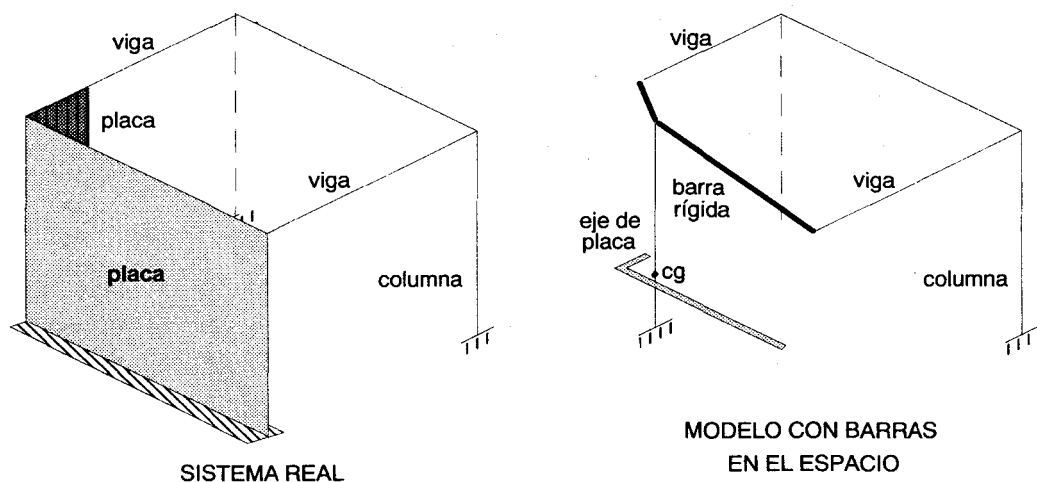


Fig. 9.2. Modelaje Tridimensional de un Edificio con una Placa en Forma de L.

En un modelo compuesto por pórticos planos (Fig. 9.3), se desprecia la rigidez torsional que tienen las barras, así como la compatibilidad de desplazamientos verticales (δ_{zn}) que deberían tener las distintas barras que concurren a un nudo común; pero, se contempla los tres grados de libertad (δ_x , δ_y , θ_z) que presenta la losa en cada nivel del edificio, así como las deformaciones propias del pórtico plano, el mismo que opone resistencia sólo ante las acciones contenidas en su plano.

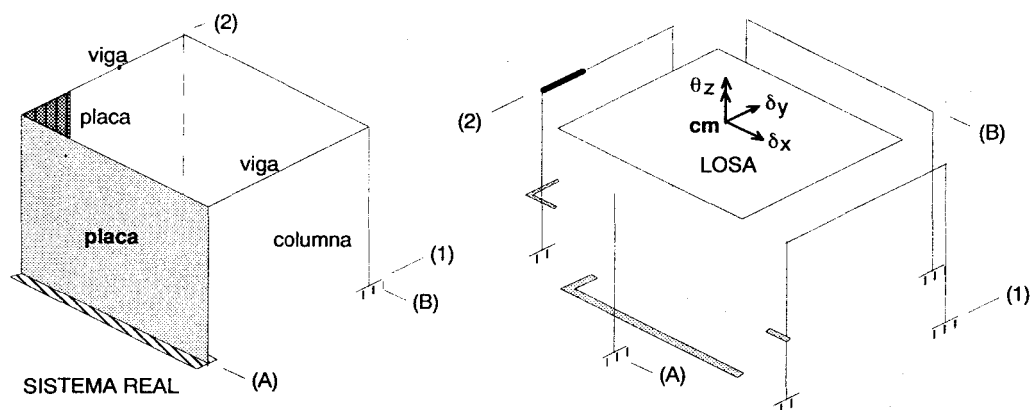


Fig. 9.3. Edificio de la Fig. 9.2. Modelo Pseudo-tridimensional con Pórticos Planos.

Por la sencillez con que se proporcionan los datos, corriendo menos riesgo de cometer errores, en este libro se ha preferido trabajar con un sistema compuesto por pórticos planos interconectados por diafragmas rígidos y este es el modelo pseudo-tridimensional que emplea el programa "EDIFICIO".

Previamente, para el análisis sísmico de un edificio modelado en forma pseudo-tridimensional, es necesario conocer la matriz de rigidez lateral $[K]$ de cada uno de los pórticos típicos (pórtico plano cuyas características geométricas y elásticas se repiten una o más veces) que componen al edificio. Este cálculo es efectuado por el programa "EDIFICIO" evaluando en primer lugar la matriz de flexibilidad lateral $[f]$, para después invertirla, obteniéndose finalmente: $[K] = [f]^{-1}$.

A su vez, la matriz $[f]$ se determina aplicando cargas unitarias en los nudos asociados a los niveles desplazables del pórtico, que coinciden con los diafragmas rígidos (losa de los techos), tal como se muestra en la Fig. 9.4.

Lógicamente, para que el programa calcule $[K]$, será necesario proporcionar previamente las características elásticas y geométricas de las barras típicas que componen al edificio (ver el manual de uso MANUAL.BT), grabándolas en un archivo de texto llamado BT.DAT; así como la información correspondiente a la geometría de cada pórtico típico "i" (ver el manual de uso MANUAL.PT), grabándola en un archivo denominado PTi.DAT. Los resultados correspondientes a la matriz de rigidez lateral $[K]$ de cada pórtico "i", son grabados por el programa "EDIFICIO" en unos archivos de texto llamados RLi.RES.

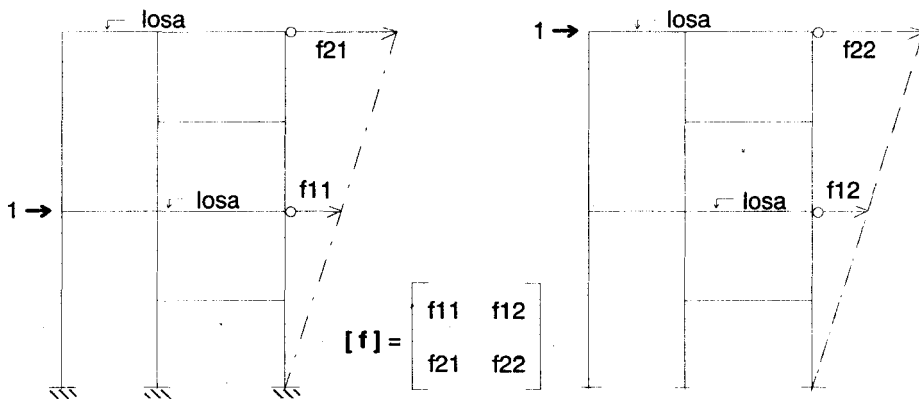


Fig. 9.4. Cálculo de la Matriz de Flexibilidad Lateral $[f]$ de un Pórtico Plano con Vigas Intermedias en el Entrepiso.

9.1. Ensamblaje de la Matriz de Rigidez Lateral del Edificio

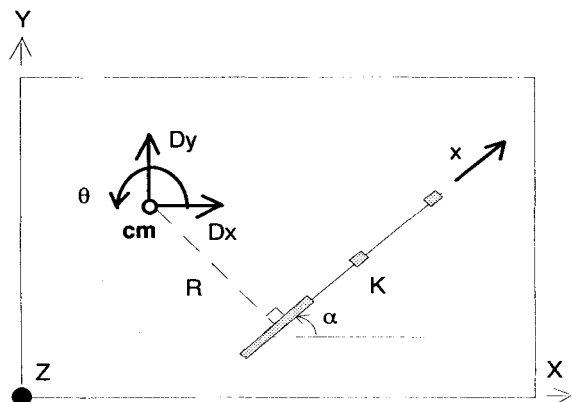
En primer lugar, se analizará el caso de un edificio de un piso, para luego extender el proceso al caso de un edificio compuesto por varios pisos.

La planta del edificio (Fig. 9.5) se define en un plano paralelo al plano X-Y de un sistema global dextrogiro (X, Y, Z). Un punto del diafragma rígido, por ejemplo, el centro de masas "cm", tendrá dos traslaciones (D_x , D_y) y un giro torsional (θ), definidos positivamente en el sistema global de referencia, y lo que se trata de analizar es la influencia de esos desplazamientos sobre los pórticos que componen al edificio.

Un pórtico plano cualquiera, cuya rigidez lateral es igual a " K " y que se encuentre distanciado de "cm" la cantidad " R ", se define positivamente a través de un eje local " x " que forma un ángulo " α " (positivo en el sentido Z) con el eje X del sistema global.

Fig. 9.5.

