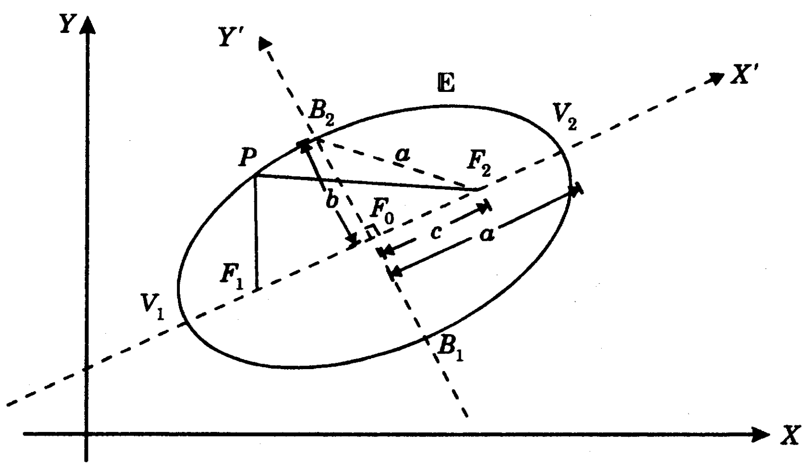
Capítulo 3

La Elipse

3.1 DEFINICION. Una *elipse* $\mathbb{E}$ es el conjunto de los puntos del plano euclideano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es una constante.

Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ y a un número real positivo. Entonces

$$\mathbb{E} = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$



3.2 NOTACION Y PROPIEDADES

1. Los puntos F_1 y F_2 se denominan *focos de la elipse.*

2. El punto medio $F_0 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro de la elipse.*

3. Si $F_1 \neq F_2$, la elipse corta la recta X' que pasa por F_1 y F_2 en exactamente dos puntos V_1 y V_2, que reciben el nombre de *vértices de la elipse.* Se demuestra que

$$d(V_1, F_0) = d(V_2, F_0) = a$$
$$d(F_1, F_0) = d(F_2, F_0) = c$$

y que $\quad 0 < c < a.$

El segmento $\overline{V_1V_2}$ se llama *eje mayor* de la elipse y tiene longitud $2a$. El número a se llama *semieje mayor.*

4. Si $F_1 \neq F_2$, la elipse corta la recta Y' que pasa por F_0 y es perpendicular al eje mayor en exactamente dos puintos B_1 y B_2. Se demuestra que

$$d(B_1, F_0) = d(B_2, F_0)$$

y que $\quad b^2 + c^2 = a^2$

El segmento $\overline{B_1B_2}$ se llama *eje menor de la elipse* y tiene longitud $2b$. El número b se llama *semieje menor.*

5. El número $e = \dfrac{c}{a}$ se llama *excentricidad de la elipse*. Es fácil de ver que $0 \leq e \leq 1$.

3.3 ECUACIONES DE LA ELIPSE CON EJE PARALELO A UN EJE DE COORDENADAS CARTESIANAS.

TEOREMA.

1. La ecuación de una elipse cuyo eje mayor es paralelo el eje X es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b,$$

en donde se tiene que

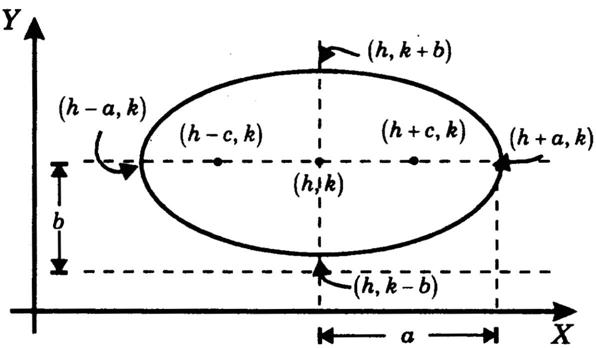
$$\begin{cases} \text{centro de la elipse:} & (h, k) \\ \text{vértices de la elipse:} & (h-a, k) \text{ y } (h+a, k) \\ \text{focos de la elipse:} & (h-c, k) \text{ y } (h+c, k),\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

