# Capítulo 6

# DERIVADAS Y FUNCIONES PRIMITIVAS

Dos conceptos importantes nos pueden dar la idea de lo que es la derivada de una función: la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto y la velocidad de un móvil.

## 6.1. RECTA TANGENTE A UNA CURVA

La Geometría Euclideana establece que la recta $T$ tangente a una circunferencia en un punto $P$ de ella, es la recta que pasando por $P$ es perpendicular al diámetro con extremo $P$. Esta idea se puede extender, haciendo uso de nuestra intuición, para cualquier curva en un punto específico de ella. Esto se puede lograr de la siguiente manera:

Sea $C$ una curva y $P$ un punto fijo de ella; tomemos un punto $Q$ de $C$ diferente de $P$ (figura 6.2) y tracemos la recta $S$ que pasa por $P$ y $Q$, llamada recta secante. Podemos definir la *recta tangente a C en P* como la recta cuya posición es límite de la recta secante $S$ cuando $Q$ se acerca a $P$ a lo largo de la curva $C$.

El problema que se presenta es el de definir la ecuación de la recta tangente conocida la ecuación $y = f(x)$ de la curva y el punto $P = (x_1, f(x_1))$ de ella. Con los conocimientos que tenemos sobre límites y rectas podemos resolverlo inmediatamente. En efecto, se sabe que una recta queda determinada por un punto y su pendiente; conocido el punto $P$, faltaría determinar la pendiente de la recta tangente.

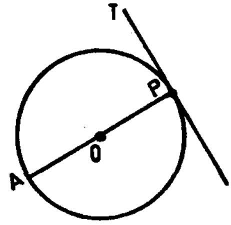



Fig. 6.1

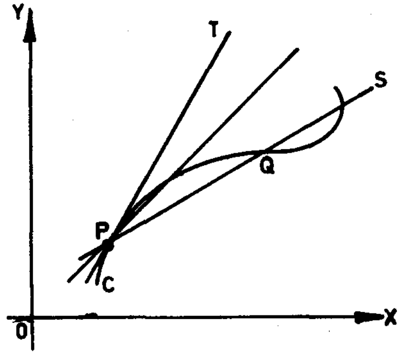



Fig. 6.2

De la discusión anterior podemos inferir que la pendiente de la recta tangente será el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por $P$ y $Q$ (donde $Q$ es un punto de la curva $C$), cuando $Q$ se acerca a $P$ a lo largo de $C$.

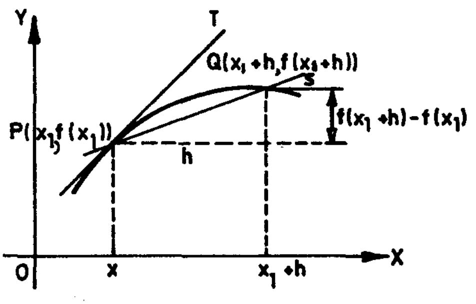



Fig. 6.3

La pendiente de la recta secante $S$ que pasa por los puntos $P\ (x_1, f\ (x_1))$ y $Q\ (x_1 + h, f\ (x_1 + h))$ es:

$$m_s = \frac{f\ (x_1 + h) - f\ (x_1)}{h}$$

Por otro lado, observemos que cuando $Q$ se acerca a $P$, $h$ se acerca a 0, y viceversa, si $h$ se acerca a 0, $Q$ se acerca a $P$. Siendo la recta tangente $T$ la posición límite de la recta secante cuando $Q$ se acerca a $P$, podemos establecer, por definición, *pendiente* $m_T$ de $T$ como:

$$m_T(x_1) = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

si es que este límite existe.

Luego, la *ecuación de la recta tangente $T$ en el punto $P = (x_1, f(x_1))$* es, también por definición, la recta cuya ecuación es:

$$y - f(x_1) = m_T(x_1)(x - x_1) .$$

**Ejemplo 6.1.** Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $P\ (2, 4)$.

Se tiene:

$$x_1 = 2$$

$$f(x_1) = f(2) = 4$$

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^2 = x_1^2 + 2x_1h + h^2$$

$$= 4 + 4h + h^2$$

$$m_T(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 .$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 4(x - 2)$ .

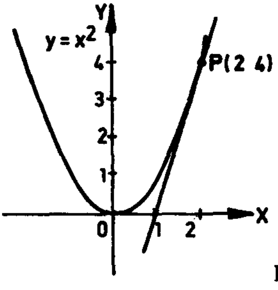



Fig. 6.4

**Ejemplo 6.2.** Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $y = x^3$ en el punto $P\ (x_1\ ,\ x_1^3)$. ¿Cuál es la ecuación cuando $x_1 = 2$ y $x_1 = 4$?

Se tiene que:

$$f\ (x_1) = x_1^3$$

$$f\ (x_1 + h) = (x_1 + h)^3 = x_1^3 + 3x_1^2\ h + 3x_1h^2 + h^3$$

$$m_T\ (x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x_1 + h) - f\ (x_1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2h + 3x_1h^2 + h^3 - x_1^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x_1^2 + 3x_1h + h^2) = 3x_1^2.$$

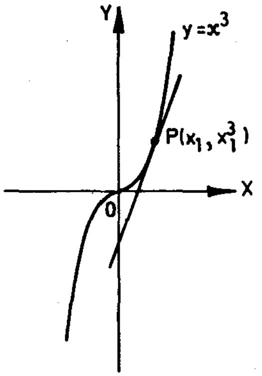



Fig. 6.5

Luego, la ecuación de la recta tangente en el punto $P\ (x_1\ ,\ y_1)$ es:

$$y - x_1^3 = 3x_1^2\ (x - x_1)\ .$$

Cuando $x_1 = 2$, el punto $P$ es $(2, 8)$, $m_T(x_1) = 3\ (2)^2 = 12$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 8 = 12(x - 2)\ .$$

Cuando $x_1 = 4$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 64 = 48(x - 4)\ .$$

**Ejemplo 6.3.** Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f\ (x) = \sqrt{x}$ en el punto $P = (2, \sqrt{2})$.

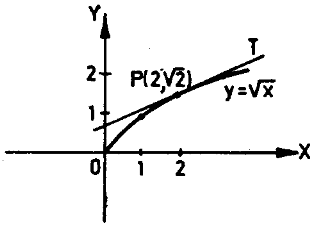



Fig. 6.6

La pendiente de la recta tangente en $P$ es:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\,(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente en $P$ es:

$$y - \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ (x - 2).$$

## 6.2. VELOCIDAD INSTANTANEA

Consideremos un móvil que se desplaza a lo largo de una línea recta $E$ en la cual se considera un sistema coordenado. Sea $s = f\ (t)$ la posición del móvil en el tiempo $t$, donde $t$ se toma no negativo. Supongamos que en el tiempo $t_1$ el móvil tiene la posición $f\ (t_1)$ y que

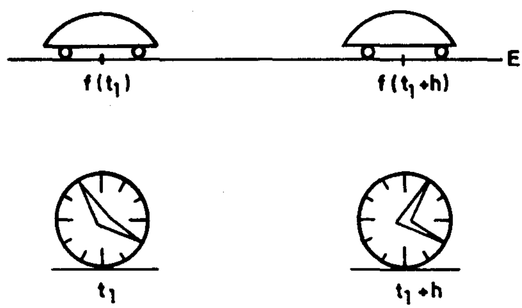



Fig. 6.7

en el tiempo $t_1 + h$, $h \neq 0$, el móvil tiene la posición $f\ (t_1 + h)$; luego, en el intervalo de tiempo $[t_1\ ,\ t_1 + h]$ el móvil ha recorrido $f\ (t_1 + h) - f\ (t_1)$.

Se define la *velocidad promedio* o *velocidad media* en el intervalo $[t_1\ ,\ t_1 + h]$, como la razón:

$$v_m = \frac{f\ (t_1 + h) - f\ (t_1)}{h}$$

La velocidad media de un móvil se define entonces, como el cambio de posición o desplazamiento del móvil por la unidad de tiempo y se expresa en unidades de distancia dividida entre unidades de tiempo: km/hora, m/seg., etc.

La velocidad promedio en un intervalo de tiempo dado, no nos permite conocer lo que sucede con el movimiento en cada instante $t$ perteneciente al intervalo. Por ejemplo, si un móvil parte del punto $O$, recorre una cierta distancia y luego regresa nuevamente a $O$ durante un intervalo de tiempo $h$, entonces la velocidad promedio durante el intervalo $h$ es cero puesto que el desplazamiento es nulo en dicho intervalo. Sin embargo como en el caso de la recta tangente, podemos recurrir a nuestra intuición para conocer que sucede por ejemplo, en el tiempo $t = t_1$ del intervalo; para ello tomemos la velocidad promedio en intervalos $[t_1\ ,\ t_1 + h]$ cada vez más pequeños, es decir haciendo que $h$ se acerque a 0. El límite de las velocidades promedio cuando $h$ tiende a 0 podemos tomarlo como una buena información de lo que ocurre en $t = t_1$ .

Este límite se conoce como la *velocidad instantánea* o *velocidad* en $t = t_1$ y de una manera formal se puede definir por el límite:

$$v\ (t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (t_1 + h) - f\ (t_1)}{h} \quad , \text{ siempre que éste exista.}$$

**Ejemplo 6.4.** Un vehículo se mueve en línea recta según la ley $f\ (t) = 2t + 3$.

a) ¿Cuál es su posición cuando $t = 0$?

b) ¿Cuál es su posición cuando $t = 3$?

c) ¿Cuál es la velocidad promedio en el intervalo [3, 4]?

d) ¿Cuál es la velocidad instantánea en el tiempo $t = 3$?

a) La posición del móvil cuando $t = 0$ es:

$f\ (0) = 2(0) + 3 = 3$

b) La posición del móvil cuando $t = 3$ es:

$f\ (3) = 2(3) + 3 = 9$

c) La velocidad promedio en el intervalo [3, 4] es:

$$\frac{f\ (4) - f\ (3)}{4 - 3} = \frac{11 - 9}{1} = 2\ .$$

Si $f\ (t)$ se da en metros y $t$ en segundos, por ejemplo, la velocidad promedio en [3, 4] es 2 mts. por segundo (2 m/seg).

d) La velocidad instantanea en $t = 3$ es:

$$v\ (3) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (3 + h) - f\ (3)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2\ (3 + h) + 3 - [2(3) + 3]}{h} = 2\ .$$

**Ejemplo 6.5.** Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba, siendo la ley del movimiento: $f\ (t) = 15t - 5t^2$ , donde $f\ (t)$ está dada en metros y $t$ en segundos.

a) ¿Cuál es la posición de la piedra cuando $t = 0$, $t = 1$ seg, $t = 1.5$ seg , $t = 2$ seg , $t = 3$ seg.