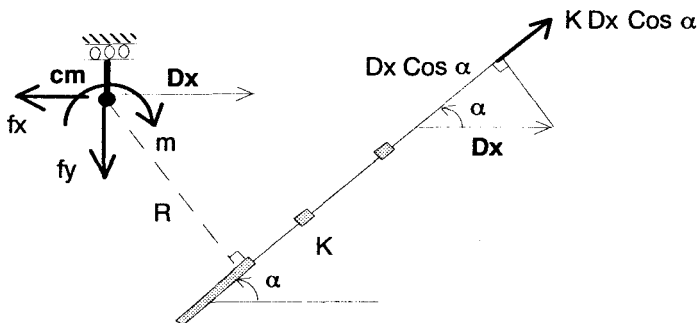
Planta de un Edificio de un Piso
y Definición de la Coordenada
Local " x " de un Pórtico Plano.



Analizando por separado la influencia de uno de los desplazamientos globales (D_x , D_y o θ , restringiendo al resto de desplazamientos) que tiene el centro de masas del diafragma rígido sobre un pórtico cualquiera, y recordando que el pórtico ofrece resistencia sólo ante las acciones contenidas en su plano, se tendrá:

a.- Influencia del Desplazamiento Global " D_x " sobre un Pórtico ($D_y = \theta = 0$)

La proyección de D_x sobre el pórtico es $D_x \cos \alpha$, luego, la fuerza sobre el pórtico será: $F = K D_x \cos \alpha$. Por equilibrio, las reacciones globales en el "cm" serán:



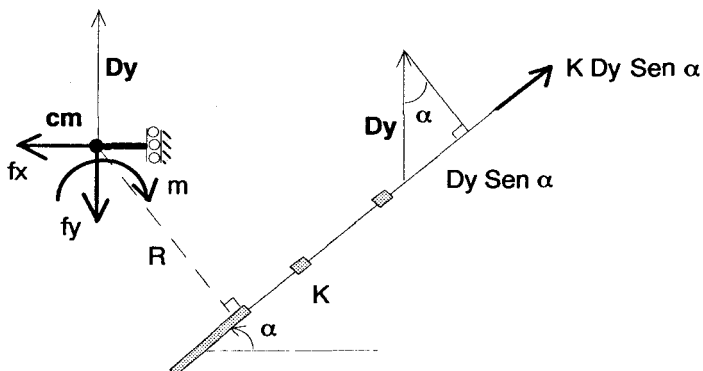
$$f_x = K D_x \cos^2 \alpha$$

$$f_y = K D_x \sin \alpha \cos \alpha$$

$$m = R K D_x \cos \alpha$$

b.- Influencia del Desplazamiento Global " D_y " sobre un Pórtico ($D_x = \theta = 0$)

La proyección de D_y sobre el pórtico es $D_y \sin \alpha$, luego, la fuerza sobre el pórtico será: $F = K D_y \sin \alpha$. Por equilibrio, las reacciones globales en el "cm" serán:



$$f_x = K D_y \sin \alpha \cos \alpha$$

$$f_y = K D_y \sin^2 \alpha$$

$$m = R K D_y \sin \alpha$$

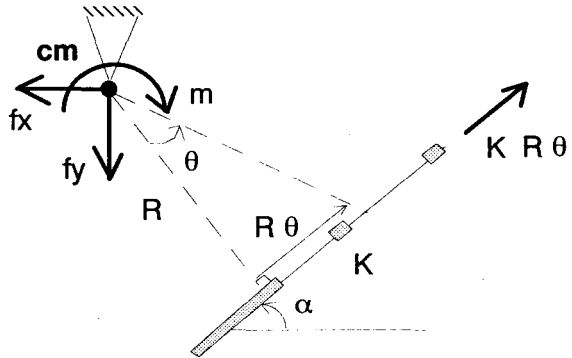
c.- Influencia del Giro Torsional Global " θ " sobre un Pórtico ($D_x = D_y = 0$).

El desplazamiento del pórtico es $R\theta$, luego, la fuerza sobre el pórtico será: $F = K R \theta$. Por equilibrio, las reacciones globales en el "cm" serán:

$$f_x = K R \theta \cos \alpha$$

$$f_y = K R \theta \sin \alpha$$

$$m = K R^2 \theta$$



Cuando los tres desplazamientos globales (D_x, D_y, θ) del centro de masas "cm" actúen en simultáneo, las reacciones globales (f_x, f_y, m) generadas en el "cm" pueden ser ordenadas matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cos^2 \alpha & K \sin \alpha \cos \alpha & K R \cos \alpha \\ K \sin \alpha \cos \alpha & K \sin^2 \alpha & K R \sin \alpha \\ K R \cos \alpha & K R \sin \alpha & K R^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \dots \text{Eq. 9.1}$$

Expresión que se puede sintetizar como: $\{f\} = [K_G] \{D\}$

Donde $[K_G]$ es la matriz de rigidez lateral en el sistema global de uno de los pórticos que componen al edificio, mientras que "K" es la rigidez lateral del pórtico en su plano.

Como el edificio está compuesto por una serie de pórticos (Fig 9.6), se tendrá que sumar el aporte de todos, manteniendo constante los desplazamientos del centro de masas, lo que dará lugar a la siguiente expresión:

$$\Sigma \{f\} = \Sigma \{[K_G] \{D\}\} = [\Sigma [K_G]] \{D\} = [K_{GE}] \{D\} \quad \dots \text{Eq. 9.2}$$

Donde: $[K_{GE}] = \Sigma [K_G] =$ matriz de rigidez lateral del edificio en el sistema global.

Por otra parte, en el centro de masas "cm" actúan las fuerzas sísmicas (F_x , F_y , M_z), y como ese punto debe estar en equilibrio (Fig. 9.6), deberá cumplirse:

$$F_x = \Sigma f_x$$

$$F_y = \Sigma f_y$$

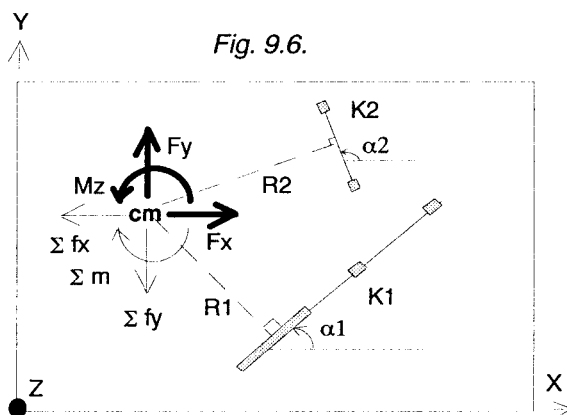
$$M_z = \Sigma m$$

O, lo que es lo mismo:

$$\{ F \} = \Sigma \{ f \}$$

Por lo que la ecuación 9.2 puede formularse como:

$$\{ F \} = [K_{GE}] \{ D \} \dots \text{Eq. 9.3}$$



Cuando el edificio consta de varios niveles (Fig. 9.7), deberá trabajarse con la matriz de rigidez lateral $[K]$, calculada en el plano de cada pórtico, en reemplazo de "K", y las variables que intervienen en la ecuación 9.3 serán:

$$\{ F \} = \begin{Bmatrix} \{ F_x \} \\ \{ F_y \} \\ \{ M_z \} \end{Bmatrix} \quad \{ D \} = \begin{Bmatrix} \{ D_x \} \\ \{ D_y \} \\ \{ \theta \} \end{Bmatrix}$$

$$[K_{GE}] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{xz}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{yz}] \\ [K_{zx}] & [K_{zy}] & [K_{zz}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Donde: } [K_{xx}] = \Sigma [K] \cos^2 \alpha \quad [K_{xy}] = [K_{yx}] = \Sigma [K] \sin \alpha \cos \alpha$$

$$[K_{yy}] = \Sigma [K] \sin^2 \alpha \quad [K_{yz}] = [K_{zy}] = \Sigma [K] R \sin \alpha$$

$$[K_{zz}] = \Sigma [K] R^2 \quad [K_{xz}] = [K_{zx}] = \Sigma [K] R \cos \alpha$$

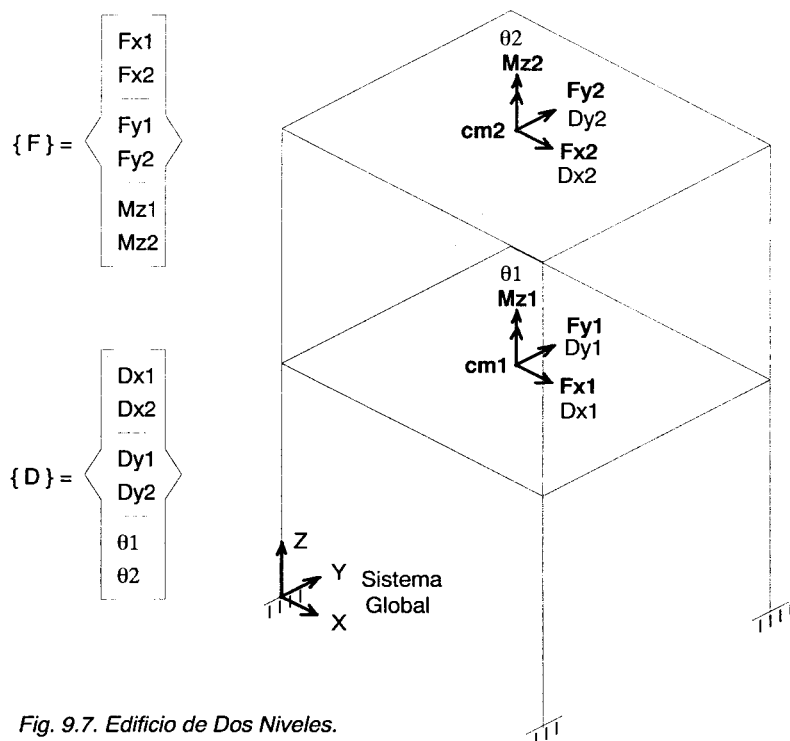


Fig. 9.7. Edificio de Dos Niveles.