2. La ecuación de una elipse cuyo eje mayor es paralelo al eje Y es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \text{con } a > b,$$

en donde se tiene que

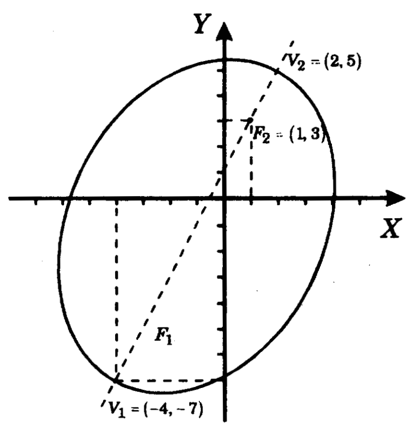
$$\begin{cases} \text{centro de la elipse:} & (h, k) \\ \text{vértices de la elipse:} & (h, k-a) \text{ y } (h, k+a) \\ \text{focos de la elipse:} & (h, k-c) \text{ y } (h, k+c),\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Elipse con eje paralelo al eje *X*

3.4 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar una ecuación de la elipse con vértices $(-4, -7)$ y $(2, 5)$ y uno de los focos en $(1, 3)$.



SOLUCION. Representamos gráficamente

$$\begin{aligned} \text{los vértices } V_1 &= (-4, -7) \\ \text{y } V_2 &= (2, 5) \\ \text{y el foco } F_2 &= (1, 3) \end{aligned}$$

Debemos calcular la longitud $2a$ del eje mayor y el foco F_1.

Se tiene $\qquad 2a = d(V_1, V_2) = \sqrt{[2-(-4)]^2 + [5-(-7)]^2} = \sqrt{180}$

Los vectores $F_1 - V_1$ y $V_2 - F_2$ son paralelos y tienen igual longitud pues

$$d(V_1, F_1) = d(V_2, F_2)$$

Por consiguiente, son iguales y se cumple

$$F_1 - V_1 = V_2 - F_2$$

o $$F_1 = V_1 + V_2 - F_2 = (-4, -7) + (2, 5) - (1, 3)$$

y así $$F_1 = (-3, -5).$$

Designemos con $P = (x, y)$ un punto arbitrario de la elipse. Por definición se debe verificar

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

o $$\sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{180}.$$

Y eliminando los radicales del primer miembro

$$\left[\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{180} - \sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2}\right]^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 = 180 - 2\sqrt{180}.\sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25$$

$$\left[2\sqrt{180}.\sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2}\right]^2 = [8x + 16y + 195]^2$$

se obtiene

$$720\left(x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25\right) = 64x^2 + 216y^2 + 38025 + 216xy + 3120x + 6240y$$

o $$656x^2 + 504y^2 - 216xy + 1200x + 960y - 13545 = 0$$

RESPUESTA. La ecuación buscada es

$$656x^2 + 504y^2 - 216xy + 1200x + 960y - 13545 = 0$$

PROBLEMA 2. Demostrar que $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $a > b$, es la ecuación de una elipse con centro (h, k) y eje mayor paralelo al eje X. Probar que

a = semieje mayor, $\quad b$ = semieje menor

$(h-a, k)$, $(h+a, k)$ son los vértices de la elipse,

$(h-c, k)$, $(h+c, k)$ son los focos de la elipse,

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

SOLUCION. Puesto que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje X, los focos F_1, F_2 y el centro (h, k) tienen igual ordenada k.