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea para cada uno de los valores de $t$ indicados en a)?

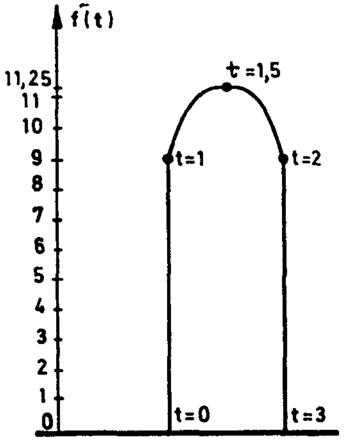



Fig. 6.8

a) Para $t = 0$ seg, la posición es $f\ (0) = 0$ mts.
Para $t = 1$ seg, la posición es $f\ (1) = 10$ mts.
Para $t = 1.5$ seg, la posición es $f\ (1.5) = 11.25$ mts.
Para $t = 2$ seg, la posición es $f\ (2) = 10$ mts.
Para $t = 3$ seg, la posición es $f\ (3) = 0$ mts.

Si tomamos una recta vertical con un sistema coordenado de tal forma que 0 coincide con la posición de donde fue lanzada la piedra entonces podemos obtener la gráfica del movimiento en el intervalo $[0, 3]$ .

b) La velocidad de la piedra en cualquier instante es:

$$v\ (t) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (t + h) - f\ (t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{15\,(t+h) - 5\,(t+h)^2 - 15t + 5t^2}{h} =$$

$$= 15 - 10\,t = 5(3 - 2t\,)$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Luego: | cuando | $t = 0,$ | $v\,(0)$ | $=\ 15$ m/seg. |
| | cuando | $t = 1,$ | $v\,(1)$ | $=\ 5$ m/seg. |
| | cuando | $t = 1.5,$ | $v\,(1.5)$ | $=\ 0$ m/seg. |
| | cuando | $t = 2,$ | $v\,(2)$ | $=\ -5$ m/seg. |
| | cuando | $t = 3,$ | $v\,(3)$ | $=\ -15$ m/seg. |

Se nota que $v\,(0) = 15$ m/seg. es la velocidad con que fue lanzada la piedra. En el ascenso, y en el intervalo $t = 0$ a $t = 1.5$, la velocidad es positiva, mientras que en el descenso, en el intervalo de $t = 1.5$ a $t = 3$, la velocidad es negativa. Cuando la piedra alcanza su máxima altura la velocidad es 0 y cuando la piedra cae, la velocidad es la misma con que fue lanzada pero de signo opuesto.

**Ejemplo 6.6.** Un vehículo se desplaza en línea recta de acuerdo a la siguiente ley de movimiento:

$$s = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 4t \text{ mts}, \qquad \text{siendo } 0 \le t \le 10.$$

a) Describir en forma gráfica el desplazamiento del vehículo en los intervalos [0, 1] [1, 4] , [4, 10].

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea del vehículo para cada valor de $t$?

a) Dando valores a $t$ comprendidos entre 0 y 1 podemos ver que $f$ toma valores comprendidos entre 0 y 1.8 aproximadamente. Para valores de $t$ comprendidos entre 1 y 4, $f\,(t)$ toma valores que van de 1.8 aprox. hasta –2.7 aprox.

Para valores de $t$ en el intervalo [4, 10] , $f\,(t)$ toma valores que van de –2.7 aprox. hasta 123.3 aprox.

Gráficamente podemos representar el movimiento de la siguiente manera.

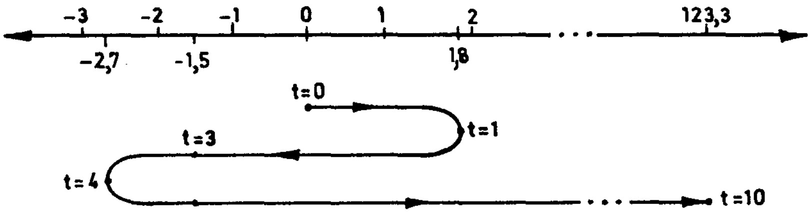



Fig. 6.9

b) Para cada valor de $t$ la velocidad instantánea del vehículo es:

$$v\ (t) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (t + h) - f\ (t)}{h} = t^2 - 5t + 4$$

$$= (t - 1)\ (t - 4)$$

Se observa en el intervalo ]0, 1[, $v(t) < 0$, en ]1, 4[, $v(t) < 0$ y en $t = 1$ y $t = 4$, $v = 0$.

En este ejemplo, como en el anterior, notamos que en los intervalos en donde $v > 0$, los valores de $f\ (t)$ *aumentan cuanto $t$ aumenta,* mientras que los valores de $f\ (t)$ *disminuyen cuando $t$ aumenta si $v < 0$.* Esto ocurre en forma general como veremos más adelante.

La interpretación física a los últimos resultados nos indica que cuando $v > 0$ el vehículo se desplaza en el sentido positivo con respecto al origen, que cuando $v < 0$ el vehículo se mueve en sentido negativo con respecto al origen, y que cuando $v = 0$ el vehículo se detiene.

## 6.3. LA DERIVADA

La determinación de las pendientes de una recta tangente a una curva, y de la velocidad instantánea nos conduce a los límites:

$$m_T\ (x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x_1 + h) - f\ (x_1)}{h} \quad ,$$

(donde $y = f(x)$ representa a la curva y $h \neq 0$)

$$v(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h},$$

(donde $s = f(t)$ representa a la ley del movimiento y $h \neq 0$).

Si por un momento prescindimos de lo que $f$ representa en cada caso, observamos que esta operación de límite es la misma en ambos casos. Esto nos lleva a pensar en la posibilidad de que se pueda tomar esta operación de límite para cualquier función $f$. Este límite toma entonces, un nombre especial el que se introduce de una manera formal en la siguiente definición:

**Definición 6.1.** Dada la función $y = f(x)$, el límite

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ $h \neq 0$, si existe, es llamado *la derivada de f con respecto de x* en $x_1$.

Las notaciones que más se usan para la derivada de $f$ con respecto de $x$ en $x_1$ son:

$$D_x f(x_1), \quad \frac{df}{dx}(x_1), \quad f'(x_1), \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_1}$$

Se usa también la notación delta:

Pongamos $\Delta x = h$ y llamemos:

$\Delta f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

Entonces la derivada aparece como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}$$

Podemos, como una *interpretación geométrica,* decir que la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = x_1$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$. Concepto que estudiamos en la introducción al tratar sobre recta tangente a una curva (fig. 6.3)

**Ejemplo 6.7.** Dada la función definida por $y = x^2 + 2x + 2$.

a) Hallar $f'(2)$
b) Hallar $f'(x)$
c) Hallar $f'(1/2)$
d) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P\ (3, f\ (3))$.

a) $$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 2, \quad f(2) = 2^2 + (2)(2) + 2 = 10$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h) + 2 = h^2 + 6h + 10 .$$

Luego

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h + 10 - 10}{h} = 6$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h + 2) = 2x + 2 .$$

c) Como $f'(x) = 2x + 2$, relación que se cumple para todo $x$, se tendrá que en particular para $x = 1/2$ .

$$f'(1/2) = 2\ (1/2) + 2 = 3 .$$

d) La ecuación de la recta tangente a la curva en $P = (3, f\ (3))$. es:

$$y - f(3) = f'(3)\ (x - 3)$$

como $\quad f(3) = 17 \quad$ y $\quad f'(3) = 8 \quad$ según b) ,

resulta:

$$y - 17 = 8(x - 3) \quad \text{ó} \quad 8x - y - 7 = 0$$

Si se considera una función $y = f(x)$ y se determina su derivada en cualquier valor de $x$, como en la parte b) del ejemplo anterior, se obtiene una nueva función $f'$ definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que se llama *derivada de $f$*. El proceso de hallar $f'$ se llama *derivación.*

La derivada de $f$ se denota con $f'$, ó $D_x f$ ó $\dfrac{df}{dx}$.

La derivada de una función $y = f(x)$ en $x = x_1$ se puede obtener también con el siguiente límite:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \qquad , x \neq x_1 .$$

Expresión que se obtiene haciendo en la definición: $x_1 + h = x$ y observando que $h \to 0$ es equivalente a $x \to x_1$ .

**Ejemplo 6.8.** Hallar $D_x 1$.

La función cuya derivada queremos encontrar es $f(x) = 1$. Luego:

$$D_x 1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Por tanto,

$$D_x 1 = 0$$

En general se obtiene el siguiente resultado:

$D_x c = 0$ para toda constante $c$.

En efecto: $f(x) = c$,

$$D_x\, c = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

**Ejemplo 6.9** Hallar

a) $D_x\, x$

b) $D_x\, x^2$

a) $f(x) = x$ .

$$D_x\, x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 .$$

b) $f(x) = x^2$

$$D_x\, x^2 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x .$$

Un resultado un poco más general es el siguiente:

*Derivada de una potencia:*

$$D_x\, x^n = nx^{n-1} \qquad n \,\varepsilon\, \mathbb{Z}^+$$

Procederemos por inducción para probar esta fórmula.

Se sabe que para $n = 1$ se cumple la igualdad. (Ejemplo 6.9 a)

$$D_x\, x^1 = 1x^{1-1}$$

Asumiremos que para $n = k$, se cumple, es decir que:

$$D_x\, x^k = kx^{k-1}.$$

Ahora demostremos que para $n = k + 1$ también se cumple la igualdad, es decir que:

$$D_x\, x^{k+1} = (k+1)\, x^{(k+1)-1}$$

$$D_x\, x^{k+1} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{k+1} - x^{k+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^k (x+h) - x^k x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h}\, x + \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^k\, h}{h}$$

$$= D_x\, x^k \, .\, x + x^k$$

$$= kx^{k-1}\, x + x^k = (k+1)\, x^{(k+1)-1}.$$

En realidad este resultado es mucho más general. Se puede probar que:

Si $n \in \mathbb{R}$, también se cumple que $D_x x^n = nx^{n-1}$

**Ejemplo 6.10**

a) $D_x\, x^7 = 7x^6$

b) $D_x\, x^{-3} = -3x^{-4}$ con $x \neq 0$

c) $D_x\, x^{1/7} = \dfrac{1}{7}\, x^{-6/7}$ con $x \neq 0$

d) $D_x \sqrt{x} = D_x x^{1/2} = \dfrac{1}{2} x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ , con $x \neq 0$ .

El siguiente teorema es de gran utilidad en el cálculo de las derivadas.

