CAPITULO 6: ANALISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA HIDRAULICA

6.1 Introducción

Si bien es cierto que algunos problemas en Hidráulica son resueltos sólo con el análisis (los problemas de la hidrostática por ejemplo), también lo es que hay numerosos casos en los que tiene que recurrirse a la experimentación. Además muchas estructuras hidráulicas son construidas sólo después que han sido estudiadas en modelos; en el modelo se reproducen naturalmente las características reales del prototipo.

Con el objeto de simplificar las experiencias se usan parámetros adimensionales, como el número de Reynolds por ejemplo. Estos parámetros facilitan también la comunicación entre los experimentadores e investigadores, lo que permite el intercambio de resultados y el avance consiguiente.

6.2 Análisis dimensional

Mediante la técnica del análisis dimensional se puede expresar cualquier magnitud física (velocidad, viscosidad, etc) en función de sólo tres dimensiones fundamentales (L, M, T o L, F, T), y con ello facilitar los aspectos antes enunciados.

Ejemplos de aplicación

Ejemplo 62.- Expresar en términos de las magnitudes fundamentales L, F, T las unidades de masa (m), densidad (ρ) y viscosidad (μ).

$$|m| = \left|\frac{F}{a}\right| = \frac{F}{L\ T^{-2}} = F\ T^2\ L^{-1}$$

$$|\rho| = \left|\frac{\gamma}{g}\right| = \frac{F\ L^{-3}}{L\ T^{-2}} = F\ L^{-4}\ T^2$$

$$|\mu| = \frac{|\tau|}{\left|\frac{dv}{dy}\right|} = \frac{|\tau\ dy|}{|dv|} = \frac{F\ L^{-2} L}{L\ T^{-1}} = F\ T\cdot L^{-2}$$

Procediendo de esta manera es como se ha confeccionado la tabla que se muestra en la página siguiente.

Ejemplo 63.- Encontrar una fórmula que dé la distancia recorrida por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que la distancia S depende del peso del cuerpo W, de la gravedad g y del tiempo T.

$$S = f\ (W,\ g,\ T)$$

$$S = K\ W^a\ g^b\ T^c$$

K es un coeficiente adimensional que se puede determinar experimentalmente (vale 1/2).

Unidades de diferentes magnitudes en términos de las fundamentales

Magnitud	Unidades (F L T)	Unidades (M L T)
área	L^2	L^2
volumen	L^3	L^3
velocidad	$L\ T^{-1}$	$L\ T^{-1}$
aceleración	$L\ T^{-2}$	$L\ T^{-2}$
velocidad angular (rad/sg)	T^{-1}	T^{-1}
fuerza	F	$M\ L\ T^{-2}$
masa	$F\ T^2\ L^{-1}$	M
peso específico	$F\ L^{-3}$	$M\ L^{-2}\ T^{-2}$
densidad	$F\ L^{-4}\ T^2$	$M\ L^{-3}$
presión	$F\ L^{-2}$	$M\ L^{-1}\ T^{-2}$
viscosidad	$F\ T\ L^{-2}$	$M\ L^{-1}\ T^{-1}$
viscosidad cinemática	$L^2\ T^{-1}$	$L^2\ T^{-1}$
módulo de elasticidad	$F\ L^{-2}$	$M\ L^{-1}\ T^{-2}$
potencia	$F\ L\ T^{-1}$	$M\ L^2\ T^{-3}$
par	$F\ L$	$M\ L^2\ T^{-2}$
caudal	$L^3\ T^{-1}$	$L^3\ T^{-1}$
esfuerzo de corte	$F\ L^{-2}$	$M\ L^{-1}\ T^{-2}$
tensión superficial	$F\ L^{-1}$	$M\ T^{-2}$
peso	F	$M\ L\ T^{-2}$

La ecuación escrita debe ser dimensionalmente homogénea:

$$F^0\ L^1\ T^0 = (F^a)(L^b\ T^{-2b})(T^c)$$

$$= (F^a)(L^b)(T^{-2b+c})$$

es decir,
$$0 = a$$
$$1 = b$$
$$0 = -2b + c$$

de donde,
$$a = 0 \qquad S = K\ W^0\ g^1\ T^2$$
$$b = 1$$
$$c = 2 \qquad S = K\ g\ T^2$$

se observa que S no es función del peso del cuerpo W.