Siendo el centro el punto medio de los focos tenemos

$$F_1 = (h - c, k) \qquad \text{y} \qquad F_2 = (h + c, k), \quad \text{con} \quad c > 0.$$

Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse se debe cumplir

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad , a > 0 \tag{1}$$

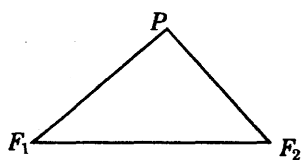
Observemos que (1) implica que $\qquad c \le a \qquad$ **(2)**

En efecto, por la desigualdad triangular

$$2c = d(F_1, F_2) \le d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

para cualquier punto de la elipse. Así $c \le a$.

Volviendo a la ecuación (1) podemos escribir



$$\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - h)^2} + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

Desarrollando

$$\left[\sqrt{[(x - h) + c]^2 + (y - k)^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2}\right]^2$$

$$(x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2 =$$
$$= 4a^2 - 4a\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} + (x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2$$

$$a\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = a^2 - c(x - h)$$

$$\left[a\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2}\right]^2 = \left[a^2 - c(x - h)\right]^2$$

$$a^2\left[(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2\right] = a^4 - 2ca^2(x - h) + c^2(x - h)^2$$

da $$(a^2 - c^2)(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

De (2) se tiene $c^2 \le a^2$ y podemos hacer $b^2 = a^2 - c^2 \ge 0$, con $b \ge 0$.

La última ecuación se convierte en $b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$, y si $b > 0$, dividiendo por a^2b^2 se obtiene $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$

Hallaremos los vértices del eje mayor. La recta L que contiene al eje mayor es $y = k$. Por lo tanto, haciendo $y = k$ en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = h \pm a,$$

y así, $V_1 = (h-a, k)$ y $V_2 = (h+a, k)$ son los vértices de la elipse.

Puesto que por definición se tiene

$$\text{semieje mayor} = \frac{1}{2} d(V_1, V_2) = \frac{2a}{2} = a$$

vemos que a es el semieje mayor.

De igual modo, la recta que contiene al eje menor es $x = h$. Por lo tanto, haciendo $x = h$ en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = k \pm b,$$

y así $\qquad B_1 = (h, k-b)$ y $B_2 = (h, k+b)$

son los extremos del eje menor.

Luego se tiene $\qquad \text{semieje menor} = \dfrac{1}{2} d(B_1, B_2) = \dfrac{2b}{2} = b$

PROBLEMA 3. Hallar una ecuación de la elipse con centro en $(0, 1)$, sus focos en el eje Y, y la longitud del eje mayor igual a $5/3$ veces la longitud del eje menor y que pasa por el punto $(-12/5, 4)$.

SOLUCION. Designaremos con a y b las longitudes de los semiejes mayor y menor, respectivamente. Se tiene entonces que

$$a = \tfrac{5}{3} b \tag{1}$$

Puesto que se trata de una elipse con eje paralelo al eje Y y centro en $(0, 1)$, la ecuación buscada es de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-1)^2}{a^2} = 1 \tag{2}$$

Debemos determinar a y b.

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene $\qquad \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{(y-1)^2}{\dfrac{25b^2}{9}} = 1,$

y como el punto $(-12/5, 4)$ se encuentra en la elipse

$$\frac{144}{25b^2} + \frac{3^2}{\frac{25b^2}{9}} = 1 \quad ,$$

o $\qquad 25b^2 = 144 + 81$

$\qquad\qquad b = 3$

y de aquí $\qquad a = \frac{5}{3}b = \frac{5}{3} \times 3 = 5.$

RESPUESTA. La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1.$

PROBLEMA 4. Sean e un número real $0 < e < 1$, F un punto fijo y L una recta que no contiene a F.

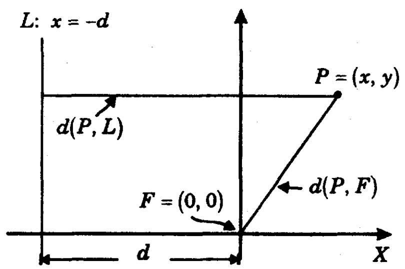
1) Probar que los puntos P del plano cuya distancia del punto F es e veces la distancia de la recta L forman una elipse.