Cabe indicar que el programa "EDIFICIO" determina el ángulo " α " que forma cada pórtico plano con el eje X del sistema global y la distancia " R " que existe entre "cm" y el pórtico, para lo cual, debe trazarse un reticulado (Fig. 9.8) en el plano X-Y, que contenga por lo menos a dos puntos de paso del pórtico; asimismo, si a cada punto del reticulado se le asigna el peso correspondiente a un metro de carga por nivel (no acumulado), el programa calculará la posición de "cm". Los puntos del reticulado son numerados automáticamente por el programa, de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.

Por ejemplo (Fig. 9.8), el eje C queda definido por los puntos 5-19 y el eje 2 por los puntos 7-8, 7-9 o 8-9 del reticulado.

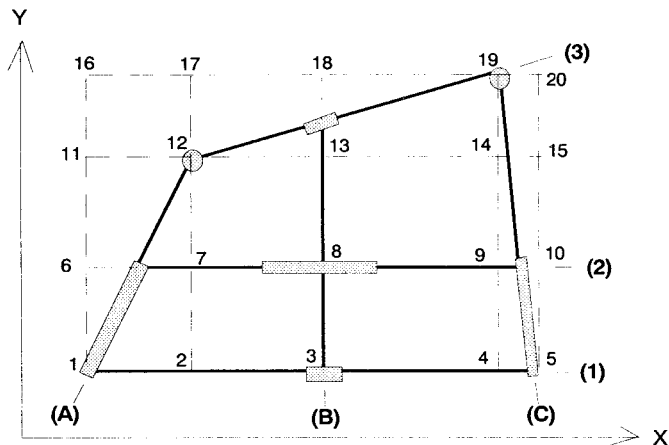


Fig. 9.8. Reticulado para Definir los Pórticos de un Edificio.

9.2. Cálculo de Desplazamientos y Fuerzas en los Pórticos

Los desplazamientos del centro de masas (D_x, D_y, θ), definidos positivamente en el sistema global de referencia (X, Y, Z) en cada nivel del edificio, se calculan resolviendo la ecuación 9.3:

$$\{ F \} = [K_{GE}] \{ D \} \Rightarrow \{ D \} = [K_{GE}]^{-1} \{ F \}$$

Luego, deberá calcularse los desplazamientos en el plano del pórtico $\{ d \}$, tal como se muestra en la Fig. 9.9.

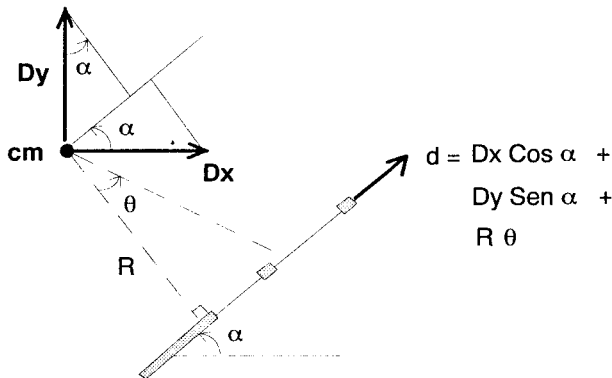


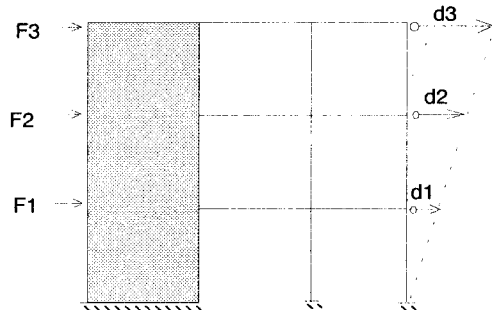
Fig. 9.9. Cálculo del Desplazamiento en un Nivel de un Pórtico.

Posteriormente, conociendo los desplazamientos en todos los niveles del pórtico $\{ d \}$, podrá calcularse las fuerzas que absorbe el pórtico en análisis $\{ F_p \}$ multiplicando su matriz de rigidez lateral $[K]$ por $\{ d \}$:

$$\{ F_p \} = [K] \{ d \}$$

Finalmente, para calcular las fuerzas internas (momento flector, fuerza cortante y fuerza axial) en las distintas barras del pórtico, se emplea un programa que resuelve pórticos planos sujeto a cargas conocidas.

Cabe mencionar que el programa "EDIFICIO" resuelve la ecuación 9.3, contemplando las cuatro hipótesis de carga que especifica el reglamento sísmico, considerando que el sismo actúa en forma independiente en las direcciones X, Y del sistema global, con los momentos torsores asociados a esas fuerzas, incluyendo la excentricidad accidental (ver el acápite 6.7.3):



$$\begin{array}{ll}
 \text{SISMO EN X-X: } \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{0\} \\ \{M_{x1}\} \end{Bmatrix} & \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{0\} \\ \{M_{x2}\} \end{Bmatrix} \\
 \\
 \text{SISMO EN Y-Y: } \{F\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_y\} \\ \{M_{y1}\} \end{Bmatrix} & \{F\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_y\} \\ \{M_{y2}\} \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

Estas fuerzas, así como la disposición de los pórticos en planta (Fig. 9.8), deben ser proporcionadas por el usuario en un archivo de texto llamado "EDIFICIO.DAT", siguiendo las instrucciones especificadas en el manual de uso "MANUAL.EDI".

Una vez discretizada las fuerzas en cada pórtico $\{F_p\}$, con sus desplazamientos correspondientes $\{d\}$, los resultados se graban en el archivo "EDIFICIO.RES".

De las cuatro hipótesis de carga, el programa adopta la condición más crítica que es aquella que produce la mayor fuerza cortante basal en el pórtico respectivo, grabando el vector de fuerzas correspondiente $\{F_p\}$ en un archivo denominado "CL.j", que significa carga lateral en el pórtico "j", donde "j" es un dígito que identifica el orden con el cual ingresó ese pórtico en la planta del edificio (archivo EDIFICIO.DAT).

Finalmente, con la opción 6 del programa, podrá resolverse al pórtico "j" sujeto al vector de cargas correspondiente (archivo CL.j), mediante el Método Directo de Rigidez (capítulo 8), grabándose los resultados (fuerzas de sección y desplazamientos de los nudos) en un archivo denominado "PORTICO.j".

Cabe señalar que para hacer uso del programa "EDIFICIO", deberá leerse previamente (con cualquier procesador de texto, recomendándose emplear el utilitario "SK") los manuales de uso que vienen incorporado con el programa, los cuales son:

- 1.- LEEME.EDI (características y limitaciones del programa).
- 2.- MANUAL.BT (características de las barras típicas del edificio).
- 3.- MANUAL.PT (características geométricas de un Pórtico Típico).
- 4.- MANUAL.EDI (definición del edificio con las fuerzas sísmicas actuantes).
- 5.- MANUAL.MOD (análisis modal traslacional incluyendo el efecto P-δ); fuera del alcance de este libro.

9.3. Ejemplo de Aplicación

Aplicando el programa "EDIFICIO" se efectuará el análisis sísmico del edificio de 3 pisos cuya planta típica se muestra en la Fig. 9.10. Se dibujará el DMF del pórtico mixto correspondiente al eje C.