Ejemplo 64.- El número de Reynolds (R_e) es una función de la densidad viscosidad y velocidad del fluido, así como de una longitud característica. Establecer la expresión del R_e mediante el análisis dimensional.

$$R_e = f(\rho, \mu, V, L)$$

$$R_e = K \rho^a \mu^b V^c L^d$$

ecuación dimensional:

$$F^o L^o T^o = (F L^{-4} T^2)^a (F T L^{-2})^b (L T^{-1})^c (L)^d$$

$$= (F^a L^{-4a} T^{2a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c T^{-c}) (L^d)$$

$$= F^{a+b} L^{-4a-2b+c+d} T^{2a+b-c}$$

es decir:

$$a + b = 0$$

$$-4a - 2b + c + d = 0$$

$$2a+b-c = 0$$

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se expresan tres incógnitas en función de la cuarta:

$a = -b$
$d = -b$
$c = -b$

$$R_e = K \rho^{-b} \mu^b V^{-b} L^{-b}$$

$$R_e = K \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)^{-b}$$

los valores K y b tienen que hallarse experimentalmente (valen $K = 1$, $b = -1$).

Ejemplo 65.- Suponiendo que la fuerza de arrastre ejercida sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida es función de ρ, μ, V y una longitud característica del cuerpo L, hallar la ecuación general.

$$F = f(\rho, \mu, L, V)$$

$$F = K \rho^a \mu^b L^c V^d$$

ecuación dimensional:

$$F^1 L^o T^o = (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c)(L^d T^{-d})$$

$$= (F^{a+b})(L^{-4a-2b+c+d})(T^{2a+b-d})$$

es decir:

$$a + b = 1$$

$$-4a - 2b + c + d = 0$$

$$2a + b - d = 0$$

de donde:

$a = 1-b$
$d = 2-b$
$c = 2-b$

$$F = K \rho^{1-b} \mu^b L^{2-b} V^{2-b}$$

$$= K \rho \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)^{-b} V^2 L^2$$

$$= 2 K \rho \left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)^{-b} \frac{V^2}{2} L^2$$

$$= (2 K R_e^{-b}) \rho A \frac{V^2}{2}$$

$$F = C_D \rho A \frac{V^2}{2}$$

6.3 El teorema π de Buckingham

Es muy útil cuando las magnitudes físicas que intervienen en el fenómeno son 4 ó más de 4. No va a ser presentada aquí la teoría acerca de este teorema sino más bien la forma cómo se aplica en casos específicos.

Cuando en el fenómeno físico intervienen n magnitudes físicas q, de las cuales se escogen 3 como básicas, entonces:

$$f_1 (q_1, q_2, \dots q_n) = 0$$

que puede reemplazarse por:

$$\phi (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{n-3}) = 0$$

donde cada π es un grupo adimensional que sólo depende de 4 magnitudes físicas q.

Ejemplos de aplicación

Ejemplo 66.- El mismo problema del ejemplo 63.

1º se escriben las 4 magnitudes físicas q;

$$f_1 (S, W, g, T) = 0$$

y sus dimensiones:

S ... L
W ... F
g ... $L T^{-2}$
T ... T

2º se escogen 3 de estas magnitudes como básicas:

* sin que haya ninguna sin dimensiones
* ni 2 que tengan las mismas dimensiones
* en las dimensiones de estas 3 magnitudes básicas deben estar comprendidas las 3 fundamentales (F, L, T).

se escogen aquí S, W, T. El número de grupos π es: 4-3 = 1.

3º se escribe el primer grupo π:

$$\pi_1 = S^{a1} W^{b1} T^{c1} g$$

(en este caso es el único).

4º se determinan los exponentes desconocidos en cada π mediante el análisis dimensional.

$$F^o L^o T^o = (L^{a_1})(F^{b_1})(T^{c_1})(L\,T^{-2})$$
$$= (L^{a_1+1})(F^{b_1})(T^{c_1-2})$$

$$0 = a_1+1$$
$$0 = b_1$$
$$0 = c_1-2$$

de donde, $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 2$

$$\pi_1 = S^{-1}\, W^0\, T^2\, g = \frac{W^o\, T^2\, g}{S} = \frac{T^2\, g}{S}$$
$$S = \frac{1}{\pi_1}\, T^2\, g$$
$$S = K\, g\, T^2$$

<u>Ejemplo 67</u>.- El mismo problema del ejemplo 65.