**Teorema 6.1.** Si $f$ y $g$ son dos funciones que tienen derivada, se cumple:

a) $D_x (f \pm g) = D_x f \pm D_x g$ .

b) $D_x (f \, . \, g) = f \, D_x g + g \, D_x f$ .

c) $D_x \dfrac{f}{g} = \dfrac{g \, D_x f - f \, D_x g}{g^2}$ si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in Dom\,(g)$ .

Haremos la demostración de la parte a) dejando como ejercicio las partes b) y c).

a) $D_x (f \pm g) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(f \pm g)(x + h) - (f \pm g)(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} \pm \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$

$= D_x f \pm D_x g$ .

**Ejemplo 6.11.** Pruebe que: $D_x cf = cD_x f$ donde $c$ es una constante y $f$ es una función cualquiera.

Derivando como un producto:

$D_x \, c \, f = cD_x f + fD_x c = cD_x f + (f)(0) = cD_x f$ .

**Ejemplo 6.12.** Hallar

$$D_x\ (x^3 + 3x^{1/2} - 7x + 3)$$

El teorema 6.1 y la fórmula de la derivada de una potencia se pueden aplicar en este caso:

$$D_x\ (x^3 + 3x^{1/2} - 7x + 3) = D_x\ x^3 + D_x\ 3x^{1/2} - D_x\ 7x + D_x\ 3$$

$$= 3x^2 + 3D_x\ x^{1/2} + x^{1/2}\ D_x\ 3 - (7\ D_x\ x + xD_x\ 7) + 0$$

$$= 3x^2 + 3\frac{1}{2}x^{-1/2} + x^{1/2}\ (0) - (7 + x\ (0)) + 0$$

$$= 3x^2 + \frac{3}{2}x^{-1/2} - 7\ .$$

## 6.4. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

**Teorema 6.2.** Para las funciones trigonométricas se tienen los siguientes resultados importantes:

a) $D_x\ sen x = cos\ x$

b) $D_x\ cos x = -sen\ x$

c) $D_x\ tg x = sec^2\ x$

d) $D_x\ ctg\ x = -\ cosec^2\ x$

e) $D_x sec\ x = sec\ x\ tg\ x$

f) $D_x\ cosec\ x = -cosec\ x\ ctg\ x$

Daremos la demostración para las partes a) y c); las otras pueden hacerse como ejercicio.

a) $$D_x\ sen\ x = \lim_{h \to 0} \frac{sen\ (x + h) - sen\ x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\ x\ cos\ h + sen\ h\ cos\ x - sen\ x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\ x\ (cos\ h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h\ cos\ x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\ x\ (cos^2 h - 1)}{h\ (cos\ h + 1)} + \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{h} \lim_{h \to 0} cos\ x$$

$$= -\lim_{h \to 0} sen\ x \, . \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{h} \, . \lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{cosh + 1} +$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen\ h}{h} \, . \lim_{h \to 0} cos\ x = -sen\ x\ (1)\ (0) + 1\ cos\ x = cos\ x\ .$$

c) Por el teorema 6.1 (parte c), se tiene:

$$D_x\ tg\ x = D_x \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{cos\ x\ D_x\ sen\ x - sen\ x\ D_x\ cos\ x}{cos^2\ x}\ .$$

Usando las partes a) y b) de este teorema, resulta:

$$D_x\ tg\ x = \frac{cos^2\ x + sen^2\ x}{cos^2\ x} = \frac{1}{cos^2\ x} = sec^2 x\ .$$

**Observación.** En primer lugar debemos observar que tanto $f$ como su derivada no siempre tienen el mismo dominio y en segundo lugar que los resultados que estamos obteniendo sólo tienen validez para los valores de $x$, para los cuales tiene sentido la igualdad. Así por ejemplo, la función $f\ (x) = x^{2/3}$ tiene por dominio al conjunto de todos los números reales (incluyendo el cero), siendo además continua en todo el dominio. Sin embargo su derivada:

$$D_x\ x^{2/3} = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

no está definida para $x = 0$, siendo este un punto de discontinuidad de la función derivada. Luego la función $f\ (x) = x^{2/3}$ no es derivable en $x = 0$.

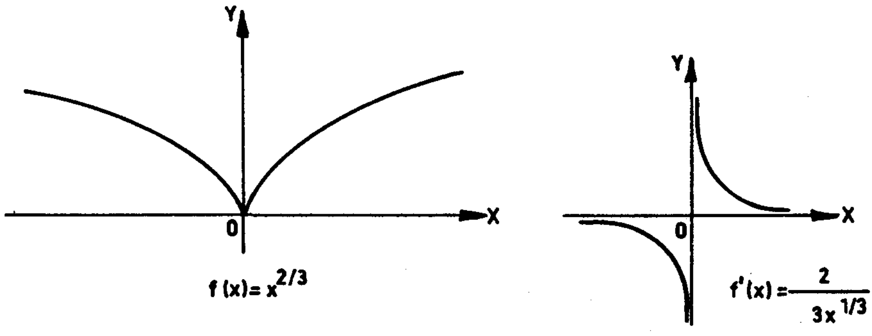



Fig. 6.10

Un croquis de las gráficas de $f$ y $f'$ aparece en la figura 6.10.

EJERCICIOS 6.1 Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1.— $y = 2x^3 + 3x + 1$

2.— $y = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - 7x^{-4}$

3.— $y = \dfrac{2x^2 - 3}{4x - 5}$

4.— $y = \dfrac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 1}$

5.— $y = \dfrac{sen\ x - x\cos x}{\cos x + x\ sen\ x}$

6.— $y = x - sen\ x\cos x$

7.— $y = 2x\ sen\ x + (2 - x^2)\cos x$

8.— $y = \sqrt{x}\ sen\ x + 1$

Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas indicadas en el punto que se especifica en cada caso:

9.— $f(x) = 3x + 1$ en $P(1, f(1))$

10.— $f(x) = x^3 + 5$ en $P(-1, f(-1))$

11.— $f(x) = sen\ x$ en $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

12.— $f(x) = cos\ x$ en $P\left(\frac{\pi}{4}, cos\ \frac{\pi}{4}\right)$.

13.—Determinar la suma de la ordenada y abscisa en el origen de la tangente a la curva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, en el punto de abscisa 1.

14.—Determinar las coordenadas de los puntos de la curva $y = x^2 + 2x + 25$ en los cuales las tangentes pasan por el origen.

15.—Determinar el punto de la curva $f(x) = 2 + 5x - x^2$ en el que la inclinación de la tangente es de 45°.

16.—Encontrar las pendientes de las tangentes a las curvas

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y = x^2$$

en el punto de intersección. Determinar además, el ángulo que forman dichas tangentes.

17.—Hallar los puntos de la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 21x + 5$$

en donde la recta tangente es paralela al eje $X$.

18.—La función $f(t) = 2t^3 - 18t^2 + 30t + 9$ describe el movimiento rectilíneo de un móvil con respecto a un punto fijo. Se pide:

a) determinar para cuales valores de $t$ el móvil se detiene;
b) la distancia total recorrida por el móvil desde $t = 0$ hasta $t = 5$;
c) el intervalo de tiempo durante el cual el móvil se desplaza en sentido contrario al inicial.

19.- Dada la función $y = (a + x)^{3/2} (Ax^2 - Bax + a^2C)$, determinar $A$, $B$ y $C$ de manera que la derivada sea $y' = (a^2 + x^2)\sqrt{a - x}$, (a es una constante arbitraria).

## 6.5. DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA

Con las fórmulas vistas hasta este momento, todavía quedan muchas funciones de uso frecuente cuyas derivadas son difíciles de calcular o simplemente imposible. Por ejemplo, para calcular la derivada de la función $(3x^2 + 4x + 1)^5$ podríamos desarrollar la potencia y luego emplear nuestras fórmulas; pero si la función es $(3x^2 + 4x + 1)^{100}$ el problema, aunque posible por el camino del desarrollo, es prácticamente imposible por lo laborioso. Si la función es *sen* $(2x^2)$, no tenemos otro modo, por el momento, para calcular su derivada que la aplicación de la definición de derivada. Lo mismo sucede con las funciones $\sqrt[6]{x^2 + 3}$, $\cos(3x + 2)$, etc.

Sin embargo, observemos que todas las funciones indicadas en el acápite anterior, pueden ser expresadas como una composición de funciones. Así si $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)^5$, podemos expresar $f = gou$, donde $u = u(x) = 3x^2 + 4x + 1$, y $g = g(u) = u^5$.

Es decir, $f(x) = (gou)(x) = g(u(x)) = g(3x^2 + 4x + 1) = (3x^2 + 4x + 1)^5$.

Si $f(x) = \cos(3x + 2)$, entonces podemos expresar $f = gou$ donde $u = u(x) = 3x + 2$, y $g = g(u) = \cos u$. Entonces $f(x) = (gou)(x) = g(u(x)) = g(3x + 2) = \cos(3x + 2)$.

En los dos ejemplos anteriores, las derivadas de las funciones $u = u(x)$ con respecto a $x$ y las de $g = g(u)$ con respecto a $u$ pueden ser determinadas por medio de las fórmulas de derivación tratadas anteriormente. El teorema que se enuncia a continuación, permite calcular la derivada de una función compuesta o función de función, como a veces se denomina, en términos de las derivadas de las funciones componentes.

**Teorema 6.3.** Sean $g$ una función de $u$ y $u$ a su vez una función de $x$, ambas con derivada. Entonces la derivada de la función compuesta de $g$ y $u$, es decir $f = gou$ está dada por la expresión.

$$D_x f(x) = D_u g(u) \, . \, D_x u(x)$$

Esta fórmula, denominada *regla de la cadena,* puede también expresarse en otras notaciones por:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{du} \, . \, \frac{du}{dx} \qquad \text{ó} \qquad (gou)'(x) = g'(u(x)) \, . \, u'(x)$$

**Ejemplo 6.13.** Calcular la derivada con respecto a $x$ de las funciones siguientes:

a) $f(x) = (3x^2 + 4x + 1)^5$

b) $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 3}$

c) $f(x) = \cos(3x + 2)$

a) Haciendo $u = 3x^2 + 4x + 1$ y $g(u) = u^5$ se tiene que $f(x) = g(u(x))$ .