Datos:

Vigas: 0.30 x 0.50 m

Columnas: 0.30 x 0.60 m

Muros de Albañilería (tabiques y muro confinado): espesor = $t = 0.15$ m

Altura de entrepiso = 3 m

Peso de cada planta = 1 ton/m² (peso en cada piso: 97 ton)

Fuerzas de Inercia en XX y YY (ton): $F_3 = 15$ $F_2 = 10$ $F_1 = 5$

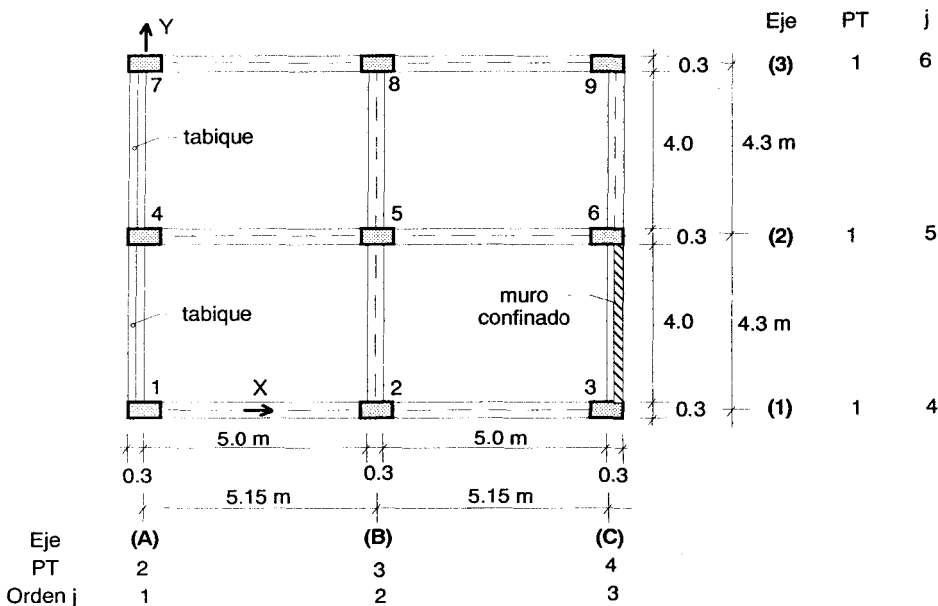


Fig. 9.10. Planta Típica del Edificio. Se muestra la numeración del reticulado (línea discontinua), la identificación de cada pórtico típico (PT) y el orden "j" con el cual ingresará cada eje en el file EDIFICIO.DAT.

Las fuerzas de inercia se supondrán aplicadas en el centroide del área en planta (en realidad F_x pudo ser diferente a F_y). Los tabiques se modelarán reemplazándolos por un puntal diagonal de albañilería (biela), con un ancho efectivo igual a la longitud de la diagonal dividida entre 4: $w_o = D/4 \approx 1.2$ m). Para efectos de evaluar el momento de inercia del muro confinado, las columnas de confinamiento C-1 y C-2 serán reemplazadas por una sección equivalente de albañilería (criterio de la sección transformada).

PÓRTICOS TÍPICOS (files PTi.DAT)

MANUAL.PT CONDENSADO (ver el manual completo en el file MANUAL.PT)

1.1. TITULO del PT:

1.2. #B, #N:

2.1. # de GRUPOS (coordenadas):

2.2. Ni, Nf, increN, Xi, Yi, Dx, Dy:

3.1. BT, Bi, Bf, increB, Ni, Nj, increN:

FIN de BARRAS:

0

4.1. # de APOYOS:

4.2. NUDO, Rx, Ry, Rgiro:

5.1. # de PISOS:

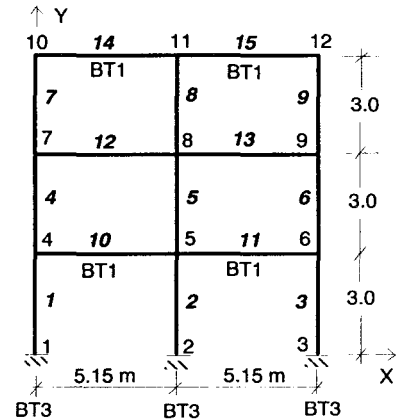
5.2. NUDOS MATRIZ FLEXIBILIDAD:

R = 0 → libre, R = 1 → Restringido

File PT1.DAT

Portico Tipico # 1 (Ejes 1, 2 y 3)

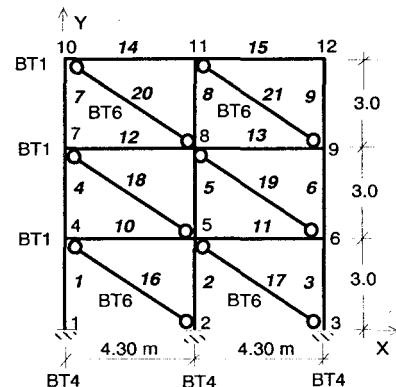
15	12
3	
1	10 3 0.0 0.0 0.0 3.0
2	11 3 5.15 0.0 0.0 3.0
3	12 3 10.3 0.0 0.0 3.0
3	1 9 1 1 4 1
1	10 14 2 4 5 3
1	11 15 2 5 6 3
0	
3	
1	1 1 1
2	1 1 1
3	1 1 1
3	
5	8 11



File PT2.DAT

Portico Tipico # 2 (Eje A)

21	12
3	
1	10 3 0.0 0.0 0.0 3.0
2	11 3 4.3 0.0 0.0 3.0
3	12 3 8.6 0.0 0.0 3.0
4	1 9 1 1 4 1
1	10 14 2 4 5 3
1	11 15 2 5 6 3
6	16 20 2 2 4 3
6	17 21 2 3 5 3
0	
3	
1	1 1 1
2	1 1 1
3	1 1 1
3	
5	8 11



PÓRTICOS TÍPICOS (files PTi.DAT)

MANUAL.PT CONDENSADO (ver el manual completo en el file MANUAL.PT)

1.1. TITULO del PT:

1.2. #B, #N:

2.1. # de GRUPOS (coordenadas):

2.2. Ni, Nf, increN, Xi, Yi, Dx, Dy:

3.1. BT, Bi, Bf, increB, Ni, Nj, increN:

FIN de BARRAS:

0

4.1. # de APOYOS:

4.2. NUDO, Rx, Ry, Rgiro:

5.1. # de PISOS:

5.2. NUDOS MATRIZ FLEXIBILIDAD:

R = 0 → libre, R = 1 → Restringido

File PT3.DAT

Portico Tipico # 3 (Eje B)

15 12

3						
1	10	3	0.0	0.0	0.0	3.0
2	11	3	4.3	0.0	0.0	3.0
3	12	3	8.6	0.0	0.0	3.0
4	1	9	1	1	4	1
1	10	14	2	4	5	3
1	11	15	2	5	6	3

0

3

1

2

3

3

5

8

11

Portico Tipico # 4 (Eje C)

9 8

2						
1	7	2	0.0	0.0	0.0	3.0
2	8	2	6.45	0.0	0.0	3.0
5	1	5	2	1	3	2
4	2	6	2	2	4	2
2	7	9	1	3	4	2

0

2

1

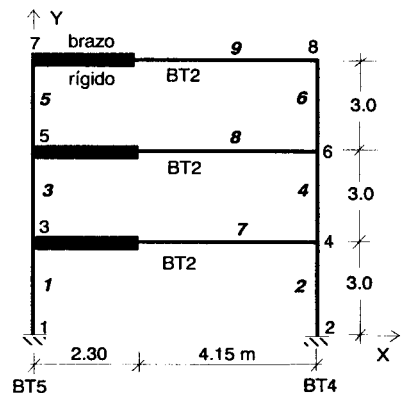
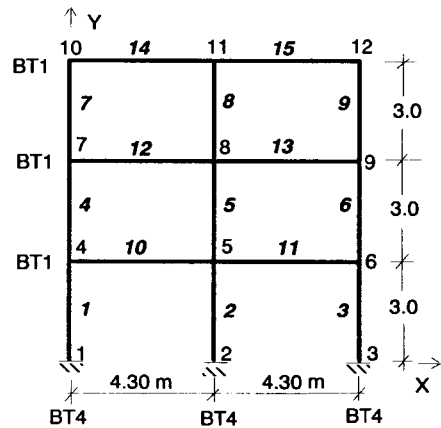
2

3

3

5

7



MANUAL.EDI CONDENSADO (ver el manual completo en el file MANUAL.EDI)

1.1. TITULO EDI:

1.2. N, #PORT., #PT:

1.3. cs o fi:

2.1. # ejes // X, // Y:

2.2. Xi:

2.3. Yi:

3.1. INDI W PISO (1 o 0):

3.2. PUNTO, PESOW:

FIN PISO:

0 0

4A.1. Z, U, S, Tp:

4A.2. Rx, Tx, Ry, Ty:

4A.3. ALTURAS ENTREPISO:

4B.1. Fi (XX):

4B.2. Fi (YY):

5.1. PT:

6.1. TITULO PORTICO:

6.2. PT, ORIGEN, FIN:

7.1. INDI Ea PISO (1 o 0):

7.2. Eax (sismoY), Eay (sismoX):

INDI = 0 → DATOS PISO SUPERIOR = DATOS PISO INFERIOR

DAR 4A. SI LA Rpta. EN 1.3 ES "cs": COEF. SIS. = ZUSC/R

DAR 4B. SI LA Rpta. EN 1.3 ES "fi" (FUERZA de INERCIA)

File EDIFICIO.DAT

Ejemplo. Edificio de 3 Pisos con Tabiques y Muro Confinado.