1º $f_1\ (F,\ \rho,\ \mu,\ L,\ V) = 0$

$F \ldots F$

$\rho \ldots F\, T^2\, L^{-4}$

$\mu \ldots F\, T\, L^{-2}$

$L \ldots L$

$V \ldots L\, T^{-1}$

2º se escogen como básicas L, V, ρ. Número de grupos π = 5-3 = 2

3º $\pi_1 = (L^{a_1})(V^{b_1})(\rho^{c_1})\ (F)$

$$F^o L^o T^o = (L^{a_1})(L^{b_1}\, T^{-b_1})(F^{c_1}\, T^{2c_1}\, L^{-4c_1})\ (F)$$
$$= (L^{a_1+b_1-4c_1})\ (F^{c_1+1})\ (T^{-b_1+2c_1})$$

$$0 = a_1 + b_1 - 4c_1$$
$$0 = c_1+1$$
$$0 = -b_1 + 2c_1$$

de donde, $a_1 = -2$, $b_1 = -2$, $c_1 = -1$

$$\pi_1 = L^{-2}\, V^{-2}\, \rho^{-1}\, F$$
$$\pi_1 = \frac{F}{L^2\, V^2\, \rho}$$

$$\pi_2 = (L^{a_2})\ (V^{b_2})\ (\rho^{c_2})\ \mu$$

$$F^o L^o T^o = (L^{a_2})(L^{b_2}\, T^{-b_2})(F^{c_2}\, T^{2c_2}\, L^{-4c_2})(F\, T\, L^{-2})$$

$$= (L^{a_2 + b_2 - 4c_2 - 2})\ (F^{c_2+1})\ (T^{-b_2 + 2c_2+1})$$

$$0 = a_2 + b_2 - 4c_2 - 2$$
$$0 = c_2 + 1$$
$$0 = -b_2 + 2c_2 + 1$$

de donde, $a_2 = -1$ $\qquad \pi_2 = L^{-1}\ V^{-1}\ \rho^{-1}\ \mu$

$b_2 = -1$

$c_2 = -1$ $\qquad \pi_2 = \dfrac{\mu}{\rho\ V\ L}$

regla: cualquier número π puede ser sustituído por una potencia del mismo, incluyendo -1.

$$\therefore \quad \pi_2 = \frac{\rho\ V\ L}{\mu}$$
$$\pi_2 = R_e$$

4º $\quad \phi\ (\pi_1, \pi_2) = 0$

$$\phi\ (\frac{F}{L^2\ V^2\ \rho},\ R_e) = 0$$

regla: cualquier π puede expresarse como función de otros π.

$$\therefore \quad \frac{F}{L^2\ V^2\ \rho} = f\ (R_e)$$
$$F = K\ R_e\ L^2\ V^2\ \rho$$
$$F = (2\ K\ R_e)\ \rho\ L^2\ \frac{V^2}{2}$$
$$F = C_D\ .\ \rho\ A\ \frac{V^2}{2}$$

Comentario.- Conviene reseñar algunas reglas útiles del teorema.

a) si una de las magnitudes q es adimensional constituyè un número π sin tener que seguir el camino ordinario.

b) si 2 de las magnitudes q tienen las mismas dimensiones su cociente es un número π.

c) cualquier número π puede ser sustituído por una potencia del mismo, incluyendo -1.

d) cualquier número π puede sustituirse por su producto por una constante numérica.

e) cualquier π puede expresarse como función de otros π.

Ejemplo 68.- Desarrollar una expresión que de la pérdida de carga en una tubería horizontal para un flujo permanente, turbulento, incompresible.

La pérdida de carga viene dada por una disminución de la presión (Δp) y constituye una medida de la resistencia al flujo. Esta resistencia es función de D, μ, ρ, L, V y k, siendo $k = \varepsilon/D$ la rugosidad relativa adimensional.

1º $f_1\ (\Delta p,\ D,\ \mu,\ \rho,\ L,\ V,\ k) = 0$

Δp ... $F\ L^{-2}$

D ... L

μ ... $F\ T\ L^{-2}$

ρ ... $F\ T^2\ L^{-4}$

L ... L

V ... $L\ T^{-1}$

k ... s/u

2º se escogen como básicas D, V, ρ. Número de grupos π = 7-3 = 4.