$D_x f(x) = D_u g(u) \, . \, D_x u(x) = D_u u^5 \, . \, D_x (3x^2 + 4x + 1)$

$= 5u^4 (6x + 4) = 5(6x + 4)(3x^2 + 4x + 1)^4$

b) Haciendo $u = x^2 + 3$, $g(u) = u^{1/6}$ , entonces $f = gou$, y por la regla de la cadena:

$D_x \sqrt[6]{x^2 + 3} = D_u (u)^{1/6} \, . \, D_x (x^2 + 3) =$

$= \frac{1}{6}(x^2 + 3)^{-5/6}(2x) = \frac{x}{3}(x^2 + 3)^{-5/6}$

c) Haciendo $u = 3x + 2$, $g(u) = \cos u$, entonces

$D_x \cos(3x + 2) = D_u \cos u \, . \, D_x (3x + 2) = -\text{sen}\, u \, . \, (3) =$

$= -3 \,\text{sen}\,(3x + 2)$

**Teorema 6.4.**

$$D_x\,[g(x)]^{\alpha} = \alpha\,[g\,(x)]^{\alpha-1}\,.\,D_x\,g(x) \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

En efecto, si hacemos $u = g(x)$ y, $f(u) = u^{\alpha}$, entonces aplicando la fórmula de la derivación de una función compuesta:

$$D_x\,[g\,(x)]^{\alpha} = D_u\,u^{\alpha}\,.\,D_x u = \alpha\,u^{\alpha-1}\,.\,D_x\,g(x) = \alpha\,[g\,(x)]^{\alpha-1}\,D_x\,g(x)$$

**Ejemplo 6.14.** Hallar:

a) $D_x\,(3x + sen\ x)^5$

b) $D_x\,\sqrt{2x + x^2}$

c) $D_x\,sen\,(3x^2)$

d) $D_x\,\sqrt{f\,(x)}$

a) $D_x\,(3x + sen\ x)^5 = 5(3x + sen\ x)^4\,D_x\,(3x + sen\ x) =$

$= 5\,(3x + sen\ x)^4\,(3 + cos\ x)$

b) $D_x\,\sqrt{2x + x^2} = D_x\,(2x + x^2)^{1/2} =$

$= \dfrac{1}{2}\,(2x + x^2)^{-1/2}\,.\,D_x\,(2x + x^2) =$

$= \dfrac{D_x\,(2x + x^2)}{2\sqrt{2x + x^2}} = \dfrac{2 + 2x}{2\sqrt{2x + x^2}} = \dfrac{1 + x}{\sqrt{2x + x^2}}$

c) Haciendo $g\,(x) = 3x^2$

$f\,(x) = sen\ x.$

se tiene $sen\,(3x^2) = f\,(g\,(x)).$

Luego

$$D_x\, sen\ (3x^2) = D_x\, f\ (g\ (x))\ .\ D_x\, g\ (x)\ =$$

$$= cos\ (3x^2)\ .\ D_x\, 3x^2 = cos\ (3x^2)\ (6x)\quad .$$

d) $D_x\ \sqrt{f\ (x)} = D_x\ [f\ (x)]^{1/2} = \dfrac{1}{2}[f\ (x)]^{-1/2}\ .\ D_x\, f\ (x)\ .$

$$D_x\ \sqrt{f\ (x)} = \frac{D_x\, f\ (x)}{2\ \sqrt{f\ (x)}}$$

Haciendo uso de la Regla de la Cadena, se obtiene en forma directa que si $g$ es una función de $x$, entonces:

a) $D_x\, sen\ (g\ (x)) \quad = \quad cos\ (g\ (x))\ g'\ (x)$

b) $D_x\, cos\ (g\ (x)) \quad = \quad -sen\ (g\ (x))\ g'\ (x)$

c) $D_x\, tg\ (g\ (x)) \quad = \quad sec^2\ (g\ (x))\ g'\ (x)$ , etc.

**Ejemplo 6.15.** Hallar:

a) $D_x\ sen\ (7x + 8x^2)$

b) $D_x\ tg\ (2x + 5)^4$

c) $D_x\ sec\ (\sqrt{x})$

d) $D_x\ sec\ \sqrt{x^2 + 1}$

a) $D_x\ sen\ (7x + 8x^2) = cos\ (7x + 8x^2)\ .\ (7 + 16x)\ =$

$(7 + 16x)\ cos\ (7x + 8x^2)$

b) 
$$\begin{aligned} D_x\ tg\ ((2x + 5)^4) &= sec^2\ ((2x + 5)^4)\ .\ D_x\ (2x + 5)^4 \\ &= sec^2\ ((2x + 5)^4)\ .\ 4\ (2x + 5)^3\ (2) \\ &= 8\ (2x + 5)^3\ sec^2\ ((2x + 5)^4) \end{aligned}$$

c) $D_x\ sec\ \sqrt{x} = sec\ \ \sqrt{x}\ .\ tg\ \ \sqrt{x}\ .\ D_x\ \sqrt{x}\ = (sec\ \ \sqrt{x}\ \ tg\ \ \sqrt{x}\ )\ \dfrac{1}{2\ \sqrt{x}}$

d) $D_x \sec \sqrt{x^2 + 1}$

$$= \sec \sqrt{x^2 + 1}\ tg\ \sqrt{x^2 + 1}\ .\ D_x\ (\sqrt{x^2 + 1}) =$$

$$= \sec \sqrt{x^2 + 1}\ tg\ \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sec \sqrt{x^2 + 1}\ tg\ \sqrt{x^2 + 1}\ .$$

## EJERCICIOS 6.2

Calcular, utilizando la regla de la cadena, las derivadas de las siguientes funciones:

1.— $y = \sqrt[4]{x^{2/3} + 3}$

2.— $u = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$

3.— $y = (3 - 2 \operatorname{sen} x)^5$

4.— $y = \operatorname{sen}^3 (4x)$

5.— $y = \dfrac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$

6.— $z = \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}$

7.— $y = \operatorname{sen} (x^2)$

8.— $y = tg\ (\operatorname{sen}^2 (3x^2 + 4))$

9.— Si $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\operatorname{cosec} x}}$ , calcular $\left(f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^2$

10.— $y = \dfrac{\cos^3 (3x + 5)}{3x + 5}$

## 6.6. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Dos de las aplicaciones de la derivada han sido tratadas en la parte introductoria de este capítulo: recta tangente a una curva y velocidad instantánea. A continuación se desarrollarán otras aplicaciones importantes de la derivada tales como recta normal a una curva, ángulo entre dos curvas, aceleración instantánea y máximos y mínimos de una función.

### RECTA NORMAL A UNA CURVA

Se ha estudiado la ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$ ; en base a este concepto definiremos el de recta normal.

**Definición 6.2.** La *recta normal* a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (x_1, f(x_1))$ es la recta que pasa por $P$ y es perpendicular a la recta tangente a la curva en dicho punto.

Según la definición, si $m_T = f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P$, entonces

$$m_N = -\frac{1}{f'(x_1)} \quad ,$$

para $f'(x_1) \neq 0$, es la pendiente de la normal en $P$ .

**Ejemplo 6.16.** Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $y = sen\ x$ en el punto de abscisa $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$

La ordenada del punto es

$$y_1 = sen\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Como $f'(x) = cos\ x$, entonces

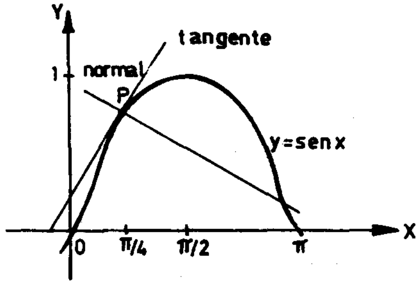



Fig. 6.11

$$m_T\ (x_1) = cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad m_N\ (x_1) = -\ \frac{2}{\sqrt{2}}\ .$$

La ecuación de la recta tangente en

$$P\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \text{es}\quad y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

y la ecuación de la normal es:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ \frac{2}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

## ANGULO ENTRE DOS CURVAS

Si dos curvas $y = f\ (x)$ e $y = g\ (x)$ se cortan en un punto $P$, entonces podemos definir ángulo formado por las curvas en el punto $P$ de intersección, en la forma siguiente:

**Definición 6.3.** Dadas las curvas $y = f\ (x)$ e $y = g\ (x)$ que se cortan en $P$, el *ángulo formado por* $f$ *y* $g$ (en ese orden) en $P$, se define como el ángulo que forman $T_1$ y $T_2$ , rectas tangentes a $f\ (x)$ y $g\ (x)$ respectivamente, en $P$.

Si las rectas $T_1$ y $T_2$ coinciden, se dice que *las curvas son tangentes en P.*

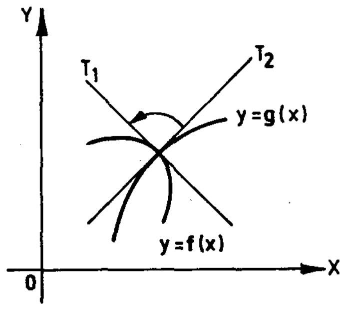



Fig. 6.12

**Ejemplo 6.17.** Hallar el ángulo que forman las curvas $y = -x^2 + 1$ e $y = x^2 - 1$ en cada uno de sus puntos de intersección.

Llamaremos $f(x) = -x^2 + 1$ y
$g(x) = x^2 - 1$ .

Los puntos de intersección son: $P(1, 0)$ y $Q(-1, 0)$ que se obtienen resolviendo el sistema

$$y = -x^2 + 1$$
$$y = x^2 - 1$$

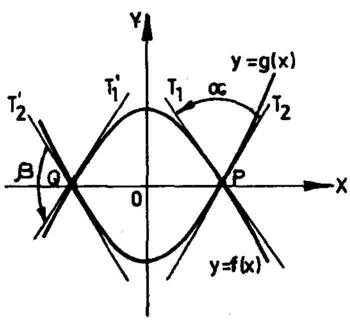



Fig. 6.13

Además, $f'(x) = -2x$ , $g'(x) = 2x$ .

Cálculo del ángulo en $P = (1, 0)$ :

En $P = (1, 0)$ la recta tangente a $y = f(x)$ tiene pendiente $m = f'(1) = -2$ y la recta tangente a $y = g(x)$ tiene pendiente $m = g'(1) = 2$. Luego la tangente trigonométrica del ángulo $\alpha$ que forman $f$ y $g$ en $P$ es:

$$tg\ \alpha = \frac{-2 - 2}{1 + (-2)(2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}\ ;\ \alpha = arc\ tg\ \frac{4}{3}\ ;\ \alpha = 53°\ 08'$$

Cálculo del ángulo en $Q(-1, 0)$:

En $Q(-1, 0)$, la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ es: $m = 2$ y la pendiente de la recta tangente a $y = g(x)$ es $m = -2$.

Luego la tangente trigonométrica del ángulo $\beta$ que forman $f$ y $g$ en $P$ es:

$$tg\ \beta = \frac{2 - (-2)}{1 + (2)(-2)} = -\frac{4}{3}\ ;\ \beta = arc\ tg\ -\frac{4}{3}\ ;\ \beta = 126°\ 52'\ .$$

## ACELERACION

La velocidad media y la velocidad instantánea de un cuerpo que se mueve en línea recta la hemos definido en base a la función $s(t)$ que describe la posición del cuerpo en cada instante $t$. A partir de la función que describe la velocidad instantánea $v(t)$, se puede definir, en forma análoga a lo que se hizo con la velocidad media y la velocidad instantánea, la aceleración media y, la aceleración instantánea.