3 6 4

fi

3

0.00 5.15 10.30

0.00 4.30 8.60

1

5

0

0

0

5.0 10.0 15.0

5.0 10.0 15.0

1 2 3 4

Eje A (j = 1)

2 1 7

Eje B (j = 2)

3 2 8

Eje C (j = 3)

4 3 9

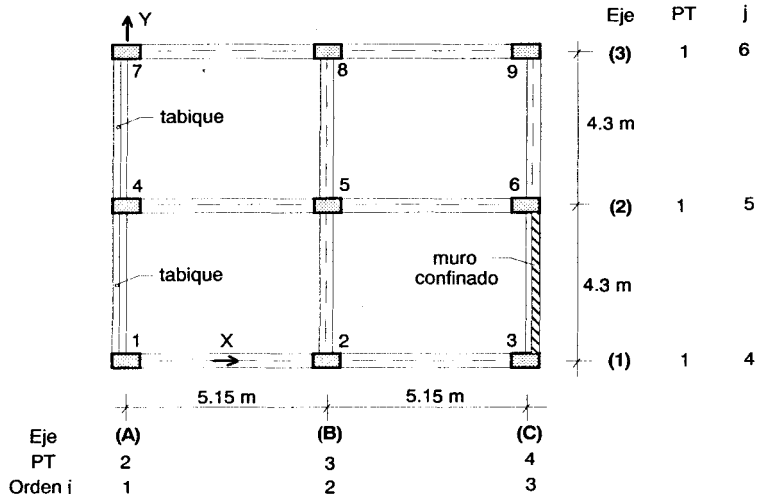
Eje 1 (j = 4)

1 1 3

Eje 2 (j = 5)

1 4 6

Eje 3 (j = 6)



1 7 9
1
1.09 0.89
0
0

FILES DE RESULTADOS

1.- MATRICES DE RIGIDEZ LATERAL DE CADA PÓRTICO TÍPICO (files RLi.RES) OBTENIDAS CON LA OPCIÓN 3 DEL MENÚ

Portico Tipico # 1 (Ejes 1, 2 y 3)

3
5 8 11
21857.12 -12371.72 2700.785
-12371.72 16483.79 -7483.022
2700.785 -7483.022 5226.532

Portico Tipico # 2 (Eje A)

3
5 8 11
49876.73 -25532.55 1394.116
-25532.55 48928.97 -23890.38
1394.116 -23890.38 22052.47

Portico Tipico # 3 (Eje B)

3
5 8 11
6428.277 -3470.257 476.6493
-3470.257 5737.564 -2799.358
476.6493 -2799.358 2369.74

Portico Tipico # 4 (Eje C)

3
3 5 7
88015.38 -47303.11 6603.151
-47303.11 85798.63 -39731.36
6603.151 -39731.36 30446.35

2.- CARGA LATERAL ASOCIADA A LA HIPÓTESIS DE MÁXIMO CORTANTE BASAL EN EL PÓRTICO EN ESTUDIO: EJE "C" (file CL.3; j = 3)

CARGA LATERAL (CASO: cortante basal maximo de las 4 hipotesis)

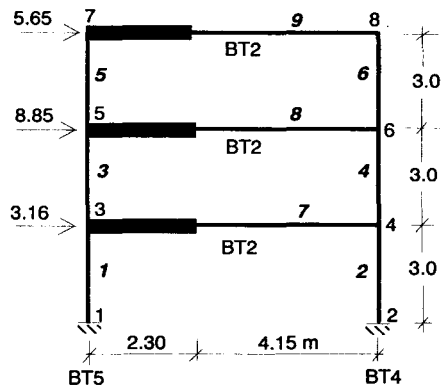
PORTICO: Eje C (j = 3)

pisos Port. Tip. # # asignado en planta
3 4 3

HIPOTESIS: YY: e-Ea

NUDO FUERZA

3 3.145057
5 8.852753
7 5.654446



3.- File EDIFICIO.RES (OBTENIDO CON LA OPCIÓN 4 DEL MENÚ)

Ejemplo. Edificio de 3 Pisos con Tabiques y Muro Confinado.

NIV	PESO	Xcg	Ycg
1	97	5.15	4.3
2	97	5.15	4.3
3	97	5.15	4.3

PESO TOTAL = 291

NIV	Fxx	Fyy
1	5	5
2	10	10
3	15	15

CORTANTE Y PUNTO DE APLICACION

ENTREP.	Qxx	Qyy	XQ	YQ
1	30	30	5.15	4.3
2	25	25	5.15	4.3
3	15	15	5.15	4.3

DESPLAZAMIENTO DEL CM (con torsion real)

NIV	SISMO XX			SISMO YY		
	DX	DY	GIRO	DX	DY	GIRO
1	0.001836	0.000000	0.000000	0.000000	0.000500	-0.000017
2	0.004524	0.000000	0.000000	0.000000	0.001024	-0.000026
3	0.006485	0.000000	0.000000	0.000000	0.001424	-0.000024

TORSOR REAL

TORSOR ACCIDENTAL

NIV	Qx*Ey	Qy*Ex	Qx*Eay	Qy*Eax
1	0.00	-28.87	26.70	32.70
2	0.00	-11.45	22.25	27.25
3	0.00	3.00	13.35	16.35

DESPLAZAMIENTO DEL CM (con torsion REGLAM.)

NIV	DX	DY	GIRO
XX: e + Ea			
1	0.001836	-0.000015	0.000015
2	0.004524	-0.000024	0.000032
3	0.006485	-0.000021	0.000045
XX: e - Ea			
1	0.001836	0.000015	-0.000015
2	0.004524	0.000024	-0.000032
3	0.006485	0.000021	-0.000045
YY: e + Ea			
1	0.000000	0.000522	-0.000035
2	0.000000	0.001063	-0.000061
3	0.000000	0.001448	-0.000052
YY: e - Ea			
1	0.000000	0.000478	0.000000
2	0.000000	0.000985	0.000008
3	0.000000	0.001400	0.000004

FUERZA LATERAL EN CADA PORTICO					
NIV	SISMO XX		SISMO YY		NUDO
	XX: e+ Ea	XX: e-Ea	YY: e+ Ea	YY: e-Ea	
PORTICO = Eje A (j = 1)					
1	-0.213	0.213	2.297	1.533	5
2	-0.833	0.833	8.464	1.075	8
3	-1.174	1.174	5.885	8.556	11
PORTICO = Eje B (j = 2)					
1	-0.027	0.027	0.355	0.322	5
2	-0.023	0.023	0.238	0.072	8
3	0.009	-0.009	0.702	0.789	11
PORTICO = Eje C (j = 3)					
1	0.240	-0.240	2.348	3.145	3
2	0.856	-0.856	1.298	8.853	5
3	1.166	-1.166	8.413	5.654	7
PORTICO = Eje 1 (j = 4)					
1	1.913	1.420	-0.664	-0.332	5
2	3.357	3.310	-0.779	0.412	8
3	5.151	4.849	0.387	-0.163	11
PORTICO = Eje 2 (j = 5)					
1	1.667	1.667	0.000	0.000	5
2	3.333	3.333	0.000	0.000	8
3	5.000	5.000	0.000	0.000	11
PORTICO = Eje 3 (j = 6)					
1	1.420	1.913	0.664	0.332	5
2	3.310	3.357	0.779	-0.412	8
3	4.849	5.151	-0.387	0.163	11

DESPLAZAMIENTO LATERAL EN CADA PORTICO				
NIV	SISMO XX		SISMO YY	
	XX: e+ Ea	XX: e- Ea	YY: e+ Ea	YY: e- Ea
PORTICO = Eje A (j = 1)				
1	-0.000094	0.000094	0.000703	0.000476
2	-0.000190	0.000190	0.001376	0.000945
3	-0.000253	0.000253	0.001713	0.001381
PORTICO = Eje B (j = 2)				
1	-0.000015	0.000015	0.000522	0.000478
2	-0.000024	0.000024	0.001063	0.000985
3	-0.000021	0.000021	0.001448	0.001400
PORTICO = Eje C (j = 3)				
1	0.000063	-0.000063	0.000341	0.000480
2	0.000142	-0.000142	0.000751	0.001025
3	0.000210	-0.000210	0.001182	0.001420
PORTICO = Eje 1 (j = 4)				
1	0.001901	0.001770	-0.000151	0.000002
2	0.004662	0.004385	-0.000261	0.000034
3	0.006678	0.006292	-0.000222	0.000016

PORTICO = Eje 2 (j = 5)

1	0.001836	0.001836	0.000000	0.000000
2	0.004524	0.004524	0.000000	0.000000
3	0.006485	0.006485	0.000000	0.000000

PORTICO = Eje 3 (j = 6)

1	0.001770	0.001901	0.000151	-0.000002
2	0.004385	0.004662	0.000261	-0.000034
3	0.006292	0.006678	0.000222	-0.000016

4.-RESULTADOS DEL ANÁLISIS SÍSMICO TRASLACIONAL EN Y-Y (file TRASLA.RES). OBTENIDO CON LA OPCIÓN 5 DEL MENÚ

Ejemplo. Edificio de 3 pisos con Tabiques y Muro Confinado

RESULTADOS DEL ANALISIS SISMICO TRASLACIONAL:

NIVEL	FUERZA TOTAL	DESPLAZAMIENTO
1	5.00	0.000478
2	10.00	0.000995
3	15.00	0.001404

FUERZA ABSORBIDA POR CADA PORTICO TIPICO

PORTICO TIPICO #: 2

Eje A

pisos PT # ORDEN

3 2 1

HIPOTESIS: ANALISIS TRASLACIONAL

NUDO	FUERZA
5	.4083097
8	2.926468
11	7.857073

PORTICO TIPICO #: 3

Eje B

pisos PT # ORDEN

3 3 2

HIPOTESIS: ANALISIS TRASLACIONAL

NUDO	FUERZA
5	.2908771
8	.118422
11	.7697105

PORTICO TIPICO #: 4

Eje C

pisos PT # ORDEN

3 4 3

HIPOTESIS: ANALISIS TRASLACIONAL

NUDO	FUERZA
3	4.300821
5	6.955113
7	6.373211

Para el Eje "C" se observa que el análisis incluyendo torsión es más crítico que el correspondiente al análisis traslacional.