3º $\pi_1 = (D^{a_1})\ (V^{b_1})\ (\rho^{c_1})\ (\Delta p)$

desarrollando:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho\ V^2}$$

$$\pi_2 = (D^{a_2})\ (V^{b_2})\ (\rho^{c_2})\ (\mu)$$

desarrollando:

$$\pi_2 = \frac{\rho\ V\ D}{\mu} = R_e$$

$$\pi_3 = (D^{a_3})\ (V^{b_3})\ (\rho^{c_3})\ (L)$$

desarrollando:

$$\pi_3 = \frac{L}{D}$$

$$\pi_4 = k = \frac{\varepsilon}{D}$$

4º $\phi\ (\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4) = 0$

$$\phi\ \left(\frac{\Delta p}{\rho\ V^2},\ R_e,\ \frac{L}{D},\ \frac{\varepsilon}{D}\right) = 0$$

$$\frac{\Delta p}{\rho\ V^2} = f_2\ \left(R_e,\ \frac{L}{D},\ \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{2}{2} \cdot f_2\ \left(R_e,\ \frac{L}{D},\ \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Por experiencia se sabe que la caída de presión es proporcional a la prime ra potencia de $\frac{L}{D}$, es decir:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} \cdot 2\, f_3\, (R_e, \frac{\varepsilon}{D})$$

el tercer factor se designa con f = coeficiente de fricción,

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = f\, \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

usualmente se expresa:

$$h_f = f\, \frac{L}{D}\, \frac{V^2}{2g} \quad \ldots \text{ ecuación de Darcy-Weisbach}$$

h_f ... pérdida de carga por fricción (m)

f ... coeficiente de fricción (s/v) función de R_e y $\frac{\varepsilon}{D}$

L ... longitud de la tubería (m)

D ... diámetro (m)

V ... velocidad media (m/sg)

g ... gravedad (m/sg^2)

6.4 Semejanza hidráulica

6.4.1 Semejanza geométrica

Existe semejanza geométrica entre modelo y prototipo cuando las relaciones entre las dimensiones homólogas son iguales:

$$\frac{L_m}{L_p} = L_r$$

$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{L^2_m}{L^2_p} = L^2_r$$

6.4.2 Semejanza cinemática

Existe semejanza cinemática entre modelo y prototipo si:

1º las trayectorias de partículas homólogas son geométricamente semejantes;

2º las relaciones entre las velocidades de las partículas homólogas son iguales.

Relaciones de velocidad:

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\frac{L_m}{T_m}}{\frac{L_p}{T_p}} = \frac{L_m\, T_p}{L_p\, T_m} = \frac{L_r}{T_r}$$

de aceleración:

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{\frac{L_m}{T^2_m}}{\frac{L_p}{T^2_p}} = \frac{L_m \cdot T_p^2}{L_p \cdot T_m^2} = \frac{L_r}{T_r^2}$$

de caudal:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{\frac{L^3_m}{T_m}}{\frac{L^3_p}{T_p}} = \frac{L^3_m \cdot T_p}{L^3_p \cdot T_m} = \frac{L_r^3}{T_r}$$

6.4.3 Semejanza dinámica

Entre modelo y prototipo, semejantes geométrica y cinemáticamente existe semejanza dinámica cuando las relaciones entre las fuerzas homólogas son iguales.

En general, las fuerzas existentes son las fuerzas viscosas, gravitatoria elásticas, debidas a la presión y debidas a la tensión superficial.

El ingeniero que ensaya un modelo hidráulico estudia únicamente las fuerzas predominantes. Felizmente, en la mayoría de los problemas con líquidos llega a predominar sólo una fuerza de entre las mencionadas, aparte de la fuerza de inercia. Dicha fuerza puede ser la viscosa, la gravitatorias o la elástica.

La consideración de la fuerza predominante se hace a través de un parámetro adimensional. Estos parámetros son los que a continuación se deducen.

Número de Reynolds.- Encierra el efecto de la viscosidad y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y viscosidad.

$$R_e = \frac{m\ a}{\tau\ A} = \frac{m\ a}{\mu \frac{dv}{dy} \cdot A} = \frac{\rho\ L^2\ V^2}{\mu \frac{V}{L}\ L^2} = \frac{\rho\ V\ L}{\mu} = \frac{V\ L}{\nu}$$

L es una longitud característica.
En tuberías se usa generalmente el diámetro (D).