La *aceleración media* en el intervalo de tiempo $[t_1\ t_1 + h]$ , $h \neq 0$ se define como la razón

$$a = \frac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h} \qquad \text{y}$$

La *aceleración instantánea* en el instante $t = t_1$ se define como el límite:

$$a\ (t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{v\ (t_1 + h) - v\ (t_1)}{h}\ ,\quad \text{h} \neq 0, \text{ si existe.}$$

Esto es, $a\ (t_1) = v'\ (t_1)$ .

**Ejemplo 6.18.** Un cuerpo se mueve en línea recta según la ley: $s = 10\ t - t^2$ . Entonces:

a) la velocidad del cuerpo en cada instante $t$ es $v\ (t) = 10 - 2t$

b) la aceleración media en el intervalo [4, 6] es

$$a = \frac{v\ (6) - v\ (4)}{6 - 4} = \frac{-2 - 2}{2} = -2\ .$$

Las unidades para $a$ son unidades de longitud sobre unidades de tiempo al cuadrado.

Es decir $m/seg^2$ , $cm/seg^2$ , etc.

c) La aceleración instantánea en el instante $t = 4$ es

$$a\ (4) = \lim_{h \to 0} \frac{v\ (4 + h) - v\ (4)}{6 - 4} = \lim_{h \to 0} \frac{10 - 2\ (4 + h) - (10 - 2\ (4))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \to 0}\ (-2) = -2\ .$$

d) La aceleración en cada instante $t$ es

$a\ (t) = v'\ (t) = -2$. La aceleración en este caso es negativa y constante.

**Ejemplo 6.19.** Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y su ley de movimiento es:

$$s\ (t) = -2t^3 + 10t^2 + 4t\ ,$$

donde $t$ está dado en segundos y $s$ $(t)$ en metros.

Hallar:

a) La velocidad instantánea en cada instante $t$

b) La aceleración media en el intervalo [0, 4]

c) La aceleración cuanto $t = 2$ *seg.*

a) $v\ (t) = s'(t) = -\ 6t^2 + 20t + 4 \quad m/seg.$

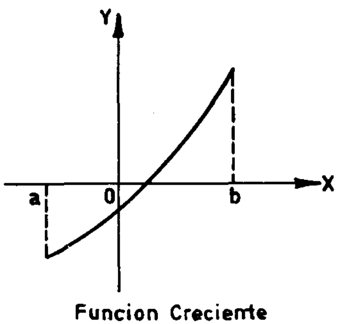
b) En [0, 4], $a = \dfrac{v\ (4) - v\ (0)}{4 - 0} = \dfrac{-12 - 4}{4} = -4\ m/seg^2$

c) $a(t) = v'\ (t) = -12t + 20$ ;

$a\ (2) = (-12)\ (2) + 20 = -4\ m/seg^2$ .

## MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION

Presentaremos, dentro de las limitaciones que un curso introductorio como éste impone, un método para determinar los máximos y mínimos de una función. El método que veremos no es el único. Otros pueden ser estudiados en un curso más avanzado de Análisis. Sin embargo, el procedimiento que plantearemos es general y puede por tanto ser aplicado en todos los casos.



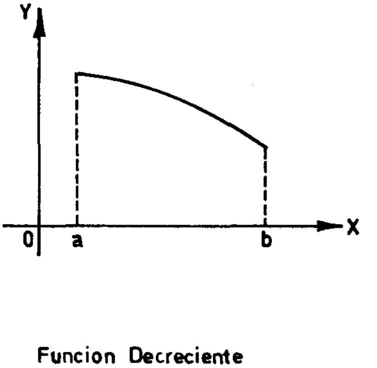




Fig. 6.14

**Definición 6.4.** Se dice que una función $y = f(x)$ es *creciente en el intervalo* $]a, b[$ si cada vez que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ , para $x_1$, $x_2$ en $]a, b[$. La función $f$ es *decreciente* si cada vez que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$, figura 6.14.

Enunciaremos a continuación un teorema importante para la teoría de máximos y mínimos.

**Teorema 6.5.** Si $f'(x) > 0$ para toda $x$ en un intervalo $]a, b[$, entonces $f$ es creciente en ese intervalo.

Si $f'(x) < 0$ para toda $x$ en $(a, b)$ entonces $f$ es decreciente en $]a, b[$.

**Ejemplo 6.20.** Determinar los intervalos en los que la función $f(x) = x^2$ es creciente o decreciente.

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 2x$. La función es creciente en aquellos intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ (teorema 6.5). Luego $f$ es creciente para todo $x > 0$, es decir, en el intervalo $]0, +\infty[$.

Es decreciente si $f'(x) < 0$, luego es decreciente para todo $x < 0$, o sea en el intervalo $]-\infty, 0[$.

Para $x = 0$ se tiene $f'(0) = 0$ y el teorema 6.5 no nos asegura nada en este caso. la figura 6.15 muestra a la función $f(x) = x^2$ .

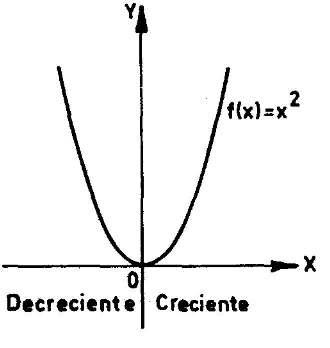



Fig. 6.15

**Ejemplo 6.21.** Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = 4x^2 + 2x^3$ .

La derivada de $y = 4x^2 + 2x^3$ es $y' = 8x + 6x^2 = 2x(4 + 3x)$.

Analicemos, según sea el valor de $x$, los signos de los dos factores de $y'$ :

si $x > 0$, $2x$ y $(4 + 3x)$ son positivos, luego $y' > 0$

si $x < 0$, $2x < 0$ pero $(4 + 3x)$ puede ser positivo o negativo. Si $-4/3 < x < 0$ entonces $(4 + 3x)$ es positivo y por tanto en este intervalo $y' < 0$. Si $x < -4/3$, entonces $(4 + 3x)$ es negativo y se tiene $y' > 0$.

Podemos resumir el anterior análisis en el cuadro siguiente:

| $x$ | $2x$ | $4x + 3x$ | $y' = 2x\ (4 + 3x)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x > 0$ | + | + | + | : | creciente |
| $-\frac{4}{3} < x < 0$ | − | + | − | : | decreciente |
| $x < -\frac{4}{3}$ | − | − | + | : | creciente |

La figura 6.16 presenta un croquis de la función $y = 4x^2 + 2x^3$ .

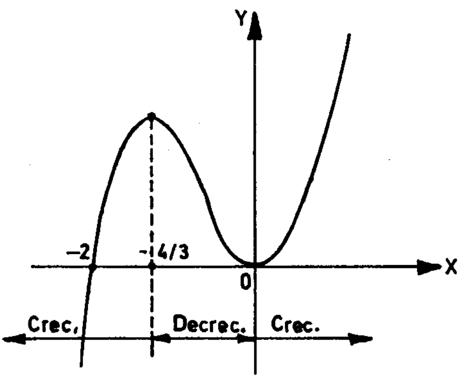



Fig. 6.16

**Definición 6.5.** Se dice que una función $y = f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto $x_0$ si existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a $x_0$ tal que $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in ]a, b[$, $x \neq x_0$ . La función $y = f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $x_0$ si existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a $x_0$ tal que $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in ]a, b[$ , $x \neq x_0$ .

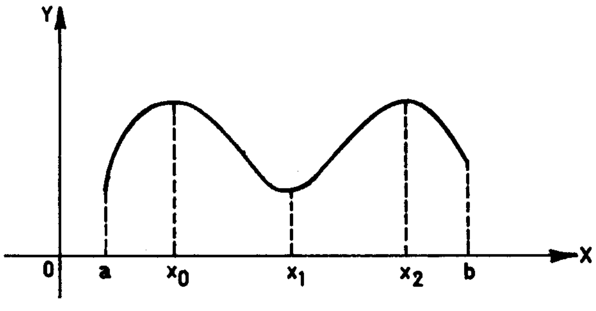



Fig. 6.17

Una función puede tener varios máximos y mínimos relativos en un intervalo. Mas aún, el valor que toma la función en un mínimo relativo puede ser mayor que el que toma en un máximo relativo. En la figura 6.17, $x_0$ y $x_2$ son máximos relativos en el intervalos $]a, b[$ y $x_1$ es un mínimo relativo en el mismo intervalo.

**Teorema 6.6.** Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto $x_0$ y en este punto tiene un máximo o un mínimo relativo, entonces $f'(x_0) = 0$.

Haremos la demostración para el caso del máximo.

Supongamos que $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en $x_0$ .

Si $f'(x_0) \neq 0$ entonces $f'(x_0) > 0$ ó $f'(x_0) < 0$ .

Si $f'(x_0) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en un intervalo que contiene a $x_0$ . Luego en ese intervalo, a la derecha de $x_0$ los valores de la función son mayores que $f(x_0)$, por definición de función creciente en un intervalo, en contradicción con la hipótesis que dice que hay un máximo relativo en $x_0$.

Si $f'(x_0) < 0$ entonces por el teorema 6.5 la función es decreciente y los valores de la función correspondientes a valores de $x$ a la izquierda de $x_0$ en un intervalo que contiene a $x_0$ serán mayores que $f(x_0)$, en contradicción con la hipótesis de que en $x_0$ la función tiene un máximo relativo.

Luego $f'(x_0) = 0$.

La demostración para $x_0$, mínimo relativo es análoga.

Este teorema señala una condición necesaria para que en $x_0$ exista máximo o mínimo relativo, es decir, si en $x_0$ hay máximo o mínimo entonces la derivada de $f(x)$ en $x_0$ se anula. Sin embargo, la condición no es suficiente. La derivada de una función puede anularse en $x_0$ y no tener máximo ni mínimo en dicho punto. Por ejemplo, la función $y = x^3$ tiene por derivada $y' = 3x^2$ que para $x_0 = 0$ se anula. La gráfica de la función nos demuestra que $y = x^3$ no tiene ni máximo ni mínimo en $x_0 = 0$.

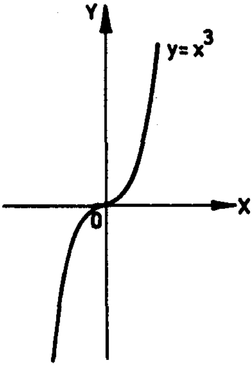



Fig. 6.18

El siguiente teorema proporciona un criterio general para la determinación de máximos y mínimos relativos de una función.