5.-ESFUERZOS EN EL EJE "C". OBTENIDOS CON LA OPCIÓN 6 DEL MENÚ. File PORTICO.3

PORTICO: Eje C (j = 3)

Portico Tipico # 4 (Eje C)

HIPOTESIS # 1 : HIPOTESIS: YY: e-Ea

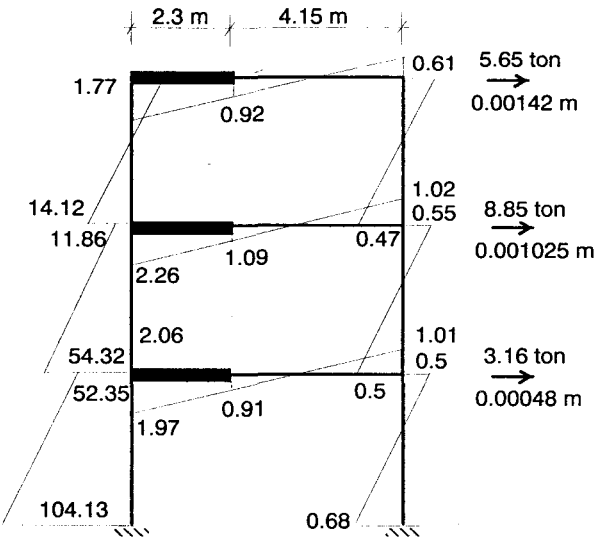
NUDO	DX	DY	GIRO
1	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000	0.000000
3	0.000480	0.000004	-0.000063
4	0.000480	-0.000011	-0.000095
5	0.001025	0.000007	-0.000089
6	0.001025	-0.000018	-0.000067
7	0.001420	0.000008	-0.000094
8	0.001419	-0.000022	0.000009



BARRA ij	AXIALi	CORTANTE	MOMENTO	AXIALj	CORTANTE	MOMENTO
1: 1- 3	-1.34	17.26	104.13	1.34	-17.26	-52.35
2: 2- 4	1.34	0.39	0.68	-1.34	-0.39	0.50
3: 3- 5	-0.88	14.15	54.32	0.88	-14.15	-11.86
4: 4- 6	0.88	0.35	0.50	-0.88	-0.35	0.55
5: 5- 7	-0.37	5.30	14.12	0.37	-5.30	1.77
6: 6- 8	0.37	0.36	0.47	-0.37	-0.36	0.61
7: 3- 4	0.04	-0.46	-1.97	-0.04	0.46	-1.01
8: 5- 6	-0.01	-0.51	-2.26	0.01	0.51	-1.02
9: 7- 8	0.36	-0.37	-1.77	-0.36	0.37	-0.61

RESULTADO

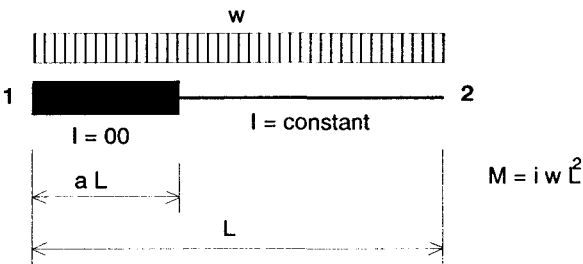
Eje C
DMF (ton-m)



Anexo 1

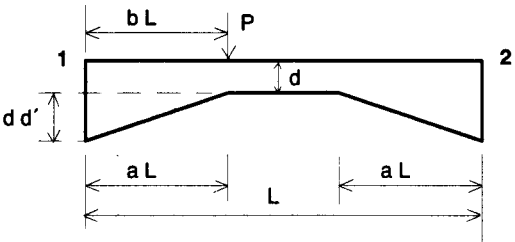
TABLAS DE LA PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

TABLE 7. Prismatic Member Having $I = \infty$ at One End



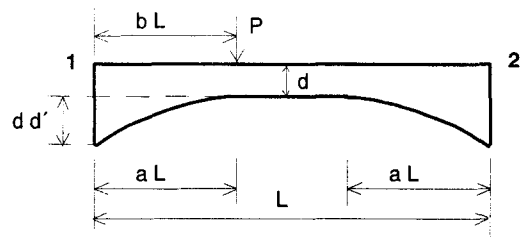
a	r_{1-2}	r_{2-1}	C_{1-2}	C_{2-1}	Coefficient i, for	
					M_{1-2}	M_{2-1}
0.025	0.499	0.538	4.43	4.10	0.0917	0.0792
0.050	0.496	0.579	4.91	4.21	0.1002	0.0752
0.075	0.492	0.622	5.46	4.32	0.1088	0.0713
0.100	0.486	0.667	6.09	4.44	0.1175	0.0675
0.125	0.479	0.714	6.81	4.57	0.1263	0.0638
0.150	0.471	0.765	7.64	4.71	0.1352	0.0602
0.175	0.462	0.818	8.59	4.85	0.1442	0.0567
0.200	0.452	0.875	9.69	5.00	0.1533	0.0533
0.225	0.440	0.935	10.96	5.17	0.1626	0.0501
0.250	0.429	1.000	12.44	5.33	0.1719	0.0469

TABLE 3. Straight Haunches-Constant Width



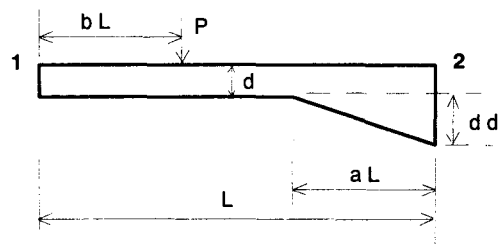
Haunch		Carry-over Factors	Stiffness Factors	Unif. Load FEM Coef. $\times w L^2$	Concentrated Load. FEM. Coef. $\times P L$									
					b									
					0.1		0.3		0.5		0.7		0.9	
a	d'	$r_{12} = r_{21}$	$C_{12} = C_{21}$	$M_{12} = M_{21}$	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21
0.1	0.6	0.567	5.12	0.0905	0.091	0.005	0.168	0.061	0.137	0.137	0.061	0.168	0.005	0.091
	1.0	0.588	5.54	0.0925	0.094	0.004	0.175	0.059	0.140	0.140	0.059	0.175	0.004	0.094
	1.5	0.603	5.89	0.0941	0.096	0.003	0.180	0.058	0.143	0.143	0.058	0.180	0.003	0.096
0.3	0.6	0.647	8.04	0.0982	0.090	0.007	0.188	0.062	0.153	0.153	0.063	0.188	0.007	0.090
	1.0	0.705	10.85	0.1034	0.092	0.005	0.206	0.058	0.164	0.164	0.058	0.206	0.005	0.092
	1.5	0.753	14.27	0.1074	0.094	0.004	0.224	0.051	0.173	0.173	0.051	0.224	0.004	0.094
0.5	0.6	0.633	10.72	0.0969	0.087	0.008	0.176	0.068	0.154	0.154	0.068	0.176	0.008	0.087
	1.0	0.692	17.34	0.1023	0.089	0.008	0.189	0.069	0.167	0.167	0.069	0.189	0.008	0.089
	1.5	0.748	28.32	0.1070	0.090	0.007	0.200	0.068	0.179	0.179	0.068	0.200	0.007	0.090