2) Si a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente, y si $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, probar que $c = ea$.

Nota. Llamamos *foco* al punto F, *excentricidad* al número e, y *directriz* a la recta L.

SOLUCION.

1) Consideramos un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el punto F tal que el eje X sea perpendicular a la recta L y orientamos X positivamente en el sentido de la recta L al punto F.



Se tiene así $\quad F = (0,0) \;\; , \;\; L : x = -d \;,$

donde $\quad d = d(F, L)$.

Designemos con $P = (x, y)$ un punto tal que $\quad d(P,F) = e\,d(P,L)$.

Se tiene entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|x + d|$$

$$\left(x^2 + y^2\right) = e^2(x+d)^2 = e^2\left(x^2 + 2xd + d^2\right)$$

o $\quad \left(1-e^2\right)x^2 - 2e^2 d\,x + y^2 \;=\; e^2 d^2$

$$\left(1-e^2\right)\left[x^2 \;-\; \frac{2e^2 d\,x}{1-e^2}\right] + y^2 \;=\; e^2 d^2$$

Sumando $\dfrac{e^4 d^2}{1-e^2}$ en ambos miembros para completar cuadrados en los corchetes,

se tiene $\qquad \left(1-e^2\right)\left[x - \dfrac{e^2 d}{1-e^2}\right]^2 + y^2 \;=\; e^2 d^2 + \dfrac{e^4 d^2}{1-e^2} \;=\; \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}$

y dividiendo ambos miembros entre $\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}$

$$\frac{\left[x \;-\; \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}\right]^2}{\dfrac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}} \;+\; \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} \;=\; 1.$$

Puesto que $0 < e < 1$ implica $e^2 < 1$ y $1-e^2 > 0$, ambos denominadores son positivos y la ecuación es, en verdad, la de una elipse con centro en

$\left(\dfrac{e^2 d}{1-e^2}, 0\right)$ y ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

2) Siendo $0 < e^2 < 1$ se obtiene $\quad 1-e^2 < 1$

$$\left(1-e^2\right)^2 < \left(1-e^2\right)$$

$$\frac{1}{1-e^2} < \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}$$

$$\frac{e^2 d^2}{1-e^2} < \frac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}$$

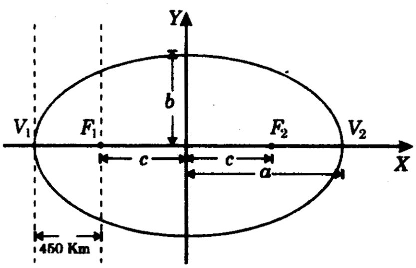
Así, si a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente, se cumple

$$a^2 \;=\; \frac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} \qquad \text{y} \qquad b^2 \;=\; \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$$

Luego $\quad c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} - \dfrac{e^2 d^2}{1-e^2} = \dfrac{e^4 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2 \times \dfrac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} = e^2 a^2$,

y $\quad c = ea$

PROBLEMA 5. Un satélite se mueve alrededor de la tierra describiendo una órbita elíptica, donde la tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{3}$.
La distancia más corta a la tierra es 450 Kms.
Hallar la distancia más grande a la que se aleja el satélite de la tierra.



SOLUCION. Sean $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ los focos de la elipse y la tierra ubicada en el foco F_1 (Ver figura). Designaremos con a y b los semiejes mayor y menor, respectivamente.

Es claro que $\quad$ distancia más corta $= d(F_1, V_1) = a - c = 450 \qquad$ **(1)**

distancia máxima $= d(F_1, V_2) = a + c \qquad$ **(2)**

Debemos calcular $\quad d(F_1, V_2) = a + c$

Por el problema 4 ,si e es la excentricidad se tiene $c = ea$.