**Teorema 6.7.** Sea $y = f(x)$ una función definida en $x_0$ y tal que $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe. Si

**a)** existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a $x_0$ y tal que para todo $x \in ]a, x_0[$ se tiene $f'(x) > 0$ (creciente) y para todo $x \in ]x_0, b[$

se tiene $f'(x) < 0$ (decreciente), entonces en $x_0$ existe un máximo relativo;

b) existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a $x_0$ y tal que para todo $x \in ]a, x_0[$ se tiene $f'(x) < 0$ (decreciente) y para todo $x \in ]x_0, b[$ se tiene $f'(x) > 0$ (creciente), entonces en $x_0$ existe un mínimo relativo;

c) existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a $x_0$ en el cual $f'(x)$ no cambia de signo, entonces $x_0$ no corresponde ni a un máximo ni a un mínimo relativo de la función.

La demostración del teorema es inmediata. Haremos la parte a).

En $]a, x_0[$ , $f'(x) > 0$, luego por el teorema 6.5 $f$ es creciente en ese intervalo, es decir, $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in ]a, x_0[$ .

En $]x_0, b[$ , $f'(x) < 0$, luego por el mismo teorema $f$ es decreciente en $]x_0, b[$ es decir $f(x_0) > f(x)$ para todo $x$ en $]x_0, b[$ . Luego se tiene:

$f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in ]a, b[, x \neq x_0$ .

Por definición, $x_0$ es un máximo relativo de la función (fig. 6.19).

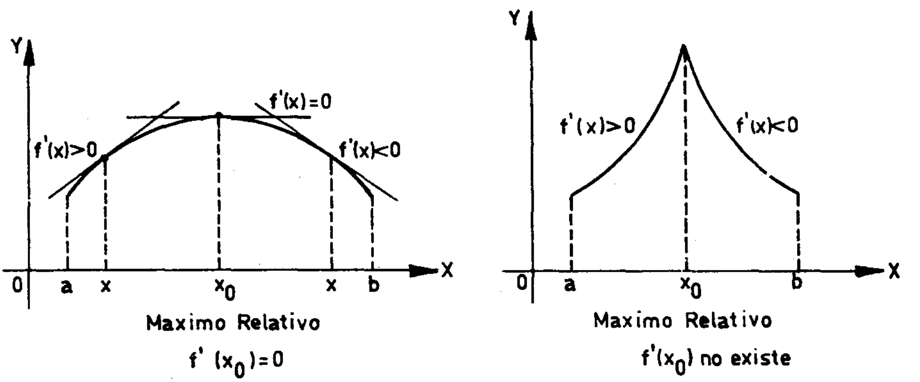



Fig. 6.19

Los dos últimos teoremas nos permiten establecer una regla para la determinación de máximos y mínimos relativos de una función.

Regla: 1°. Hallar la derivada de la función.

2°. Determinar los valores de $x$ en donde la derivada vale cero o en donde la derivada no existe. Estos puntos se llaman *puntos críticos.*

3°. Aplicar el teorema 6.7 a cada uno de los puntos críticos.

Si en $x_0$ la función toma un valor máximo o mínimo relativo, se dice que $f(x_0)$ es el *valor máximo* o *mínimo* relativo de la función, respectivamente.

**Ejemplo 6.22.** Encontrar los valores máximos o mínimos relativos de la función

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Aplicamos la regla dada:

1°. Derivada de la función: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1)$.

2°. Puntos críticos: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Ambos anulan a la derivada.

3°. Analicemos el punto $x_1 = 3$ según el teorema 6.7

Si $1 < x < 3$ entonces $y' < 0$, y si $x > 3$, $y' > 0$; luego en $x_1 = 3$ la función tiene un mínimo relativo.

Estudiemos el punto $x_2 = 1$.

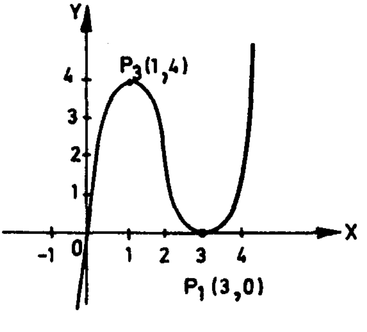



Fig. 6.20

Si $x < 1$ entonces $y' > 0$, y si $1 < x < 3$ entonces $y' < 0$; luego en $x_2 = 1$ la función tiene un máximo relativo.

Como $y\ (3) = 0$ e $y\ (1) = 4$, entonces la función tiene un valor mínimo relativo igual a cero y un valor máximo relativo igual a 4.

**Ejemplo 6.23.** Determinar los máximos o mínimos relativos de la función $y = (x - 1)^3 - 1$ .

La derivada de la función dada es $y' = 3(x - 1)^2$

El único punto crítico es $x_1 = 1$.

Para valores de $x < 1$ ó $x > 1$, siempre $(x - 1)^2$ será positivo, es decir $y' > 0$ a la izquierda y a la derecha de $x_1 = 1$. Por la parte c) del teorema 6.7, en $x_1 = 1$ la función no tiene ni máximo ni mínimo. Más aún, siendo $y' > 0$ en un intervalo conteniendo a $x_1 = 1$, la función es creciente en ese intevalo.

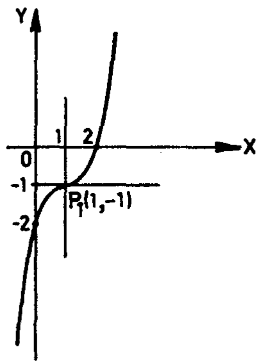



Fig. 6.21

Por supuesto que al anularse $y'$ en $x_1 = 1$, la tangente a la curva en el punto correspondiente es horizontal y corta a la curva.

**Ejemplo 6.24.** Determinar los máximos y mínimos de la función

$$y = x + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ .$$

La función puede escribirse como $y = x + \frac{3}{2}x^{2/3}$ , cuya derivada es $y' = 1 + x^{-1/3} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Encontremos los puntos críticos. Si $y' = 0$ entonces

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0 \text{ , o sea } \sqrt[3]{x} = -1, \text{ ó } x_1 = -1.$$

En este caso hay otro punto crítico y es aquel valor de $x$ para el cual la derivada no existe. Para $x_2 = 0$ la derivada se hace infinita.

Tenemos pues tres intervalos en los cuales debemos analizar el signo que toma la derivada:

| Intervalo | $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | $y' = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | Punto Crítico | Valor máximo o mínimo |
|---|---|---|---|---|
| $x < -1$ | Negativo y menor que 1 en valor absoluto | $y' > 0$ | | |
| | | | $x_1 = -1$ | $f(-1) = 0.5$, máximo |
| $-1 < x < 0$ | Negativo y mayor que 1 en valor absoluto | $y' < 0$ | | |
| | | | $x_2 = 0$ | $f(0) = 0$, mínimo |
| $x > 0$ | Positivo | $y' > 0$ | | |

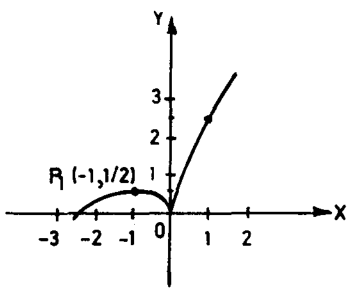



Fig. 6.22

Un croquis de la función $y = x + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ aparece en la figura 6.22 .

**Definición 6.6.** Dada la función $y = f(x)$ definida en el dominio $D$, se dice que $f$ tiene un *máximo absoluto* en $x_0$ si $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in D$, $x \neq x_0$. Al valor $f(x_0)$ se le llama *máximo absoluto de f* en $D$.

Se dice que $f$ tiene un *mínimo absoluto* en $x_0$ si $f(x_0) < f(x)$ para todo $x \in D$, $x \neq x_0$. $f(x_0)$ es entonces el *mínimo absoluto de f* en $D$.

Si una función es continua (para lo cual la existencia de la derivada es condición suficiente) en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces se puede demostrar que la función posee un máximo y un mínimo en dicho intervalo. Es evidente que el máximo y mínimo absoluto de la función corresponderá a puntos críticos o a los extremos del intervalo.

**Ejemplo 6.25.** Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $y = \dfrac{x^3}{3} - x + 1$ en el intervalo cerrado $[-4, 4]$.

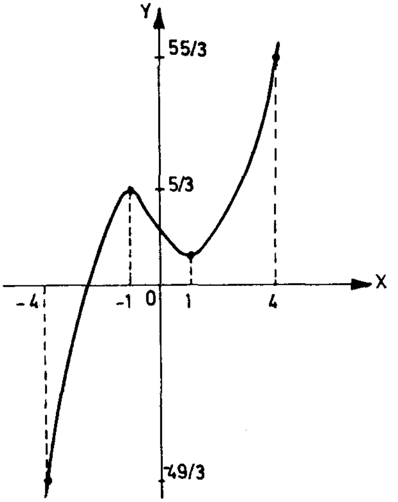



Fig. 6.23

Los valores máximo y mínimo de $y = f(x)$ pueden corresponder a los valores máximos y mínimos relativos o a los valores de $f$ en los extremos del intervalo.

Como $y' = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, entonces hay dos valores críticos: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

El primer valor corresponde a un valor máximo relativo, $f(-1) = 5/3$, y el segundo a un valor mínimo relativo, $f(1) = 1/3$.

En los extremos del intervalo los valores de la función son $f(-4) = -49/3$ y $f(4) = 55/3$.

Luego el máximo absoluto corresponde a $x = 4$ y vale $55/3$ y el mínimo absoluto a $x = -4$ con el valor $-49/3$. (fig. 6.23).

Una idea de la gran variedad de problemas que se resuelven utilizando la teoría de máximos y mínimos la obtendrán al revisar la lista de ejercicios planteados al final del capítulo. Los ejemplos siguientes pueden ayudar a precisar el método que debe seguirse.

**Ejemplo 6.26.** Hallar el punto de la curva $2y = x^2$ más **cercano** del punto $P_0$ (4, 1).

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva $2y = x^2$.

La distancia de $P$ a $P_0$ (4, 1) es $d = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}$. Expresando $d$ en función de una sola variable, por ejemplo $x$, se tiene:

$$d(x) = \sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}$$

El problema tiene solución si la función $d(x)$ tiene un mínimo.

Derivando se obtiene:

$$d'(x) = \frac{2(x - 4) + 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)x}{2\sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}} = \frac{x^3 - 8}{2\sqrt{(x - 4)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}}$$

Los valores críticos se obtienen haciendo $d'(x) = 0$, quedando $x^3 - 8 = 0$. Un solo valor crítico real, $x = 2$.