TABLE 5. Parabolic Haunches-Constant Width



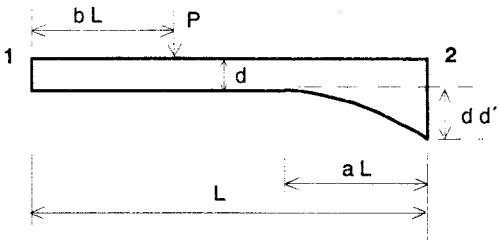
Haunch		Carry-over Factors	Stiffness Factors	Unif. Load FEM Coef. $\times w L^2$	Concentrated Load. FEM. Coef. $\times P L$									
					b									
					0.1		0.3		0.5		0.7		0.9	
a	d'	r12 = r21	C12 = C21	M12 = M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21
0.1	0.6	0.548	4.76	0.0885	0.089	0.006	0.162	0.062	0.133	0.133	0.062	0.162	0.006	0.089
	1.0	0.564	5.05	0.0902	0.091	0.005	0.167	0.061	0.136	0.136	0.061	0.167	0.005	0.091
	1.5	0.577	5.30	0.0915	0.093	0.004	0.172	0.060	0.138	0.138	0.060	0.172	0.004	0.093
0.3	0.6	0.615	6.58	0.0952	0.090	0.006	0.181	0.061	0.146	0.146	0.061	0.181	0.006	0.090
	1.0	0.660	8.10	0.0994	0.093	0.004	0.196	0.058	0.154	0.154	0.058	0.196	0.004	0.093
	1.5	0.698	9.78	0.1028	0.095	0.003	0.210	0.053	0.161	0.161	0.053	0.210	0.003	0.095
0.5	0.6	0.636	8.42	0.0972	0.089	0.007	0.182	0.065	0.153	0.153	0.065	0.182	0.007	0.089
	1.0	0.694	12.03	0.1025	0.092	0.006	0.197	0.063	0.164	0.164	0.063	0.197	0.006	0.092
	1.5	0.747	17.13	0.1069	0.093	0.005	0.211	0.059	0.174	0.174	0.059	0.211	0.005	0.093

TABLE 4. Straight Haunches-Constant Width



Haunch		Carry-over Factors		Stiffness Factors		Unif. Load FEM Coef. $\times w L^2$		Concentrated Load. FEM. Coef. $\times P L$							
								b							
								0.3		0.5		0.7		0.9	
a	d'	r12	r21	C12	C21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21
0.1	0.6	0.573	0.495	4.19	4.85	0.076	0.098	0.141	0.075	0.114	0.149	0.051	0.174	0.004	0.091
	1.0	0.596	0.493	4.25	5.14	0.074	0.103	0.139	0.080	0.110	0.157	0.046	0.182	0.003	0.094
	1.5	0.613	0.492	4.30	5.36	0.072	0.107	0.138	0.083	0.107	0.163	0.043	0.189	0.002	0.096
0.3	0.6	0.704	0.461	4.48	6.84	0.069	0.116	0.133	0.097	0.099	0.186	0.039	0.202	0.004	0.091
	1.0	0.791	0.449	4.71	8.29	0.063	0.131	0.126	0.113	0.087	0.215	0.029	0.225	0.002	0.094
	1.5	0.866	0.439	4.91	9.68	0.058	0.144	0.120	0.129	0.077	0.241	0.021	0.245	0.002	0.097
0.5	0.6	0.788	0.413	4.62	8.81	0.067	0.119	0.129	0.108	0.094	0.196	0.038	0.195	0.004	0.089
	1.0	0.948	0.385	4.99	12.28	0.060	0.139	0.119	0.136	0.079	0.237	0.029	0.218	0.003	0.092
	1.5	1.114	0.363	5.39	16.52	0.052	0.160	0.109	0.169	0.064	0.281	0.021	0.238	0.002	0.094
1.0	0.6	0.709	0.350	5.74	11.63	0.062	0.109	0.115	0.100	0.085	0.172	0.038	0.177	0.005	0.086
	1.0	0.834	0.294	6.86	19.46	0.053	0.122	0.101	0.122	0.069	0.195	0.029	0.189	0.004	0.088
	1.5	0.981	0.247	8.23	32.69	0.045	0.135	0.086	0.148	0.056	0.218	0.022	0.201	0.003	0.089

TABLE 6. Parabolic Haunches-Constant Width



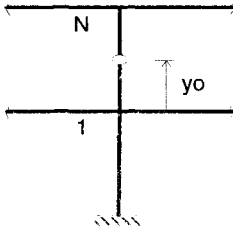
Haunch		Carry-over Factors		Stiffness Factors		Unif. Load FEM Coef. x w L ²		Concentrated Load. FEM. Coef. x P L							
								b							
								0.3		0.5		0.7		0.9	
a	d'	r12	r21	C12	C21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21	M12	M21
0.1	0.6	0.551	0.497	4.13	4.59	0.078	0.094	0.143	0.072	0.117	0.142	0.054	0.166	0.005	0.089
	1.0	0.569	0.496	4.18	4.79	0.077	0.098	0.141	0.075	0.114	0.148	0.051	0.173	0.004	0.092
	1.5	0.583	0.495	4.22	4.97	0.075	0.101	0.140	0.077	0.112	0.152	0.048	0.178	0.003	0.094
0.3	0.6	0.645	0.478	4.35	5.88	0.072	0.109	0.136	0.087	0.105	0.170	0.043	0.191	0.004	0.091
	1.0	0.705	0.469	4.51	6.77	0.067	0.120	0.132	0.098	0.097	0.190	0.035	0.210	0.003	0.094
	1.5	0.758	0.462	4.65	7.64	0.063	0.129	0.128	0.109	0.089	0.208	0.028	0.226	0.002	0.096
0.5	0.6	0.717	0.448	4.48	7.21	0.069	0.115	0.133	0.098	0.099	0.186	0.040	0.196	0.004	0.090
	1.0	0.824	0.428	4.75	9.12	0.063	0.131	0.125	0.117	0.087	0.217	0.031	0.218	0.003	0.093
	1.5	0.929	0.411	5.02	11.35	0.057	0.147	0.118	0.138	0.075	0.249	0.023	0.238	0.002	0.096
1.0	0.6	0.755	0.379	4.86	9.68	0.065	0.114	0.123	0.104	0.090	0.183	0.038	0.187	0.004	0.088
	1.0	0.910	0.334	5.36	14.62	0.057	0.130	0.111	0.129	0.074	0.214	0.029	0.204	0.003	0.090
	1.5	1.091	0.294	5.93	21.99	0.049	0.148	0.099	0.159	0.060	0.246	0.021	0.220	0.002	0.092

Anexo 2

TABLAS DE MUTO

TABLA 1A. ALTURA ESTÁNDAR DEL PUNTO DE INFLEXIÓN (yo)

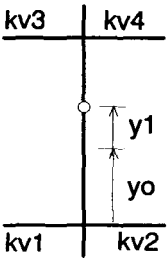
N	Piso	k										
		0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
1	1	0.75	0.70	0.65	0.65	0.60	0.60	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55
2	2	0.45	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45
	1	0.85	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.60	0.55	0.55
3	3	0.25	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45
	2	0.50	0.50	0.50	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50
	1	0.90	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55
4	4	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45
	3	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50
	2	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	0.95	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.55	0.55
5	5	0.10	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45
	4	0.25	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50
	3	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50
	2	0.60	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55



N = número de niveles del eje de la columna en análisis.

TABLA 2. CÁLCULO DE “y1” CORRECCIÓN POR VARIACIÓN EN LAS RIGIDE-
CES DE LAS VIGAS

$\alpha 1$	k										
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0.4	0.40	0.30	0.25	0.20	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.05	0.05
0.5	0.30	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05
0.6	0.20	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05
0.7	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00
0.8	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00
0.9	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



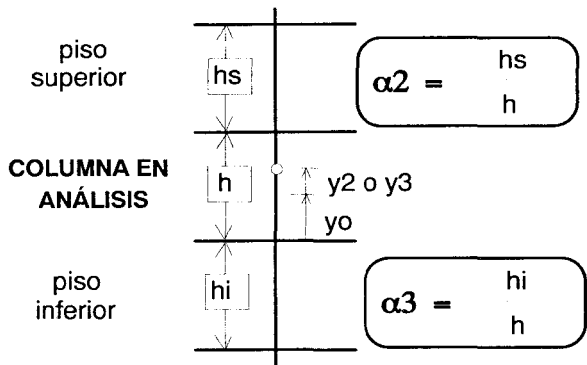
$$\alpha 1 = \frac{kv3 + kv4}{kv1 + kv2}$$

Notas:

- 1.- Para el primer piso: $y1 = 0$, salvo que la base esté semiempotrada.
- 2.- Cuando $\alpha 1 > 1$ se ingresa a la Tabla 2 con la inversa de $\alpha 1$ y al resultado ($y1$) se le cambia de signo, esto significa que el punto de inflexión se desplaza hacia el lado de las vigas menos rígidas, en este caso, hacia abajo.