Sustituyendo $e = \frac{1}{3}$ obtenemos $\quad a = 3c \qquad$ **(3)**

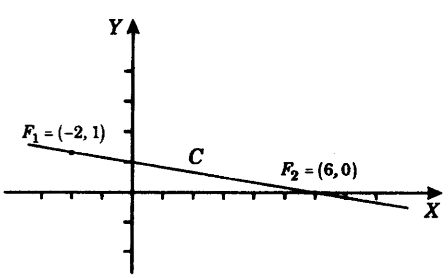
Resolviendo (1) y (3) $\quad \begin{cases} a - c = 450 \\ a = 3c \end{cases}$

da $\; c = 225$.

Finalmente de (2) $\quad d(F_1, V_2) = a + c = 4c = 4 \times 225 = 900\,\text{Km}$.

RESUESTA. 900 Kms.

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de la elipse con focos $(-2, 1)$ y $(6, 0)$ y excentricidad $e = \dfrac{\sqrt{65}}{10}$



SOLUCION. Designemos con C el centro de la elipse, V_1 y V_2 los vértices y $F_1 = (-2, 1)$ y $F_2 = (6, 0)$, los focos de la elipse.

Puesto que F_1 y F_2 son dados necesitamos calcular $2a = d(V_1, V_2)$.
Si $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$ entonces

$$c = \tfrac{1}{2}d(F_1, F_2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(6+2)^2+(0-1)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{65} \qquad (1)$$

Y por el problema 4 , $\qquad c = ea \qquad$ **(2)**

De (1) y (2) y $e = \sqrt{65}/10$ se obtiene $a = 5$

Si $P = (x, y)$ pertenece a la elipse se debe cumplir

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-6)^2+y^2} = 10$$

Eliminando radicales se obtiene

$$\left[\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\right]^2 = \left[10-\sqrt{(x-6)^2+y^2}\right]^2$$

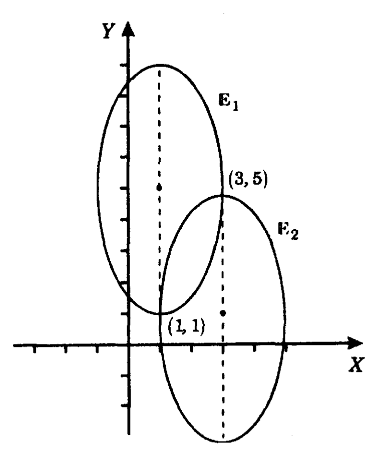
$$x^2+4x+4+y^2-2y+1 = 100-20\sqrt{(x-6)^2+y^2}+x^2-12x+36+y^2$$

$$16x-2y-131 = -20\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

$$[16x-2y-131]^2 = 400\left[(x-6)^2+y^2\right]$$

o $\quad 144x^2+396y^2+64xy-524y+1792x-2761 = 0$

PROBLEMA 7. Hallar la ecuación de cada elipse con un vértice en $(1, 1)$ y un vértice en $(3, 5)$ si el eje mayor es vertical.



SOLUCION. Sean $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ las elipses cuyas ecuaciones se trata de hallar. Las ecuaciones buscadas son de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{con } a > b$$

Para $\mathbb{E}_1$ se tiene $\qquad$ centro: $(1, 5)$

$a = 5 - 1 = 4$

$b = 3 - 1 = 2$ y así, $\mathbb{E}_1: \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$

Para $\mathbb{E}_2$ se tiene centro: (3, 1)

$a = 5 - 1 = 4$

$b = 3 - 1 = 2$ y así, $\mathbb{E}_2 : \dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

RESPUESTA. Las ecuaciones son $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$ y $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

PROBLEMA 8. La cuerda de una elipse a través de un foco y perpendicular al eje mayor se llama *lado recto o cuerda focal.* Probar que la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

SOLUCION. Consideremos la ecuación de una elipse centrada en el origen y eje mayor paralelo al eje X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