Número de Froude.- Encierra el efecto de la gravedad y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y gravitatoria.

$$\frac{m\ a}{m\ g} = \frac{\rho\ L^2\ V^2}{\rho\ L^3\ g} = \frac{V^2}{gL}$$

a la raíz cuadrada de esta expresión se llama número de Froude:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

L es una longitud característica.
En canales se usa el tirante de agua (Y).

Número de Euler.- Encierra el efecto de la presión y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y presión.

$$E_\mu = \frac{m\,a}{p\,A} = \frac{\rho L^3 \cdot L\,T^{-2}}{p\,L^2} = \frac{\rho L^2 \cdot V^2}{p\,L^2} = \frac{\rho V^2}{p}$$

Número de Mach.- Encierra el efecto de la compresibilidad del fluido y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y elástica.

$$\frac{m\,a}{E\,A} = \frac{\rho L^2 V^2}{E\,L^2} = \frac{\rho V^2}{E}$$

a la raíz cuadrada de esta expresión y un arreglo se llama número de Mach:

$$M = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}}$$

Número de Weber.- Encierra el efecto de la tensión superficial y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y tensión superficial.

$$W = \frac{m\,a}{\sigma L} = \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma}$$

Comentario.- Como ya se insinuara, en los problemas de interés del ingeniero civil predomina por lo general una fuerza, siendo esta fuerza unas veces la viscosa otras la gravitatoria. Conviene entonces subrayar que deberá verificarse en el modelo y el prototipo el mismo R_e si en el fenómeno que se estudia predomina la viscosidad, o el mismo F si predomina la gravedad.

6.5 Aplicaciones

6.5.1 En sistemas a presión

Se sabe que en los sistemas a presión predomina el efecto viscoso, por lo que deberá verificarse:

$$R_{e_m} = R_{e_p}$$

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}$$

$$\frac{V_r L_r}{\nu_r} = 1$$

además: $$V_r = \frac{\nu_r}{L_r}$$

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r^2}{\nu_r}$$

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} = \frac{L_r \nu_r^2}{L_r^4} = \frac{\nu_r^2}{L_r^3}$$

$$Q_r = A_r V_r = L_r^2 \frac{\nu_r}{L_r} = \nu_r L_r$$

$$F_r = m_r a_r = \rho_r L_r^3 \frac{\nu_r^2}{L_r^3} = \nu_r^2 \rho_r$$

$$p_r = \frac{F_r}{L_r^2} = \frac{\nu_r^2 \rho_r}{L_r^2}$$

El número de Reynolds se usa como el criterio de semejanza en la prueba de modelos de naves aéreas, cuerpos sumergidos, medidores de gasto, transiciones, etc, en los cuales las características del flujo están sujetas a efectos viscosos. Cuanto menor es el R_e mayor es el efecto de la viscosidad.

6.5.2 En sistemas a superficie libre

Se sabe que en los sistemas a superficie libre predomina la fuerza gravitatoria, por lo que deberá verificarse:

$$F_m = F_p$$

$$\frac{V_m}{\sqrt{g\, L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g\, L_p}}$$

$$\frac{V_r}{\sqrt{g_r\, L_r}} = 1$$

En lo que sigue se supondrá que modelo y prototipo ocurren en el mismo lugar, $g_r = 1$.

además:

$$V_r = L_r^{1/2}$$

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = L_r^{1/2}$$

$$a_r = g_r = 1$$

$$Q_r = A_r V_r = L_r^2 L_r^{1/2} = L_r^{5/2}$$

$$F_r = m_r a_r = \rho_r L_r^3 g_r = \gamma_r L_r^3$$

El número de Froude se usa como el criterio de semejanza en la prueba de modelos de canales, vertederos, salto hidráulico, compuertas, ondas, etc, en los cuales el efecto viscoso es escaso y la fuerza de gravedad la más importante. Cuanto menor es el F mayor es el efecto de la gravedad.

6.5.3 Asuntos conexos

El número de Euler.- Ciertamente el número de Euler rige en aquellos fenómenos donde son preponderantes los cambios de presión Δp y las fuerzas viscosas y gravitacionales pierden importancia. Esto ocurre en problemas de flujo bidimensional, sobre todo.