TABLA 3. CÁLCULO DE “y2” y “y3” CORRECCIÓN POR VARIACIÓN DE LA ALTURA DEL ENTREPISO

α_2	α_3	k										
		0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
2.0		0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05
1.8		0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00
1.6	0.4	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00
1.4	0.6	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.00	0.00
1.2	0.8	0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.0	1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.8	1.2	-0.05	-0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	1.4	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.00	0.00
0.4	1.6	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.00	0.00
	1.8	-0.15	-0.10	-0.10	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.00
	2.0	-0.15	-0.15	-0.10	-0.10	-0.10	-0.10	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05



Notas:

- 1.- Cuando $\alpha_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$
- 2.- Cuando $\alpha_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 0$
- 3.- Para el primer piso $\Rightarrow y_3 = 0$
- 4.- Para el último piso $\Rightarrow y_2 = 0$

Anexo 3

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PLANO

Con la finalidad que el lector se forme una idea acerca del método de Elementos Finitos, a continuación se presenta la matriz de rigidez $[k]$ correspondiente al elemento finito más simple (triángulo plano isotrópico). Esta matriz reemplaza a la matriz de rigidez de una barra en el sistema global de referencia (X, Y) en el método directo de rigidez (Capítulo 8), y su deducción se encuentra descrita en la Ref.9.

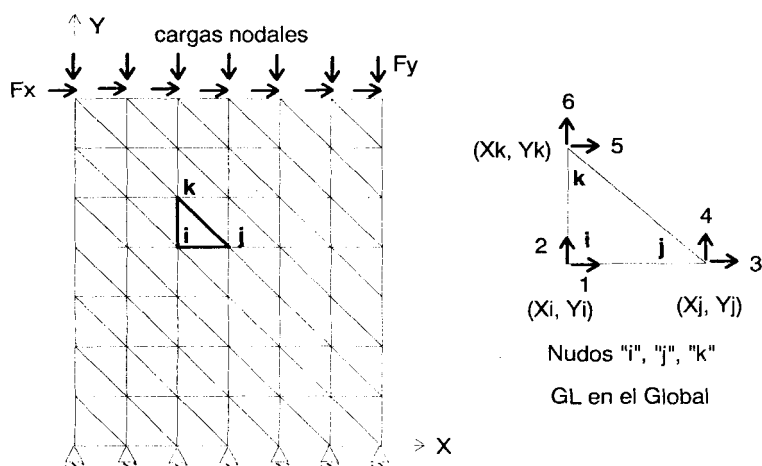


Fig. A3.1. Placa de Concreto Armado Modelada Mediante la Técnica de Elementos Finitos y Grados de Libertad (GL) de un Elemento Finito Triangular $i-j-k$ en Estado Plano de Esfuerzos.

$$[k] = \frac{t}{4A}$$

		i		j		k		Nudo
		1	2	3	4	5	6	GL
SIMÉTRICA	k11	k12	k13	k14	k15	k16	1	} i
		k22	k23	k24	k25	k26	2	
			k33	k34	k35	k36	3	} j
				k44	k45	k46	4	
					k55	k56	5	} k
						k66	6	

$$k_{11} = E_{11} a_1^2 + E_{33} b_1^2$$

$$k_{12} = a_1 E_{12} b_1 + b_1 E_{33} a_1$$

$$k_{13} = a_1 E_{11} a_2 + b_1 E_{33} b_2$$

$$k_{14} = a_1 E_{12} b_2 + b_1 E_{33} a_2$$

$$k_{15} = a_1 E_{11} a_3 + b_1 E_{33} b_3$$

$$k_{16} = a_1 E_{12} b_3 + b_1 E_{33} a_3$$

$$k_{22} = E_{11} b_1^2 + E_{33} a_1^2$$

$$k_{23} = b_1 E_{21} a_2 + a_1 E_{33} b_2$$

$$k_{24} = b_1 E_{22} b_2 + a_1 E_{33} a_2$$

$$k_{25} = b_1 E_{21} a_3 + a_1 E_{33} b_3$$

$$k_{26} = b_1 E_{22} b_3 + a_1 E_{33} a_3$$

$$k_{33} = E_{11} a_2^2 + E_{33} b_2^2$$

$$k_{34} = a_2 E_{12} b_2 + b_2 E_{33} a_2$$

$$k_{35} = a_2 E_{11} a_3 + b_2 E_{33} b_3$$

$$k_{36} = a_2 E_{12} b_3 + b_2 E_{33} a_3$$

$$k_{44} = E_{22} b_2^2 + E_{33} a_2^2$$

$$k_{45} = b_2 E_{21} a_3 + a_2 E_{33} b_3$$

$$k_{46} = b_2 E_{22} b_3 + a_2 E_{33} a_3$$

$$k_{55} = E_{11} a_3^2 + E_{33} b_3^2$$

$$k_{56} = a_3 E_{12} b_3 + b_3 E_{33} a_3$$

$$k_{66} = E_{22} b_3^2 + E_{33} a_3^2$$

Donde:

$$a_1 = Y_j - Y_k$$

$$a_2 = Y_k - Y_i$$

$$a_3 = Y_i - Y_j$$

$$b_1 = X_k - X_j$$

$$b_2 = X_i - X_k$$

$$b_3 = X_j - X_i$$

$$A = \frac{1}{2} [b_3 a_2 - a_3 b_2]$$

t = espesor del elemento i-j-k

Para materiales isotrópicos:

$$E_{11} = E_{22} = E / (1 - \nu^2)$$

$$E_{12} = E_{21} = \nu E / (1 - \nu^2)$$

$$E_{33} = E (1 - \nu) / [2 (1 - \nu^2)]$$

E = módulo de elasticidad del elemento i-j-k

ν = módulo de Poisson del elemento i-j-k

Para la deducción de la matriz $[k]$, se acepta que el desplazamiento (D) en cualquier punto (X, Y) del elemento i-j-k varía linealmente; esta hipótesis convierte al método en un procedimiento aproximado, por lo que para obtener con mayor precisión los resultados, será necesario refinar la malla de elementos finitos disminuyendo el tamaño de cada elemento.

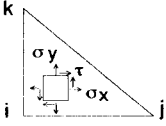
$$D_x = a X + b Y + c$$

$$D_y = d X + e Y + f$$

Donde a, b, c, d, e y f son constantes ($\{C\}$) que dependen de las coordenadas de cada elemento finito i-j-k, así como de los desplazamientos de sus nudos. Por ejemplo, en el nudo "i": $D_{xi} = D_1 = a X_i + b Y_i + c$, $D_{yi} = D_2 = d X_i + e Y_i + f$; en el nudo "j": $D_{xj} = D_3 = a X_j + b Y_j + c$; $D_{yj} = D_4 = d X_j + e Y_j + f$; en el nudo "k": $D_{xk} = D_5 = a X_k + b Y_k + c$, $D_{yk} = D_6 = d X_k + e Y_k + f$. En general, $\{D\} = [A] \{C\}$; donde $[A]$ es una matriz de 6×6 elementos que dependen de las coordenadas de los nudo i, j, k.

Una vez obtenido los desplazamientos nodales $\{D\}$, mediante el método directo de rigidez, los esfuerzos ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) en el centro de gravedad del elemento i-j-k se obtienen mediante la expresión:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} E_{11} a_1 & E_{12} b_1 & E_{11} a_1 & E_{12} b_2 & E_{11} a_3 & E_{12} b_3 \\ E_{21} a_1 & E_{22} b_1 & E_{21} a_2 & E_{22} b_2 & E_{21} a_3 & E_{22} b_3 \\ E_{33} b_1 & E_{33} a_1 & E_{33} b_2 & E_{33} a_2 & E_{33} b_3 & E_{33} a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$



Nudo

D1

D2

D3

D4

D5

D6

i

j

k

PUBLICACIONES RECIENTES

Blumen-Ypenburg-Monks

Nuestros niños son talentosos, 1997, 124 pp.

Gisela Canepa Koch

Máscara: Transformación e identidad en los andes, 1998, 352 pp.

Pinkas Flint Blanck

La revolución del Derecho de Seguros y del Derecho Laboral - Genética y Derecho - El proyecto Genoma Humano - Biblioteca de Derecho Contemporáneo N° 8, 1997, 288 pp.

Nicholas Griffiths

La cruz y la serpiente, 1998, 384 pp.

Herbert R. Kells

Procesos de Autoevaluación 1997, 314 pp.

Jeffrey Klaiber

Iglesia, dictaduras y democracia en América Latina 1997, 504 pp.

Juana Pinzas

Metacognición y lectura, 1997, 138 pp.

José de la Puente Radbill

Cuadernos de trabajo de un embajador 1997, 392 pp.

Marcial Rubio, Ana Velasco, Ricardo León Pastor

El Código Civil de 1984, 1998, 588 pp.

Ivan Ruiz Ayala

Poética Vanguardista Westphaleana, 1997, 306 pp.

Harald O. Skar

La gente del Valle Caliente, 1997, 424 pp.

Cecilia Thorne (Editora)

Piaget entre nosotros, 1997, 274 pp.

ANÁLISIS DE EDIFICIOS

Se terminó de imprimir en el mes de marzo de 1998
en los talleres de Servicio Copias Gráficas S.A.
(R.U.C. 10069912), Jorge Chávez 1059
Telefax: 4249693 Lima, 5

Ángel San Bartolomé

ANÁLISIS DE EDIFICIOS