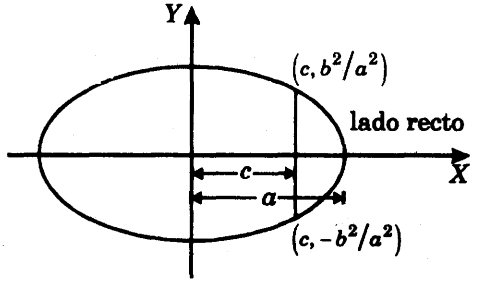
Los extremos de un lado recto tienen abscisas $x = \pm c$ y ordenadas y:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right),$$

donde $a^2 = b^2 + c^2$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - c^2\right) = \frac{b^4}{a^2}$$

o $\quad y = \pm\dfrac{b^2}{a}$.



Así $\left(c, -\dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(c, \dfrac{b^2}{a}\right)$ son los extremos de un lado recto.

Luego, la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

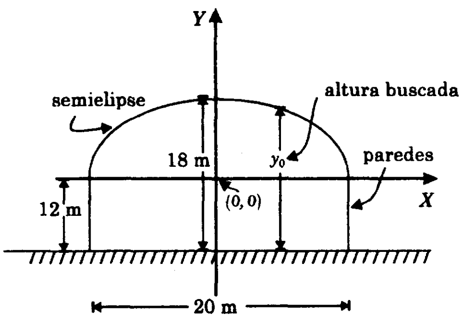
PROBLEMA 9. Un techo de 20 mts. de ancho tiene la forma de una semielipse. ¿Cúal es la altura del techo a 4 mts. de las paredes laterales, si éste tiene una altura de 18 mts. en el centro y de 12 mts. en las paredes?

SOLUCION. Consideramos un sistema de coordenadas cartesianas XY con origen en el centro de la elipse. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se tiene $a = 10$ y $b = 18 - 12 = 6$.

Luego $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1.$



A 4 mts. de distancia de la pared, la abscisa tiene valor $x_0 = 10 - 4 = 6$ y la ordenada correspondiente y_0 en la elipse cumple $\dfrac{6^2}{100} + \dfrac{y_0{}^2}{36} = 1$ de donde $y_0 = 4.8$.

Luego, la altura buscada es

$$y_0 + 12 = 4.8 + 12 = 16.8$$

RESPUESTA. El techo tiene 16.8 mts. de altura a 4 metros de las paredes laterales.

3.5 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación de la elipse con focos en $(0,0)$ y $(0,8)$ y semieje menor 3.

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación de la elipse con centro en $(-1,1)$, semieje mayor 3 y excentricidad 2/3 si el eje mayor es horizontal.

PROBLEMA 3. Un arco tiene la forma de una semielipse. ¿Qué tan ancho es el arco a una altura de 6m sobre la base, si éste tiene 32m de ancho en la base y una altura de 12m?

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $(-1,-1)$ y $(3,3)$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 5. Una elipse con centro en el origen tiene un vértice en $(-4,3)$. Hallar la ecuación de la elipse si la longitud del lado recto es 15/2.

Nota. Lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$, por el problema 8, 3.4.

PROBLEMA 6. Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $(2,0)$ y $(2,6)$ y uno de los focos en $(2,5)$.

PROBLEMA 7. Hallar una ecuación de la elipse con centro en $(6,1)$, vértice en $(0,-5)$ y un foco en el eje X.

RESPUESTAS.

1. $\dfrac{(y-4)^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1.$

2. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1.$

3. $16\sqrt{3}$

4. $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 36 = 0.$

5. $84x^2 + 391y^2 + 24xy - 1875 = 0$; focos $\left(2, -\frac{3}{2}\right), \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

6. $\dfrac{(x-2)^2}{5} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1.$

7. $71x^2 + 71y^2 - 2xy - 850 - 130y - 2425 = 0$