Debemos comprobar si este valor corresponde a un mínimo. Si $x < 2$ entonces $d' < 0$, y si $x > 2$, $d' > 0$. Luego la función $d(x)$ tiene un mínimo para $x = 2$. El valor mínimo es $d(2) = \sqrt{5}$ y la ordenada del punto buscado es

$$y = \frac{x^2}{2} = \frac{4}{2} = 2. \quad \text{Luego} \qquad P = (2, 2).$$

**Ejemplo 6.27.** Las rectas $y = 2x$ y $3x + y = 30$ forman con el eje de abscisas un triángulo. Determinar los vértices del rectángulo de base en el eje $X$ y de área máxima inscrito en dicho triángulo.

La figura 6.24 muestra un croquis del problema.

Sean $A(x_1, 0)$ y $B(x_2, 0)$ los vértices sobre el eje $X$.

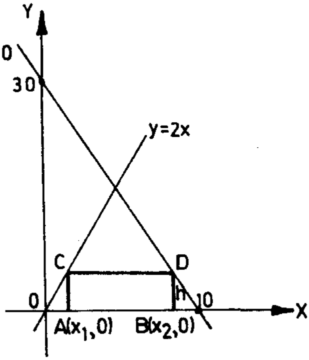



Fig. 6.24

Si $h$ es la altura, entonces los otros vértices serán $C(x_1, h)$ y $D(x_2, h)$. El área del rectángulo es $A = (x_2 - x_1). h$. Expresando $x_1$ y $x_2$ en función de $h$ se obtiene

$$x_1 = \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{h}{3} + 10, \quad \text{desde que } C \text{ y } D \text{ están sobre}$$

las rectas $y = 2x$ y $3x + y = 30$ respectivamente. Reemplazando en $A$:

$$A(h) = \left(-\frac{h}{3} + 10 - \frac{h}{2}\right) h = 10h - \frac{5}{6} h^2 .$$

Derivando con respecto a $h$: $A'(h) = 10 - \dfrac{10}{6}h = 10\left(1 - \dfrac{h}{6}\right)$.

Un valor crítico es $h = 6$. Si $h < 6$, $A' > 0$ y si $h > 6$, $A' < 0$, luego la función $A(h)$ tiene un máximo en $h = 6$. Las coordenadas de los vértices son $A(3, 0)$, $B(8, 0)$, $C(3, 6)$, y $D(8, 6)$.

El área del rectángulo es 30 unidades de superficie.

**Ejemplo 6.28.** Se desea construir con la menor cantidad posible de plancha metálica un depósito con la forma de un cono recto circular (abierto por la base) y con capacidad de 2,000 litros. Calcular sus dimensiones.

Debemos calcular las dimensiones de un cono de área lateral mínima (sin la base) y volumen $2m^3$.

Sean, $h$ la altura, $g$ la generatriz y $r$ el radio de la base del cono buscado.

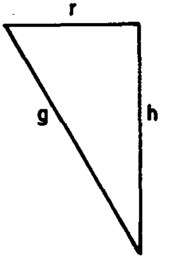


Fig. 6.25

Si $S$ es el área lateral, entonces:

$S = \pi r g$. Además, de la figura:

$g^2 = r^2 + h^2$, y por dato

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 2$. De la última expresión se obtiene: $h^2 = \dfrac{36}{\pi^2 r^4}$ y de aquí $g^2 = r^2 + \dfrac{36}{\pi^2 r^4}$.

Elevando al cuadrado $S$ y reemplazando $g^2$ se tiene:

$S^2 = \pi^2 r^4 + \dfrac{36}{r^2}$. Derivando con respecto a $r$: $S' = \dfrac{4\pi^2 r^3 - \dfrac{72}{r^3}}{2S}$.

El único valor crítico es $r = \sqrt[6]{\dfrac{18}{\pi^2}} = 1.11$ m.

Como la altura es igual a $h = \dfrac{6}{\pi r^2}$, entonces $h = 1.55$ m.

## EJERCICIOS 6.3

Encontrar el ángulo que forman las curvas indicadas en los puntos donde se cortan.

1.— $4y = x^2 + 4,$ $\quad x^2 = 8 - 2y$

2.— $y = (x - 2)^2 ,$ $\quad y = -4 + 6x - x^2$

3.— $y = x^2 ,$ $\quad y = x^3$

4.— $xy = a^2 ,$ $\quad x^2 - y^2 = b^2$

5.— $x^2 + y^2 = 4,$ $\quad y = 2x + 5$

Hallar la velocidad y aceleración en cada uno de los problemas siguientes sabiendo que $s\ (t)$ representa el movimiento de un cuerpo que se desplaza en línea recta. $s$ está dando en mts. y $t$ en segundos.

6.— $s\ (t) = 2t + 1$; para $t = 1,\ t = t_1$

7.— $s\ (t) = -4t^2 + 7t + 5$ para $t = 0,\ t = 1,\ t = t_1$

8.— $s\ (t) = -3$ sen $t + 1$ para $t = \pi/2,\ t = \pi,\ t = t_1$

9.— Discutir el movimiento de un punto $P$ si su posición en el instante $t$ está dado sobre un sistema coordenado rectilíneo por: $s\ (t) = t^3 - 6t^2 + 20$ en el intervalo $t \in [0, 6]$

10.—Desde lo alto de una torre de 50 mts. de altura se deja caer una bola que cae según la ley $s\ (t) = -9.8t^2 + 50$. Determinar el instante en que toca el suelo; la velocidad inicial y la velocidad con que toca el suelo; la aceleración con que cae.

Determinar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones y hacer un croquis de la gráfica correspondiente.

11.— $f\ (x) = x^3 + 3x^2 - 1$

12.— $f\ (x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

13.— $y = x^2\ (x - 12)^2$

14.— $y = \dfrac{16}{x\ (4 - x^2)}$

15.— $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$

16.— $f\ (x) = \sqrt[3]{x}\ (x - 7)^2$

17.— $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

18.— $y = 2\ sen\ 2x + sen\ 4x$

19.— $y = \dfrac{6x}{1 + x^2}$

20.- $y = 2\ sec\ x - tg\ x$

21.—Encontrar un triangulo de área máxima inscrito en un círculo de radio $r$.

22.—Determinar el punto de la gráfica de la ecuación $y = x^2$ más cercano del punto (3, 0).

23.- Encontrar la altura $h$ de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio $R$.

24.—Hallar las dimensiones del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio $R$ que tenga área máxima.

25.—Encontrar la altura $h$ de un cilindro con máxima área lateral inscrito en una esfera.

26.—Determinar un punto sobre una curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en el cual la tangente forma con el eje de abscisas el mayor ángulo posible (en valor absoluto).

27.—Hallar las dimensiones del rectángulo de área 100 $m^2$ de tal modo que su perímetro sea mínimo.

28.—El costo de producción de $x$ artículos está dado por la función $C(x) = x^2 + 7x + 80$. ¿Cuántos artículos deberán producirse para que el costo sea mínimo?

29.—Determinar las dimensiones de un cilindro de volumen igual a $16\pi$ $m^3$, de manera que su superficie total sea mínima.

30.—Determinar la altura de un prisma regular triangular inscrito en una esfera de radio $R$ de manera que el volumen del prisma sea máximo.

## 6.7 ANTIDERIVADAS

Se trata ahora de encontrar una función $y = F(x)$ cuya derivada $F'(x)$ sea una función dada $y = f(x)$.

Es decir $F$ debe ser tal que $F'(x) = f(x)$. La función $F$ es llamada *antiderivada* de $f$ y la operación de hallarla se llama *antiderivación.*

La antiderivada de una función $y = f(x)$ se denota con $\int f(x)dx$ que se lee *integral de* $f(x)$. Esto es $D_x \int f(x)\,dx = f(x)$.

**Ejemplo 6.29.** Dada la función $f(x) = 3x$, se tiene que una antiderivada de $f$ es

$F(x) = \dfrac{3x^2}{2}$ , pues $F'(x) = 3x$ . Podemos escribir entonces:

$$\int 3x\, dx = \frac{3x^2}{2}$$

Notemos que no solamente $F(x) = \dfrac{3x^2}{2}$ es una antiderivada de $f$, también lo son:

$$y = \frac{3x^2}{2} + 1$$

$$y = \frac{3x^2}{2} - 5$$

Y en general cualquier función de la forma: $y = \dfrac{3x^2}{2} + k$,

donde $k$ es una constante cualquiera, es una antiderivada de $f$.

**Ejemplo 6.30.** Hallar una antiderivada de $y = x^3 + 3$.

Observemos que

$D_x \left( \dfrac{x^4}{4} + 3x \right) = x^3 + 3$, luego

$$\int (x^3 + 3)\, dx = \frac{x^4}{4} + 3x$$

En general se tiene que

$\displaystyle\int (x^3 + 3)\, dx = \frac{x^4}{4} + 3x + k$, para cualquier constante $k$.

**Ejemplo 6.31.** Si $D_x F(x) = 3x^2 + 3x + 1$ y $F(0) = 1$, hallar $F$.

Se trata de hallar la antiderivada de $y = 3x^2 + 3x + 1$ que pasa por (0, 1).

Se tiene que: $D_x\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + k\right) = 3x^2 + 3x + 1$ siendo

$k$ una constante cualesquiera. Luego

$$F(x) = \int (3x^2 + 3x + 1)\, dx = x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + k$$

*pero* $F(0) = 1$, es decir, $1 = F(0) = k$.

Por tanto, la función $F$ buscada es $F(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + 1$.

A menudo podemos hallar la antiderivada de una función si recordamos las fórmulas de derivación que ya fueron estudiadas.

Así, para toda constante $k$, se tiene:

a) $D_x(x + k) = 1$, luego $\int dx = x + k$

b) $D_x\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k\right) = x^n$, $n \neq -1$,

luego $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, siempre que $n \neq -1$.

c) $D_x(sen\ x + k) = cos\ x$, luego $\int cos\ x\ dx = sen\ x + k$

d) $D_x(cos\ x + k) = -\ sen\ x$, luego $\int sen\ x\ dx = -cos\ x + k$

e) $D_x(tg\ x + k) = sec^2\ x$, luego $\int sec^2\ x\ dx = tg\ x + k$

f) $D_x(ctg\ x + k) = -csc^2\ x$, luego $\int csc^2\ x\ dx = -\ ctg\ x + k$

g) $D_x(sec\ x + k) = sec\ x\ tg\ x$, luego $\int sec\ x\ tg\ x\ dx = sec\ x + k$

h) $D_x(csc\ x + k) = -csc\ x\ ctg\ x$, luego $\int csc\ x\ ctg\ x\ dx = -csc\ x = k$

Un resultado importante que usado con las fórmulas que acabamos de dar, facilitará los cálculos de antiderivadas en el siguiente:

**Teorema 6.8.** Si $f$ y $g$ son funciones y $a$ y $b$ son constantes cualesquiera, entonces se cumple que:

$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$, siempre que existan $\int f(x)\, dx$ y $\int g(x)\, dx$.