Es decir, $E_\mu = \dfrac{\rho V^2}{\Delta p}$

Se llama coeficiente de presión (apartado 5.4) a la relación:

$$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho V^2}{2}}$$

de donde resulta que: $C_p = \dfrac{2}{E_\mu}$

Por otro lado, se denomina número de cavitación (σ) a la forma que adopta el coeficiente de presión cuando se utiliza un origen de referencia para medir la presión (p_0); es decir, $\sigma = \dfrac{p - p_0}{\frac{\rho V^2}{2}}$ .... (57)

unas veces se usa como presión de referencia la de vaporización:

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{\rho V^2}{2}}$$

otras veces la de cavitación,

$$\sigma_c = \frac{p - p_c}{\frac{\rho V^2}{2}}$$

El número de cavitación se emplea como parámetro adimensional para establecer la semejanza entre modelo y prototipo de las máquinas hidráulicas (bombas y turbinas).

El número de Mach.- Este parámetro toma en consideración la compresibilidad del fluido. En ingeniería hidráulica, el único fenómeno donde se producen valores muy altos de presión que obligan a considerar la compresibilidad del agua es el del golpe de ariete. Pero este fenómeno es mejor estudiado analíticamente, de modo que bien puede decirse que en la hidráulica no se emplea nunca el número de Mach, el que tiene su mejor aplicación en el estudio que se hace de naves aéreas en el túnel supersónico.

El número Weber .- Este parámetro se usa en ensayos de ondas capilares en canales pequeños y en el estudio del movimiento capilar del agua en los suelos por lo que bien puede decirse que no tiene mayor importancia en los problemas de la hidráulica.

Modelaje.- En los proyectos hidráulicos hay a veces estructuras para diseñar las cuales no hay fórmulas ni gráficas disponibles, de modo que el único medio para el dimensionamiento apropiado de tales estructuras es su estudio en modelo.

Para la construcción del modelo de algunas estructuras hidráulicas se requiere de un espacio grande. La primera decisión a tomar se refiere entonces a la escala, siendo el costo y el espacio disponible los factores más importantes en la decisión.

En cuanto a la escala misma se procura siempre que la semejanza geométrica sea exacta, incluso en lo que se refiere al tamaño de las asperezas. Existen ocasiones sin embargo en las que procediendo así resultan en el modelo dimensiones demasiado pequeñas para resultados satisfactorios, de modo que en tales circunstancias se hace necesario recurrir a una escala vertical diferente a la escala horizontal, dando lugar a un modelo distorsionado. - Generalmente se recurre al modelo distorsionado en estructuras fluviales, en las que las dimensiones horizontales son muy grandes en próporción a las dimensiones verticales.

6.6 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 69.- Se ha construido un modelo de tórpedo a escala 1:4. Se espera que el prototipo se mueva a una velocidad de 6 m/sg en agua a 15°C. ¿Cuál debe ser la velocidad en el modelo, si

a) el ensayo se hace en un canal de corriente a 15°C; y
b) el ensayo se hace en un túnel de viento a 27°C y una presión de 20 atmósferas?.

Se trata de un cuerpo sumergido, predomina la fuerza viscosa, por lo tanto hay que usar el mismo R_e en modelo y prototipo.

a) $R_{e_m} = R_{e_p}$

$$\frac{V_r\ L_r}{\nu_r} = 1$$

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$V_m = 4\ V_p = 24\ m/sg.$$

b) ν_{agua} a 15°C $= 1.13 \times 10^{-6}\ m^2/sg$

μ aire a 27°C $= 1.88 \times 10^{-6}\ \frac{kg\ sg}{m^2}$

ρ aire a 27°C $= \frac{p}{g\ R_o\ T} = 2.41\ \frac{kg\ sg}{m^4}$

νaire a 27°C $= \frac{\mu}{\rho} = 7.8 \times 10^{-[illegible]}\ m^2/sg$

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r} = \frac{\frac{\nu_m}{\nu_p}}{\frac{L_m}{L_p}} = 2.75$$

$$V_m = 2.75\ V_p = 16.5\ m/sg$$

Ejemplo 70.- Un barco cuyo casco tiene una longitud de 140 m ha de moverse a 7.50 m/sg. ¿A qué velocidad debe remolcarse en agua un modelo construido a una escala 1:30?

Se trata de un cuerpo en superficie libre, predomina la fuerza gravitatoria, por lo tanto hay que usar el mismo F en modelo y prototipo.

$$\frac{V_r}{\sqrt{g_r\ L_r}} = 1$$

$$V_r = \sqrt{g_r\ L_r} = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{30}} = 0.18$$

$$V_m = 0.18\ V_p = 1.37\ m/sg.$$