En efecto:

$D_x (a \int (x)\, dx + b \int f\, g(x)\, dx) = a\, D_x \int f(x)\, dx + b\, D_x \int g(x)\, dx$ $= a\, f(x) + b\, g(x)$.

Luego:

$$\int (a\, f(x) + b\, g(x))\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx\ .$$

**Ejemplo 6.32.** Hallar: $\int (4x^5 + \sqrt{x} + sen\ x - 2x)\, dx$ .

Por el teorema 6.8 se tiene:

$\int (4x^5 + \sqrt{x} + sen\ x - 2x)\, dx = 4 \int x^5\, dx + \int x^{1/2}\, dx +$ $\int sen\ x\, dx - 2 \int x\, dx$ .

Aplicando las fórmulas resulta finalmente que:

$$\int (4x^5 + \sqrt{x} + sen\ x - 2x)\, dx = 4\, \frac{x^6}{6} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + (-cos\ x)$$

$$-2\, \frac{x^2}{2} + k \ = \frac{2x^6}{3} + \frac{2}{3}\, x^{3/2} - cos\ x - x^2 + k.$$

El siguiente resultado también es fácil de comprobar.

**Teorema 6.9.**

$$\int [g(x)]^n\, g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + k \text{ para } n \neq -1.$$

En efecto, aplicando la regla de derivación de una función compuesta:

$$D_x \left[ \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + k \right] = D_x \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} [g(x)]^n \; g'(x).$$

De aquí se deduce el teorema.

**Ejemplo 6.33.** Hallar:
a) $\int (3x + 7)^{12} \,.\, (3)\, dx$
b) $\int (3x + 7)^{12}\, dx$
c) $\int sen\; x \; cos\; x\; dx$
d) $\int tg^3\; x\; sec^2\; x\; dx$

a) Para aplicar el último teorema, hagamos: $g(x) = 3x + 7$. Se tiene $g'(x) = 3$.

$$\int (3x + 7)^{12}\, (3)\, dx = \int [g(x)]^{12}\, g'(x)\, dx$$

$$= \frac{[g(x)]^{13}}{13} + k = \frac{(3x+7)^{13}}{13} + k \quad .$$

b) Observemos esta vez que para aplicar directamente el teorema falta el factor constante $g'(x) = 3$, pero podemos escribir:

$$\int (3x + 7)^{12}\, dx = \frac{1}{3} \int (3x + 7)^{12}\, (3)\, dx.$$

Luego: $\int (3x + 7)^{12}\, dx = \dfrac{1}{3} \int (3x + 7)^{12}\, (3)\, dx$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{(3x+7)^{13}}{13} + k \right] = \frac{(3x+7)^{13}}{39} + k \quad .$$

c) Si hacemos $g(x) = sen\; x$, se tiene $g'(x) = cos\; x$.

Luego: $\int sen\; x\; cos\; x\; dx = \int sen\; x\; D_x\, (sen\; x)\, dx = \dfrac{sen^2\; x}{2} + k$

d) $\int tg^3\, x\, sec^2\, x\, dx = \dfrac{1}{4}\, tg^4 + k$ ,puesto que $D_x\ (tg\ x) = sec^2\ x$.

**Ejemplo 6.34.** Hallar: a) $\int (3x^3 + 6x^2)^5\,(3x^2 + 4x)\, dx$

b) $\int x\,\sqrt{5x^2 + 7}\, dx$

a) $$\int (3x^3 + 6x^2)^5\,(3x^2 + 4x)\, dx = \frac{1}{3}\int (3x^3 + 6x^2)^5\,(3)\,(3x^2 + 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (3x^3 + 6x^2)^5\,(9x^2 + 12x)\, dx = \frac{(3x^3 + 6x^2)^6}{18} + k\ .$$

b) $$\int x\,\sqrt{5x^2 + 7}\, dx = \frac{1}{10}\int \sqrt{5x^2 + 7}\,(10x)\, dx$$

$$= \frac{1}{10}\int (5x^2 + 7)^{1/2}\,(10x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{10}\,\frac{(5x^2 + 7)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{(5x^2 + 7)^{3/2}}{15} + k.$$

**Ejemplo 6.35.** Desde la azotea de un edificio de 30 mts. de altura, es lanzado verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad inicial de $v_0$ = 20 mts/seg. Hallar la función que expresa la posición del cuerpo en cada instante $t$, la altura máxima que alcanza el objeto y el instante en el que toca el suelo.

Consideremos la recta coordenada en su sentido positivo hacia arriba, de tal modo que el origen coincida con la base del edificio. Denotemos con $s\ (t)$, $v\ (t)$ y $a\ (t)$ las funciones que expresan la posición del cuerpo, la velocidad y la aceleración en cada instante $t$, respectivamente.

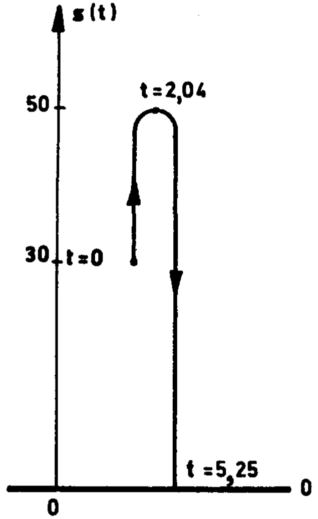



Fig. 6.26

La aceleración que actúa en el cuerpo es la de la gravedad que en valor absoluto es igual a 9.8 m/seg$^2$ y que está dirigida hacia abajo; por esta razón escribimos:

$a\ (t) = -9.8$ (constante en cada instante $t$ ) .

Se sabe que $v'\ (t) = a\ (t)$. Luego:

$v\ (t) = \int a\ (t)\ dt = \int -9.8\ dt = -9.8\ t + k_1$

pero: $v\ (0) = 20$ mts/seg., (en $t = 0$ la velocidad inicial, que es con la que se lanza el objeto es 20 mts/seg.),

luego, $20 = v\ (0) = -9.8\ (0) + k_1$ ó $k_1 = 20$. Es decir:

$$v\ (t) = -9.8\ t + 20.$$

También $s'\ (t) = v\ (t)$, luego $s\ (t) = \int (-9.8\ t + 20)\ dt$

$$= -\frac{9.8}{2}t^2 + 20t + k_2$$. Pero en $t = 0$, $s(0) = 30$, altura del edificio, luego:

$$30 = s(0) = -\frac{9.8}{2}(0) + 20(0) + k_2 .$$

Por tanto la función que da la posición en cada instante $t$ es

$s(t) = -\dfrac{9.8}{2}t^2 + 20t + 30$, donde $t$ se expresa en segundos y $s(t)$ en mts.

Calculemos la altura máxima que alcanza el objeto. Como $s'(t) = -9.8t + 20$, entonces un punto crítico se obtiene de $-9.8t + 20 = 0$, o sea $t = 2.04$ *seg*. Cuando $t < 2.04$, $v' > 0$ y cuando $t > 2.04$, $v' < 0$; luego la función $s(t)$ tiene su único máximo para $t = 2.04$, y corresponde al valor $s(2.04) = 50.41$ mts.

Para calcular el instante en que el objeto toca el suelo, bastará encontrar el valor de $t$ que hace $s(t) = 0$, es decir, la solución de la ecuación

$$-\frac{9.8}{2}t^2 + 20t + 30 = 0 .$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $t_1 = 5.25$ *seg.* *y* $t_2 = -1.17$ *seg.* La solución es $t_1$ y $t_2$ no tiene sentido en este problema.

**EJERCICIOS 6.4**

Calcular las siguientes antiderivadas:

1.— $\int \left(2x^2 + 3x - \dfrac{1}{x^2}\right) dx$

2.— $\int sen\ 2x\ dx$

11.— $\int \dfrac{3t\ dx}{\sqrt{1 - t^2}}$

12.— $\int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

3.— $\int tg\ 2x\ sec\ 2x\ dx$

4.— $\int x \sqrt{2x^2 + 5}\ dx$

5.— $\int \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}}$

6.— $\int \frac{x^2\ dx}{(8x^3 - 7)^2}$

7.— $\int (a^{1/3} - x^{1/3})^2\ dx$

8.— $\int sen^3\ x.\ cos\ x\ dx$

9.— $\int \sqrt{2x + 1}\ dx$

10.— $\int x\ sen\ (x^2 + 1)\ dx$

13.— $\int \frac{(z + 1)\ dz}{\sqrt[3]{z^2 + 2z + 2}}$

14.— $\int y^2\ (1 + 2y^3)^{-2/3}\ dy$

15.— $\int \frac{cos\ 2x\ dx}{sen^3\ 2x}$

16.— $\int sen\ 3x\ dx$

17.— $\int \frac{sen\ 2\ t\ dt}{\sqrt{2 - cos\ 2t}}$

18.— $\int sen^3\ \frac{y}{2} cos\ \frac{y}{2}\ dy$

19.— $\int sen^2\ x\ dx$

20.— $\int cos^2\ x\ dx$

Hallar las funciones $\int$ que satisfacen las condiciones indicadas en cada caso.

21.—$D_x\ f = x^3 + 3x + 5, \quad f\ (1) = 1$

22.—$D_x\ f = sen\ x + 7, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

23.—$D_x\ f = 3\ cos\ x + 7x, \quad f\ (\pi) = 4$

24.—La aceleración de un móvil que se desplaza en línea recta es $a\ (t) = 10\ m/seg^2$. Hallar la función que expresa la posición del cuerpo en cada instante $t$ sabiendo que parte del reposo.

25.—Un cuerpo se deja caer desde una torre de 50 mts. de altura. ¿Cuál es la función que expresa la posición del cuerpo en cada instante $t$ ? En qué momento toca el suelo? (Tomar la aceleración de la gravedad igual a 9.8 $m/seg^2$).

26.—Un cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad de 40 m/seg. desde una torre de 50 mts. de altura. a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cuerpo? b) ¿En qué instante toca el suelo? c) ¿Cuál es la velocidad que tiene el cuerpo en el momento de tocar el suelo? (Ver ejemplo 6.25).

27.—$f(t) = 2t^3 - 18t^2 + 30t + 9$ describe el movimiento rectilíneo de un vehículo con respecto a un punto fijo. Determinar el intervalo de tiempo durante el cual el vehículo se desplaza en sentido contrario al inicial.